GÖZ YAŞLARI OLMADAN TOPOLOJİ[1]

SIDNEY A. MORRIS

30 Eylül 2015 Versiyonu[2]

Bu kitabın 2007 versiyonunun (veya sonraki bir versiyonunun) bölümlerinin

Arapça (Dr Alia Mari Al Nuaimat),
Çince (Dr Fusheng Bai),
Yunanca (Dr Kyriakos Papadopoulos),
Farsça (Dr Asef Nazari Ganjehlou),
Rusça (Dr Eldar Hajilarov),
İspanyolca (Dr Guillermo Pineda-Villavicencio) ve
Türkçe (Dr Soley Ersoy, Dr Mahmut Akyiğit)

tercümeleri yapılmıştır.

Bu kitabın son versiyonuna sahip olduğunuzdan sadece www.topologywithoutears.net sitesinden indirerek emin olmalısınız.

Bu kitapta çok sayıda çalışmış örnek olduğuna dikkat ediniz. Ancak, alıştırmaların çözümlerini vermeyeceğim. Çünkü bunu yapmak fayda sağlamayacaktır!

Alıştırmaları sadece kendiniz yaparak öğreneceksiniz.

[2] Bu kitap devamlı olarak güncellenmekte ve genişletilmektedir; her birinde ekleri dahil yaklaşık on beş bölüm olacağı tahmin edilmektedir. Eğer herhangi bir hata bulursanız ya da geliştirme önerileriniz olursa, lütfen morris.sidney@gmail.com adresine e-mail atınız.

Okuyucuların kitabı ve kitaptaki alıştırmaları tartışabileceği Topology Without Tears Readers adlı bir Facebook grubu vardır. Haziran 2015 itibariyle 3,100'den fazla üyesi vardır. Bkz. https://www.facebook.com/groups/6378545442.

Kitap www.topologywithouttears.net linkinden ulaşabileceğiniz giderek artan sayıda YouTube videoları ile desteklenmektedir. Haziran 2015 itibariyle 16,000'in üzerinde izlenme gerçekleşmiştir. YouTube üzerinden abone olarak yeni videolardan haberdar olabilirsiniz.

İçindekiler

Bölüm 0

Giriş

Topoloji sizi sadece yeni kavram ve teoremlerle tanıştıracak olan bir çalışma değil aynı zamanda sürekli fonksiyonlar gibi eski kavramları da ifade edecek olan matematiğin önemli ve ilginç bir alanıdır. Ancak sadece bunu söylemek topolojinin önemini olduğundan eksik gösterecektir. Topoloji o kadar temel bir alandır ki matematiğin hemen her dalında etkisinin olduğu açıktır. Bu ilk tutkuları ister cebir, analiz, kategori teorisi, kaos, sürekli ortamlar mekaniği, dinamik, geometri, endüstriyel matematik, matematiksel biyoloji, matematiksel ekonomi, matematiksel finans, matematiksel modelleme, matematiksel fizik, iletişim matematiği, sayı teorisi, sayısal matematik, yöneylem araştırmaları, isterse de istatistik olsun (ya da olacak olsun) matematikçi olmaya talip herkesi topoloji ile ilgili kılar. (Bu kitabın sonundaki oldukça zengin kaynakça topolojinin gerçekten de tüm diğer alanlarla ve hatta daha fazlası ile ilişkili olduğunu göstermek için yeterlidir.) Kümeler ve fonksiyonlar son yüzyılın matematikçileri için temel olduğu gibi kompaktlık, bağlantılılık ve yoğunluk gibi topoloji kavramları da günümüz matematikçileri için temeldir.

Topoloji birkaç farklı dala sahiptir — genel topoloji (ayrıca nokta-küme topolojisi olarak da bilinir), cebirsel topoloji, diferansiyel topoloji ve topolojik cebir— birincisi olan genel topoloji, diğerlerini çalışmaya açılan bir kapıdır. Bu kitapta genel topolojide kapsamlı bir altyapı sağlamayı hedeflemekteyim. İlk on bölümü itinayla çalışan ve en azından alıştırmaların yarısını çözen herhangi bir kişi kesinlikle istenilen bir altyapıya sahip olacaktır.

Soyut cebir gibi matematiğin[1] bir aksiyomatik dalını daha önceden çalışmamış bir okuyucu için ispat yazmayı öğrenmek bir sorun olacaktır. Nasıl ispat yazacağınızı öğrenmeniz için yardım etmek üzere ilk bölümlerde ispatın tamamını oluşturmayan ancak ispatı tamamlayacak düşünce sürecini özetleyen bir köşeye sıklıkla yer veriyorum.

[1] YouTube videom http://youtu.be/veSbFJFjbzU soyut matematiğe yararlı bir giriş sağlamaktadır.

Köşeler aşağıdaki biçimde gösterilmektedir:

Bir ispatı sonuçlandırmak için "keşif" veya "tecrübe safhası" diye adlandırılabilen düşünce süreci boyunca ilerledim.

Ancak okuyucu, keşif veya tecrübenin sıklıkla önemli olmakla birlikte, hiçbir şeyin bir kurallı ispatın yerini alamayacağını öğrenecektir.

İngilizcede ve matematikte "or" kelimesinin kullanımı arasında önemli bir farklılık vardır. Bununla birlikte Türkçede ve matematikte "veya" aynı anlamdadır. Türkçede (a) ifadesinin veya (b) ifadesinin doğru olduğunu söylediğiniz zaman ya (a) ifadesinin doğru ya (b) ifadesinin doğru olduğunu ya da $\boxed{\text{her ikisinin birden doğru olduğunu}}$ kastedersiniz. Matematikte de durum aynıdır: "veya" tek şey ifade etmez. Bu yüzden "veya" kelimesi ya (a) ifadesinin ya (b) ifadesinin ya da her ikisinin doğru olduğunu ifade eder. Örneğin $x \geq 2$ veya $x \leq 2$ olsun. Gerçekten de $x = 2$ olduğu zaman $x \leq 2$ ve $x \geq 2$'nin her ikisi de doğrudur. Bu matematiksel kullanım ilk başta yanıltıcı olabilir. Dolayısıyla **matematikte "veya" nın tek şey ifade etmediğini** daima hatırlayınız.

Bu kitap Donald Knuth tarafından tasarlanmış, güzel bir dizgi programı olan TEX'i kullanan yazı dizgisidir. Bu çok akıllı bir yazılım paketi olmakla birlikte bir sonucun ifadesinin ve onun tüm ispatının mümkün olduğu kadar aynı sayfada görünmesi gerektiği benim şahsi görüşümdür. Bu okuyucunun bilinen gerçekleri, neyi ispatlamaya çalıştığını ve bir ispatta o noktaya kadar ispatlanan şeyi aklında tutmasını kolaylaştırmaktadır. Bu yüzden de bir sonucun ifadesi ve onun ispatı bir sayfa üstte kalacaksa yarım sayfa boşluk bırakmakta (veya incelikli TEX dizini hileleri kullanmakta) tereddüt etmedim.

Bu kitapta pek çok alıştırma vardır. Sadece yeterli sayıda alıştırma üzerinden çalışmak sizi bu dersin ustası yapacaktır. Alıştırmaların çözümünü yapmadım ve yapmaya da niyetim yok. Yeterince çalışılmış örneklerin ve ispatların konunun bizzat içinde olduğunu ve alıştırmaların çözümünü yapmaya gerek olmadığını düşünüyorum—aslında böyle davranmak istenmeyen bir şeydir. Sıklıkla alıştırmalara yeni kavramları ekledim; genellikle önemli kavramlar konu içinde tekrar verilmektedir.

Daha zor alıştırmalar * ile belirtilmektedir.

Bu kitabın okuyucuları alıştırmaların çözümleri, kitap hakkında yorumlar, zorluklar ve daha ileri çalışmalar ile ilgili olarak birbirleriyle iletişim kurabilir. Bunu daha kolaylaştırmak için "Topology Without Tears Readers" adlı bir Facebook Grubu oluşturdum. Gruba katılmanızdan memnuniyet duyarım. Bu Grubu araştırınız ve sonra Gruba katılınız.

Son olarak, matematiksel ilerlemelerin tarihsel süreç dikkate alındığı zaman en iyi şekilde anlaşıldığını belirtmeliyim. Bu kitap tarihsel içeriğe yeterli bir şekilde hitap etmekte halen başarısızdır. Şimdilik Ek 2'deki topoloji şahsiyetleri hakkında notlardan kendi adıma memnunum -bu notlar büyük ölçüde *The MacTutor History of Mathematics Archive* [246]'dan alınmıştır. Okuyucuya *The MacTutor History of Mathematics Archive* [246] web sitesini ziyaret etmesi ve diğer kilit nokta şahsiyetler üzerine makaleler öncelikli olmak üzere tüm makaleleri okuması tavsiye edilmektedir. Ancak tarihin iyi bir şekilde anlaşılması nadiren yalnızca bir kaynaktan okuyarak elde edilmektedir.

Tarih konusunda burada söyleyeceklerimin hepsi, bu kitapta tanımlanan topoloji kavramlarının pek çoğunun yirminci yüzyılın ilk yarısında keşfedilmiş olduğudur. Bu keşif dönemi için çekim merkezinin Polonya olduğunu söylenebilir. (Hudutlar büyük ölçüde değişti.) II. Dünya Savaşı'nın çekim merkezini daimi bir şekilde değiştirdiğini söylemek adil olacaktır. Okuyucu bu yorumu anlamak için Ek 2'ye başvurmalıdır.

0.1 Teşekkürler

Bu kitabın daha önceki versiyonları La Trobe Üniversitesi, New England Üniversitesi, Wollongong Üniversitesi, Queensland Üniversitesi, Güney Australya Üniversitesi, New York Şehir Koleji ve Ballarat Üniversitesi'nde son 30 yıl boyunca kullanıldı. Daha önceki versiyonları eleştiren ve hataları bulan öğrencilere teşekkür ediyorum. Sunumdaki sayısız eksikliği ve hatayı belirten Deborah King ve Allison Plant'e özel teşekkürlerimi sunuyorum. Bu kitabın bir çok versiyonunu okuyan ve iyileştirmeler öneren, bazıları meslektaşım olan, Marshall Ash, Ewan Barker, James Dick, Will Dickinson, Maria Gkerats, Eldar Hajilarov, Karl Heinrich Hofmann, Manisha Jain, Ralph Kopperman, Ray-Shang Lo, Rodney Nillsen, Guillermo Pineda-Villavicencio, Peter Pleasants, Kyriakos Papadopoulos, Geoffrey Prince, Carolyn McPhail Sandison ve Bevan Thompson dahil diğerlerine de teşekkür ediyorum. Kaos üzerine olan notlarla ilgili eki hazırlamada faydalı olan Rod Nillsen'e teşekkür ediyorum. Sonsuz Küme Teorisi Bölümü'müzü etkiliyen ve 1970'lerde yazılmış olan New South Wales Üniversitesi'nin "Set Theory and Transfinite Arithmetic" adlı mükemmel ders notlarını yazan Jack Gray'e özel teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu kitabın çeşitli yerlerinde, özellikle de Ek 2'de, tarihsel notlar vardır. Bourbaki [35] ve *The MacTutor History of Mathematics Archive* [246]'ın iki mükemmel kaynak

olduğunu söylemek istiyorum.

Öncelikli olarak kitabın yazı dizgisi Donald Knuth'ın harika ve güçlü TEX paketi kullanılarak yapıldı. Kitap genişletildiği ve renklendirildiği için LATEX formatına çevrildi. Ek 5, 1997'de yazdığım "Pontryagin duality and the structure of locally compact" Morris [194] kitabına dayandırılmaktadır. 10 yıl önce benim için TEX 'de bu kitabın dizgisini hazırlayan Dr. Carolyn McPhail Sandison'a minnettarım.

0.2 Okuyucular – Konumlar ve Meslekler

Bu kitap Amerika Birleşik Devletleri, Almanya, Arjantin, Avustralya, Avusturya, Bangladeş, Bolivya, Beyaz Rusya, Belçika, Belize, Birleşik Arap Emirlikleri, Birleşik Krallık, Brezilya, Bulgaristan, Cezayir, Çek Cumhuriyeti, Çin Halk Cumhuriyeti, Danimarka, Endonezya, Ekvator, Estonya, Etiyopya, Fiji, Finlandiya, Fransa, Gabon, Gazze, Gana, Grönland, Guatemala, Guyana, Güney Afrika, Hırvatistan, Hindistan, Hollanda, Honduras, Irak, İran, İspanya, İsrail, İsveç, İsviçre, İtalya, İzlanda, Jamaika, Japonya, Kamboçya, Kamerun, Kanada, Katar, Kosta Rika, Kıbrıs, Kenya, Kolombiya, Kore, Kuveyt, Litvanya, Liberya, Letonya, Lüksemburg, Macaristan, Malezya, Malta, Mauritius, Meksika, Mısır, Nikaragua, Nijerya, Norveç, Özbekistan, Pakistan, Panama, Paraguay, Peru, Polonya, Portekiz, Porto Riko, Romanya, Rusya, Senegal, Sırbistan, Sierra Leone, Singapur, Slovenya, Sri Lanka, Sudan, Surinam, Suriye, Şili, Tanzanya, Tayvan, Tayland, Trinidad Tobago, Tunus, Türkiye, Ukrayna, Uruguay, Ürdün, Venezuela, Vietnam, Yeni Zelanda ve Yunanistan'daki bazıları muhasebeciler, sigorta uzmanları, uygulamalı ve soyut matematikçiler, gök bilimciler, biyologlar, kimyacılar, bilgisayar grafiği ve bilgisayar uzmanları, ekonometriciler, ekonomistler, hava, yazılım, elektrik, mekanik, veri tabanı, uzay, uzaysal ve iletişim mühendisleri, finans uzmanları, oyun teorisyenleri, nörofizyologlar, diyetisyenler, borsa tacirleri, filozoflar, fizikçiler, psikiyatristler, psikonalistler, psikologlar, heykeltıraşlar, yazılım geliştiricileri, uzay bilgi uzmanları, ve istatistikçiler olmuş yada olacak olan profesörler, lisansüstü öğrenciler, lisans öğrencileri ve emekliler tarafından kullanıldı veya kullanılmaktadır.

Bu kitap özellikle ekonomi öğrencilerinin yararlanabileceğı "tüm ana disiplinlerin lisansüstü seviyedeki ders notları" için yararlı kaynakçaları tanıtmak üzere tasarlanan `http://www.econphd.net/notes.htm` web sitesinde ve topoloji üzerine bir kaynak olan `http://at.yorku.ca/topology/educ.htm` Topoloji Atlasında kaynak gösterilmiştir.

0.3 Okuyucuların Övgüleri

Hector Rosey, Meksika: “Kitabınızı seviyorum.”;
T. Lessley, ABD: “Güzel yazılmış nefis bir çalışma”;
E. Ferrer, Avusturalya: “Notlarınız olağanüstü”;
Andreas Loss, Almanya: “Yazınızdan çok keyif aldım!”;
Yao Jin, Çin: “Çin, Hangzhou, Zhejiang Province, Zhejiang Sci-Tech Üniversitesi’nden bir mühendislik öğrencisiyim. Beni çok fazla cezbeden ’Topology without tears’ adlı kitabınızı inceledim.”;
E. Yuan, Almanya: “Topolojiye yeni başlayanlar için gerçekten olağanüstü bir kitap”;
Dre Johnson, ABD: “Bu kitabı sevdim”;
S. Kumar, Hindistan: “Matematikçi olmayanlar tarafından kolaylıkla takip edilebilen, konuya kolay yaklaşımıyla çok etkileyici bir kitap”;
Pawin Siriprapanukul, Tayland: “Kendini (ekonomide) doktoraya hazırlanan birisi olarak topolojinin karmaşık konuları için kitabınızı çalıştım gerçekten faydalı buldum.”;
Hannes Reijner, İsveç: “Mükemmel olduğunu düşünüyorum.”;
Manisha Jain, Hindistan: “Kitabı okuyorum ve okumanın çok kolay olduğunu söylemeliyim. Bir çok farklı kitap okudum ancak bu kitabı kavraması çok kolay. Kullandığınız kelimeler bizim çok yaygın kullandığımız kelimeler ve her şeyin bir akışı var. Kitabı beğendim efendim. Topoloji ile zor zamanlar geçiriyordum, belki bu bana yardım edebilir. Size bunun için teşekkürler”;
G. Gray, ABD: “Harika metin”;
Dipak Banik, Hindistan: “Güzel not”;
Jan van Linschoten, Hollanda: “Topoloji temellerinin açık ve genişletilmiş bir açıklamasının olduğu bir kitabı saatler (günler) boyu aradıktan sonra gece yarısından beri bir saattir kitabınızı okuyorum. Ve aradığımı (kitabınızı) bulduğumu fark ettim.”
Daniel Csaba, Macaristan: “Budapeşte, Eotvos Lorand Üniversitesi’nde bir ekonomi öğrencisiyim ve şu an gerçekten büyüleyici bulduğum ’Topology without tears’ adlı kitabınızı okuyorum ve çalışıyorum.";
Andrea johnson, Long Beach, ABD: “‘Topology Without Tears’ bu konuyu anlamamda tam olarak ihtiyaç duyduğum şey. Benim gibi insanlar için çabalarınızı takdir ediyorum!”;
B. Pragoff Jr, ABD: “Bir lisans öğrencisi için topolojiyi çok iyi açıklıyor.”;
Tapas Kumar Bose, Hindistan: “Mükemmel bir bilgi koleksiyonu”;
Debanshu Ratha, Hindistan: “Web sayfanızdan "Topology Without Tears" adlı kitabınızı henüz ulaşma fırsatım oldu. Ve ne kadar çok takdir ettiğimi ifade edemem.

Hali hazırda Hindistan'da (3. yılında) bir Matematik üniversite öğrencisiyim. İlk Topoloji dersimi geçen dönem aldım ve kitabınız benim için gerçekten heyecan verici bir kaynak oldu. Ayrıca kız kardeşim de Matematiğin içinde, kitabınızı ona da tanıttım ve o da sevdiğini söyledi.";.

Bosko Damjanovic, Sırbistan: " 'Topology Without Tears' adlı kitabınızı bilgisayar üzerinden okudum, çok hoş kitap.";

Kyriakos Papadopoulos, Xanthi, Yunanistan: "Kitabınızı online olarak keşfettim ve karmaşık düşünceleri açıklama yolunuzu sevdim!";

Mekonnen Yimam, Etiyopya: "Lisansüstü çalışmam için aşırı derecede önemli bir kaynak oldu. O olmadan topolojideki ana fikri anlamak benim için zor olabilirdi.... Ayrıca yaşamım boyunca sizi büyük bir katkı olarak hatırlayacağım.";

Yassine Amar: "Simit ve kahve bardağı arasında fark olmadığını söyleyen topoloji gibi bir şeyi anlamak için mükemmel bir kitap";

Muhammad Sani Abdullahi, Nijerya: "Sadece "çok teşekkür ederim" demek benim için yeterli olmadığından derin şükranlarımı sunmak için kullanacağım kelimeleri tam bilemiyorum. Ancak bununla birlikte, bir gelenek olduğu üzere ne zaman iyi bir şey yapılırsa en azından "teşekkür ederim" demelisiniz. Aynı şeyi söylemekte tereddüt etmeyeceğim ancak bundan daha fazlasını borçluyum. O yüzden size dua etmeye devam edeceğim.";

Spyridon N. Dimoudis, Yunanistan: "Geçenlerde "Topology Without Tears" kitabınızı buldum. Kendi başıma biraz topoloji öğrenmek istiyorum. Kitabınızdan dikkatlice birkaç sayfa okudum, bunun muazzam faydalı olacağını düşünüyorum.";

Emelife Onochie, Nijerya: "Nigerya, Awka, Nnamdi Azikiwe Üniversitesi'nde matematik bölümü öğrencisiyim. "topology without tears" kitabını internette okudum. Paradan dolayı bilgisini gizlemeyen sizin gibi insanlara minnettarım.";

S. Saripalli, ABD: "Ben 10. sınıf evde okul öğrencisiyim. . . Topology Without Tears'ı okumaktan keyif aldım.";

Roman Goncharenko, Çek Cumhuriyeti: "Harika kitabınızın basılabilir bir kopyası için bir şifre göndermenizi istiyorum. CERGE-EI, Prag'da Ekonomi bölümü yüksek lisans öğrencisiyim.";

Samuel Frade, ABD:"İlk olarak mükemmel bir Topoloji metni yazdığınız için teşekkür ediyorum, ilk iki bölümü bitirdim ve gerçekten yararlandım. "Zorlayıcı" alıştırmalar eklemenizi önermek istiyorum. Alıştırmalar bir parça kolay görünüyor. Ben bir matematik uzmanıyım, analiz ve soyut cebir üzerine dersler aldım ve kitabınız geniş bir kitleye hitap etmektedir. Okulum ciddi bir bütçe krizi yaşıyor ve matematik bölümünün topoloji için yeterli bütçesi yok, bu yüzden kompleks ve reel analizi

derinlemesine anlamayı sağlayacağını hissettiğim için topolojiyi kendi kendime öğreniyorum.”;
Maria Amarakristi Onyido, Nijerya: “Nijerya Üniversitesi matematik bölümünde son sınıf öğrencisiyim.... Zorlayıcı topoloji dersini daha ilginç kıldığı için kitabınızı son derece ilginç buldum. Sunum çok iyi ve benim gibi yeni başlayanlar için genel topolojinin temellerini anlamakta büyük bir yardımı olacak.”;
Andree GarcÃŋa Valdivia, Peru: "Sadece kişisel kullanım için kitabınızın İspanyolca sürümünü indirmek için izin istiyorum. Ekonomi okuyorum ve konuyu kendi kendime öğrenmekle ilgileniyorum. Latin Amerika'nın en eski üniversitesi olan San Marcos Üniversitesi'nde okuyorum.";
Eszter Csernai, Macaristan: “Matematiksel Ekonomi'de lisans öğrencisiyim ... Daha önce birçok kez duyduğunuza eminim ancak yine de kitabın kesinlikle harika olduğunu tekrar edeceğim!”;
Prof. Dr. Mehmet Terziler, Yaşar Üniversitesi, Türkiye: “ "Topology without tears" kitabınızı dersimde kullanmak istiyorum. HARİKA çalışmanızın (ücretsiz) basılabilir bir sürümünü göndermenizi istiyorum.”;
Christopher Roe, Avustralya: “İlk önce 'Topology without tears' kitabınız için teşekkür edebilir miyim? Sizin için muhtemelen çok basit olsa da onu okumayı tamamen mükemmel deneyim olarak buldum.”;
Jeanine Dorminey, ABD: “Şu anda Topoloji dersi alıyorum ve olağanüstü zorlanıyorum. çok fazla yardımcı olduğu için kitabınızı online okuyorum.”;
Dr. Anwar Fawakhreh, Qassim Üniversitesi, Suudi Arabistan: “Güzel kitabınız "TOPOLOGY WITHOUT TEARS" için sizi tebrik etmek istiyorum. Gerçekten harika bir kitap. Öğrencilerin anlaması için çok kolay bir şekilde yazıldığından çok hoş bir kitap. Lisans öğrencilerine Topoloji öğretiyorum. Öğrencilerin anlaması için kitabınızı çok iyi ve kolay buldum. Öğrencilerim için "TOPOLOGY WITHOUT TEARS" kitabınızı kullanmak istiyorum. Öğrenciler ve ayrıca kütüphane için kitabın Arapça kopyasını nasıl sipariş edeceğimi lütfen söyler misiniz?”
Michael Ng, Makao: “Diğer pek çok matematik kitabının aksine oldukça içten yazılmış. Örneğin, ilk bölümlerde, teoremlerin ispatlarının neredeyse hepsinin ipuçlarını ve analizini verdiniz. Bu bizim, özellikle yeni başlayanların, ispatları nasıl düşüneceğimizi anlamamızı kolaylaştırmaktadır. Bunların yanında, her bir tanımdan sonra sürekli bir çok örneğin yanı sıra gibi karşıt örnekler veriyorsunuz böylece kavramın doğru ve berrak bir görüşüne sahip olabiliyoruz”;
Elise Delagnes, Birleşik Krallık: “Şu an Oxford Üniversitesi'nde topoloji okuyorum. Hali hazırda kullandığım kitabı umduğumdan daha zor buldum. Öğretmenim kitabınız

"Topology Without Tears"ı tavsiye etti.";
Tarek Fouda, ABD: "Finans mühendisliği biliminde uzmanlık kazanmak için Stevens Teknoloji Enstitüsü'nde yüksek matematik okuyorum. Topoloji konusuyla ilk kez karşılaştım. Birkaç kitap satın aldım ancak sadece sizin kitabınızın konuyu ilginç bir şekilde açıkladığı gördüm. Sadece tren veya okulda okumak için kitaba sahip olmayı diliyorum."
Ahmad Al-Omari, Malezya: "UKM (Malezya)'da doktora öğrencisiyim, benim araştırma alanım genel topoloji ve kitabınızı çok ilginç buldum.";
Jose Vieitez, Uruguay: "Bu dönem "Facultad de Ciencias of Universidad de la Republica" da topoloji dersi veriyorum. Sizin (çok iyi) kitabınızın basılabilir bir sürümünü istiyorum.";
Muhammad Y. Bello, Matematik Profesörü, Bayero Üniversitesi, Nijerya: "'Topology Without Tears' adlı e-kitabınız topoloji bilgisine ihtiyaç duyan herhangi birisi için mükemmel bir kaynak. Topolojide temel altyapı gerektiren bazı analiz dersleri veriyorum. Ne yazık ki, öğrencilerimin bazısı ya böyle bir bilgi birikimine sahip değil ya da unutmuş. Kitabın elektronik versiyonu ile karşılaştıktan sonra inceledim. Kitabınız öğrencilere alt yapı sağlamak/yenilemek için iyi bir kaynak olacak."
Prof. Dr. Ljubomir R. Savic, Yapılar Teorisi ve Mekanik Enstitüsü, Belgrad Üniversitesi, Sırbistan: "Topolojiyi yeni öğrendim ve muhteşem kitabınızı gördüm. Benim alanım aslında Süreç Mekaniği ve Yapısal Analizdir.";
Pascal Lehmann, Almanya: "Gerçek kağıt sayfalarının kenarına notlar yazmak için sizin harika kitabınızı yazdırmam gerekiyor.";
Profesör Luis J. Alias, Murcia Üniversitesi, Matematik Bölümü, İspanya: "Mükemmel kitabınızı "Topology Without Tears"ı keşfettim. Bu dönem boyunca Genel Topoloji öğreteceğim (aslında, döneme bu sabah başlayacağım). Bu dersi geçen sene vermeye başladım ve esasen Munkres'in (Topoloji, ikinci basım) kitabının 2., 3. bölümleri, 4, 5'in bazı kısımları ve 9'un bir kısmını kapsayacak şekilde takip ettim. Kitabınızı okuyorum ve gerçekten yararlandım. Öğrencilere verdiğiniz yeni kavramları, ipuçlarını ve kilit noktaları tanıtma yolundan özellikle hoşlandım."
Daniel Nkemzi, Okutman, Fizik Bölümü, Buea Üniversitesi, Kamerun: "Topolojinin temelini anlama mücadelesiyle geçen başarısızlıkla dolu yıllardan sonra, vazgeçtim!. Geçenlerde internette dolaşırken sizin Tanrı vergisi kitabınızla karşılaştım. Online sayfaları çevirirken konuyu bu metinden de anlayamazsam muhtemelen başka hiçbir kitabın bana yardımcı olamayacağına ikna oldum.";
Tirthankar Chakravarty, Oxford Üniversitesi, Birleşik Krallık: "Cambridge Üniversitesi'nden bir ekonomistim. Notlarınız çok iyi yazılmış.";

Thomas Evelbauer, Almanya: “İçerik ve stilden aşırı bir şekilde etkilendim. Özellikle de temel kavramları tanıtma yolunuzu ve onları alıştırmalar ve güdümlü ispatlar yoluyla çalıştırmanızı sevdim.”;
Gabriele. E.M. Biella MD PhD, Araştırma Başkanı, Moleküler Biyogörüntüleme ve Psikoloji Enstitüsü, Ulusal Araştırma Konseyi, İtalya: “Ben bir nörofizyoloğum ve topolojik yaklaşım ile algısal süreçlerin bazı yeni nörodinamik tanımlamasını başarmayı hedefliyorum. Harika kitabınıza müdahil oldum.”
Fazal Haq, Pakistan: “Pakistan, Ghlam Ishaq Khan Mühendislik Fakültesi, Teknoloji ve Bilim Enstitüsü'ünde doktora öğrencisiyim. Kitabınız "topology without tears"ı okurken çok şaşırdım. Gerçekten de daha önce topoloji üzerine bu kadar güzel yazılmış bir kitap görmedim.”;
Gabriele Luculli, İtalya: “Sadece genç bir öğrenciyim ancak topoloji konusunu sunmanızı ve özellikle pek çok örneğin varlığını beğendim.”;
K. Orr, ABD: “mükemmel kitap”;
Profesör Ahmed Ould, Kolombiya: “Sunum, yalınlık ve materyalin açıklığı için sizi kutlamama izin verin.”;
Paul Unstead, ABD: “Pek çok somut örnek sağladığı ve okuyucuyu bir matematik uzmanı varsaymadığı için notlarınızı beğeniyorum.”;
Alberto García Raboso, İspanya: “Onu çok beğendim.”;
Guiseppe Curci, Teorik Fizik Ulusal Enstitüsü, Teorik Fizikte Araştırma Yöneticisi, Pisa: “Topoloji üzerine hoş ve aydınlatıcı bir kitap”;
M. Rinaldi, ABD: “Bu şimdiye kadar gördüğüm topolojiyi en akıllıca ve en iyi şekilde tanıtan bir kitap ... Notlarınızı çalıştığım zaman kavramları anladım. Örnekleriniz muazzam.”;
Joaquin Poblete, Ekonomi Lisans Profesörü, Şili Katolik Üniversitesi: “Kitabınızı okumayı yeni bitirdim ve gerçekten sevdim. Çok anlaşılır ve verdiğiniz örnekler ufuk açıcıydı.”;
Alexander Liden, İsveç: “Kitabınızı ekrandan okumaktan keyif aldım, ancak basılabilir bir kopyasını istiyorum”
Francois Neville, ABD: “(US) Maine Üniversitesi'nde uzay mühendisliği lisans öğrencisiyim ve bizim profesörümüz Topoloji konusu için sizin kitabınızı ısrarla tavsiye etti.”;
Hsin-Han Shen, ABD: “Buffalo'da New York Devlet Üniversitesi'nde Finans doktora öğrencisiyim. Benim gibi matematikte uzman olmayan doktora öğrencileri için topolojide ideal bir ilk ders olan web sitenizdeki topoloji gereçlerini çok detaylı ve okunabilir buldum”;

Degin Cai, ABD: “Kitabınız mükemmel”;
Eric Yuan, Darmstadt, Almanya: “Darmstadt Teknoloji Üniversitesi’nde topoloji çalışan bir matematik öğrencisiyim ve profesörümüz K.H. Hofmann kitabınız ‘Topology Without Tears’ı oldukça tavsiye etti.”;
Martin Vu, Oxford Üniversitesi: “Oxford’da uygulamalı matematikte yüksek lisans öğrenciyim. Hali hazırda matematikteki soyut kavramlara alışmaya çalıştığım için kitabınızın başlığını doğal bir çekiciliğe sahip olduğunu düşünüyorum.”;
Ahmet Erdem, Türkiye: “Kitabınızı çok beğendim.”;
Kartika Bhatia, Hindistan: “Delhi Üniversitesi, Delhi Ekonomi Okulu’nda yüksek lisansıma devam ediyorum. Kitabınızı çok faydalı ve anlaşılması kolay buldum. Kitabınızı okurken şüphelerimin pek çoğu ortadan kalktı.”;
Wolfgang Moens, Belçika: “Leuven Katolik Üniversitesi’nde lisans öğrencisiyim. Kendimi birkaç saat içinde "Topology Without Tears" kitabının ilk kısmını okurken buldum. Devam etmeden önce açık yazımınız ve (fark edilmemesi kesinlikle mümkün değil!) harikulade yapıtınız için sizi övmeliyim.”;
Duncan Chen, ABD: “Buna benzer pek çok mail almış olmalısınız fakat yine de ’Topology without Tears’ topoloji kitabınız için teşekkür ediyorum. Profesyonel bir yazılım geliştiricisiyim ve matematik okumaktan hoşlanıyorum.”;
Maghaisvarei Sellakumaran, Singapur: “Amerika’ya gideceğim ve doktoramı kısa süreliğine ekonomide yapacağım. Topoloji üstüne kitabınızı son derece iyi buldum.”;
Tom Hunt, ABD: “İnternette ulaşılabilir bir metin yaptığınız için teşekkürler”;
Fausto Saporito, İtalya: “çok hoş olan kitabınızı okuyorum ve bu konu hakkında şimdiye kadar gördüğüm en iyi kitap”;
Takayuki Osogami, ABD: “Kitabı online olarak okumaya başladım ve genel matematik kavramlarının yanında topoloji öğrenmek için çok güzel bir gereç olduğunu anladım.”;
Roman Knöll, Almanya: “Sizin harika bir kitabınızı okumama izin verdiğiniz için çok teşekkür ederim. ‘topology without tears’ bana çok fazla yardımcı oldu ve gereksiz ezberleme ve sistematik olmayan dersler yüzünden matematiğe karşı kaybolan ilgimi tekrardan kazandım.”;
Yuval Yatskan, ABD: “Kitaba bir göz attım ve bu muhteşem bir iş gibi görünüyor.”;
N.S. Mavrogiannis, Yunanistan: “Çok iyi bir çalışma”;
Semih Tümen, Türkiye: “Ekonomi bölümündeki doktoranın matematiksel programlar gerektirdiğini biliyorum, bu yüzden gerekli konuları gözden geçirirken kitabınızı son derece faydalı buldum.”;
Pyung Ho Kim, ABD: “Şu an bir doktora öğrencisiyim... Ekonomik coğrafya öğreniyorum ve topolojinin temel bir kavramını öğrenmek için kitabınızı kusursuz

buldum.";
Javier Hernandez, Türkiye: "Mumu masa altında saklamakla sadece elde edeceği faydaları ve bize ışık tutmak için para kazanmayı düşünmeksizin bilgisini diğerleriyle paylaşmak için çaba harcayan sizin gibi kişilere minnettarım.";
Martin D. Siyaranamual, Ekonomi ve Kalkınma Çalışmaları Merkezi (CEDS), Padjadjaran Üniversitesi, Bandung, Endonezya: "Stockholm Ekonomi okulundaki çalışmama gelecek Eylül'e kadar devam edeceğimden dolayı kitabınızı benim için faydalı buldum. Yaptığınız her şey için teşekkürler, yüksek okula gitmeden önce hazırlanmam için kitabın çok yardımı oldu.";
J. Chand, Avustralya: "topology without tears'ı ortaya koyduğunuz için çok teşekkürler. Kitabınız olağanüstü.";
Richard Vande Velde, ABD: "İki yıl önce "Topology without Tears"ın bir kopyasını kendim kullanmak amacıyla indirmek üzere sizinle irtibata geçmiştim. O zamanlar topolojide birleştirilmiş lisans/lisansüstü dersi veriyordum. Metin erişimi (online) için öğrencilere URL adresi verdim. Sizin yaptığınızla tam olarak aynı sırada gelişmeleri ve konuları takip etmesem bile ders için tek gerekli kitap olduğunu sınıfımdaki öğrencilere belirttim! Bunun çok güzel bir tavsiye olduğunu düşünüyorum. Tarih kendini tekrar ediyor ve iki yıl sonra aynı dersi aynı öğrencilere öğretiyorum. Bu yüzden kitabın tam bir sürümünü indirmek istiyorum.";
Profesör Sha Xin Wei, Güzel Sanatlar ve Bilgisayar Bilimi, Concordia Üniversitesi, Kanada: "Topoloji üzerine çok dikkatli ve içten bir şekilde yazılmış metninize övgüler! "Yaşayan" matematiği, hevesli bilimsel akranlarıma ve sanatçılara tanıtan bir ders için onu uyarlamayı düşünüyorum. Ödün vermeksizin akranlara ulaşan sizinki gibi çalışmalar bulmak daima memnuniyet vericidir.";
Doçent Dr Rehana Bari, Bangladeş: "Bangladesh, Dhaka Üniversitesi, Matematik bölümünün yüksek lisans sınıfında topoloji dersi öğretmeniyim. Şahane kitabınız "Topology Without Tears"ın bir kopyasını kişisel kullanım için alabilir miyim?";
Emrah Akyar, Matematik Bölümü, Anadolu Üniversitesi, Türkiye: "Güzel kitabınız "Topology without Tears"ı şimdi gördüm ve bu yaz dönemi kitabınızı takip etmeyi planlıyorum.";
Rahul Nilakantan, Doktora Öğrencisi, Güney Kaliforniya Üniversitesi, Ekonomi Bölümü, ABD: "Los Angeles, Güney Kaliforniya Üniversitesi, Ekonomi Bölümü'nde doktora öğrencisiyim. Eksik piyasalarla genel denge alanında çalışmayı umuyorum. Bu alan topolojik kavramların tam bir anlayışını gerektiriyor. Mükemmel kitabınız Kansas Üniversitesi'nden meslektaşım (Mr. Ramu Gopalan) tarafından önerildi. Kitabın basılamayan pdf dosyasından bir kısmını okuduktan sonra bu kitabın topoloji

öğrenmek için okumak isteyeceğim kitap olduğu hükmüne vardım.”;
Long Nguyen, ABD: “Böylesine zor bir konuda bu kadar açık bir kitap daha önce görmedim.”;
Renato Orellana, Şili: “Harika kitabınız için tebrikler. İlk bölümleri inceledim ve harika vakit geçirdim. Topolojinin benim ulaşabileceğimden öte bir konu olduğunu düşünürdüm, şimdi kendimi bu konuda bir iyimser olarak tarif edebilirim. ”;
Sisay Regasa Senbeta, Dekan Yardımcısı, Ticaret ve Ekonomi Fakültesi, Addis Ababa Üniversitesi, Etiyopya: "Doğu Afrika, Etiyopya, Ababa Üniversitesi, ekonomi bölümünde okutmanım. Kitabınızın basılabilir bir kopyasını gönderebilir misiniz?”;
Nicanor M. Tuan, ’Davao Oriental State College of Science and Technology’, Filipinler: “Selamlar! Eğitim kaynaklarınızı cömertçe paylaşmanız için şükranlarımı vurgulamak istiyorum. Topolojik olgunluğu kazanmamızda bana ve öğrencilerime gerçekten yardım ediyorsunuz. Teşekkürler, kolay gelsin.”;
Ernita R. Calayag, Filipinler: “Ben bayan Ernita R. Calayag, Filipinliyim, De La Salle Üniversitesi Matematik bölümünde doktora öğrencisiyim. Kitabınız “Topology Without Tears" hakkında iyi şeyler duydum ve matematik öğrencisi olarak, bir kopyasını elde etme ve ondan faydalanma fırsatını kaçıramam. Sizin onaylamanızla birlikte matematiğin kurucusu niteliğindeki Topolojiyi anlamaya başlayabileceğimi umuyorum.”;
Nikola Matejic, Sırbistan: “Kitabınız gerçekten eşsiz, değerli ve geniş bir kitle için çok uygun. Bu sizden dünya çapında takdir edilen değerli bir hediyedir. Sanırım topolojide uygun bilgi elde etmeye ihtiyaç duyan neredeyse herkes kitabınızdan oldukça faydalanabilir.”;
Iraj Davoodabadi, İran: “(Uygun olmayan mektubum için beni bağışlayın) Ben bir mekanik mühendisiyim ancak matematikle çok çok (özellikle analizle daha fazla) ilgiliyim. Öğretmen olmaksızın kendi kendime çalışıyorum. Soyut matematikte henüz iyi olmadığım için buradaki bazı konular benim için zor (örneğin topoloji ve soyut analiz). Şimdi sizin kitabınızı çalışıyorum. Bu kitap bu konudaki diğer kitaplardan ve şimdiye kadar bana öğretilenlerden çok çok farklı [Teşekkürler]”;
Dr Abdul Iguda, Bayero Üniversitesi, Kano, Nijerya: "Benim adım Abdul Iguda (Genel Topolojide doktor). 18 yıldır üniversitemde Genel Topoloji öğretiyorum. Ayrıca iki üniversiteye (Gwambe Devlet Üniversitesi ve Umaru Musa Yar’Adua Üniversitesi) misafir öğretim üyesi olarak gidiyorum. (Topology Without Tears) kitabınızın (ücretsiz) basılabilir bir versiyonunu istiyorum. Çok teşekkürler";
Mahdi Jafari, KNToosi Üniversitesi, Tahran, İran: "Benim adım Mahdi Jafari ve uzay mühendisliği çalışıyorum."

Jayakrishnan M, Kerala, Hindistan: "Matematik bölümü lisans öğrencisiyim ve bu yıl topoloji öğrenmeye başladım. Şimdiye kadar öğrendiklerimin hepsi Śtopology with tears' idi. Topoloji (kitabınızla tanışana kadar) benim için en zor alan oldu. Ancak bazı teoremleri ezberleyebildim. Fakat her zaman problemlerle karşılaştım. Sanırım bir problemi bile çözemeden ve konuyu açıkça anlamadan daha fazla teoremi sadece ezberleyerek daha ileri gitmenin anlamsız olduğunu düşünüyorum. Böyle bir zorlukla topoloji alırken bana yardımcı birkaç kaynağı internette aradım. Bulduğum çoğu şey benim takip ettiğim notlar ve kitaplarla aşağı yukarı aynıydı. Ancak kusursuz, tamamen farklı bir çalışma olan konuların güzel bir şekilde sunulduğu, her bir tanımın belli sayıda iyi örnekle açıklandığı TOPOLOGY WITHOUT TEARS'ı bulmaktan memnun oldum. Çalışmanız kolay ulaşılabilirliği ile diğerlerinden ayrılır. Şimdi topoloji öğrenmekten gerçekten zevk alıyorum. Topolojiyi benim için ilginç bir konu yaptığınız için teşekkürlerimi sunuyorum.";
M.A.R. Khan, Karachi: "Bir üçüncü dünya öğrencisini hatırladığınız için teşekkürler.".

0.4 Yazar

Yazar Sidney (Shmuel) Allen Morris, Avustralya Ballarat Üniversitesi'nde emekli profesör, Avustralya La Trobe Üniversitesi'nde misafir profesör, ve Avustralya, Adelaide, The William Light Enstitüsü'nde akademik kurul başkanıdır. Nisan 2010'a kadar bilişim profesörü ve Ballarat Üniversitesi Bilgi Teknolojisi ve Matematik Bilimleri Lisansüstü Okulu müdürü idi. New England Üniversitesi, Wollongong Üniversitesi ve Güney Avustralya Üniversitesi matematik bölümünde (tam) kadrolu profesör olarak görev yapmıştır. Ayrıca Yeni Güney Galler Üniversitesi, Adelaide La Trobe Üniversitesi, Tel Aviv Üniversitesi, Tulane Üniversitesi ve Bangor'daki Kuzey Galler Üniversitesi Koleji'nde görevlerde bulnmuştur. "Mathematical Association of America"'dan Lester R. Ford ödülünü ve "Australian Computer Society"'den Seçkin Hizmet ödülünü almıştır. Halen "Gazette of the Australian Mathematical Society"'nin editörüdür, "Research and Practice in Information Technology" dergisinde şef editörü, "Australian Mathematical Society" bülteninin editörü, "Group Theory" dergisi editörü ve Cambridge Üniversitesi yayın evi tarafından basılan kitaplar serisi olan "Australian Mathematical Lecture Series"de kurucu şef editörü olarak hizmet vermiştir. Yazar aşağıdaki dört kitabı yayınlamıştır;

(1) Karl Heinrich Hofmann ile birlikte, "The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups", European Mathematical Society Publishing House,

xv + 678pp, 2007, ISBN 978-3-03719-032-6;

(2) Karl Heinrich Hofmann ile birlikte, "The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student — A Handbook for the Expert", Third Edition, xxii + 924pp., de Gruyter 2013. ISBN 978-3-11-029655-6

(3) "Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups", Cambridge University Press,1977, 136pp. (Tranlated into Russian and published by Mir);

(4) Arthur Jones ve Kenneth R. Pearson ile birlikte, "Abstract Algebra and Famous Impossibilities ", Springer-Verlag Publishers, 1st ed. 1991, ISBN 0-387-97661-2, Corr. 2nd printing 1993, ISBN 3-540-97661-2

Ayrıca uluslararası hakemli dergilerde yaklaşık 140 araştırma makalesi yayımlamıştır. Yazar, Avusturalya Matematik Topluluğu'nun Yaşam Boyu Onursal Üyesidir ve Başkan Yardımcısı olarak hizmet etmiş ve 20 yıl boyunca Konseyin bir üyesi olmuştur. Yazar Brisbane'de 1947'de doğmuş, Queensland Üniversitesi'nden mezun olmuş ve bir yıl sonra Flinders Universitesi'den doktor unvanı almıştır. Üst düzey idarecilik, müdürlük, Bölüm Başkanlığı yöneticilik makamları, Okul Yöneticiliği, Akademik Kurul Başkan Vekilliği, Akademik Senato Başkan Vekilliği, Şansölye Yardımcılığı Vekilliği ve Başkan Yardımcılığı, Baş Akademik Sorumlusu (CAO) ve Baş Yönetim Sorumlusu (CEO) makamlarında görev almıştır.

Bölüm 1

Topolojik Uzaylar

Giriş

Tenis, futbol, beysbol ve hokey hepsi heyecan verici oyunlar olabilir ama oynamak için ilk olarak oyunların kurallarını (bazılarını) öğrenmek gerekir. Matematik de bunlardan farklı değildir. Bu yüzden topolojinin kuralları ile başlayacağız.

Bu bölüm topoloji tanımı ile başlamaktadır ve sonlu topolojik uzaylar, ayrık uzaylar, aşikâr topolojik uzaylar ve sonlu-kapalı topolojik uzaylar gibi ilgili bazı basit örneklere yer verilmektedir.

Topoloji, grup teorisi gibi soyut matematiğin diğer dallarına benzer biçimde, aksiyomatik bir konudur. Bundan dolayı aksiyomların kümesi ile başlayacağız. Önermeleri ve teoremleri kanıtlamak için bu aksiyomları kullanacağız. Bu, kanıt yazma becerilerini geliştirmek için son derece önemlidir.

Kanıtlar niçin önemlidir? Görevimizin bir bina inşa etmek olduğunu varsayalım. Mutlaka temel ile başlamalıyız. Bizim durumumuzda ise bunlar aksiyomlar veya tanımlar olup her şey onların üzerine inşa edilir. Her teorem ya da önerme, yeni bir bilgi seviyesini temsil eder ve kesin olarak bir önceki seviyeyle bağlantılı olması gerekir. Yeni seviyeyi, bir öncekine bir kanıt kullanarak ekleriz. Bu yüzden kanıtlar alt seviye ile bağlantıyı kuran harçlar iken teoremler ve önermeler elde ettiğimiz bilginin yeni zirveleri olur. Kanıtlar olmadan yapı çöker.

Öyleyse bir matematiksel kanıt nedir?

Bir matematiksel kanıt, size verilen bilgilerle başlayan, mantıksal akıl yürütme ile devam eden ve sizden ispatlamanızı istenilen ile biten, hata kabul etmeyen bir çıkarımdır.

Bir ispata, size verilen bilgileri yazarak ve ardından sizden kanıtlanması istenen durumu belirterek başlamalısınız. Eğer verilen bilgi veya kanıtlamanız istenen şey teknik terimler içeriyorsa bu teknik terimlerin tanımlarını yazmalısınız.

Her kanıt tam cümlelerden oluşmalıdır. Bu cümlelerin her biri ya (i) daha önceden belirtilmiş olan bir durum ya da (ii) halihazırda kanıtlanmış teorem, önerme ya da lemma olmalıdır.

Bu kitapta birçok kanıt göreceksiniz, fakat matematik bir gösteri sporu değildir. Bu katılımcılar için bir oyundur. Kanıt yazmayı öğrenmenin tek yolu bunları kendi kendinize yazmaya çalışmaktır.

1.1 Topoloji

1.1.1 Tanımlar. X boştan farklı bir küme olsun. X'in alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{T}$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X üzerinde bir **topoloji** denir;

(i) X ve $\emptyset$ boş küme $\mathcal{T}$'ya aittir,

(ii) $\mathcal{T}$'daki herhangi (sonlu veya sonsuz) sayıda kümenin birleşimi $\mathcal{T}$'ya aittir, ve

(iii) $\mathcal{T}$'daki herhangi iki kümenin kesişimi $\mathcal{T}$'ya aittir.

$(X, \mathcal{T})$ ikilisine bir **topolojik uzay** denir.

1.1.2 Örnek. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

olsun. $\mathcal{T}_1$, Tanımlar 1.1.1'in (i), (ii) ve (iii) şartlarını sağladığından X üzerinde bir topolojidir. $\square$

1.1.3 Örnek. $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$$

olsun. Bu takdirde $\mathcal{T}_2$'nin iki elemanının birleşimi

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

$\mathcal{T}_2$'ye ait olmadığından; yani Tanımlar 1.1.1'in (ii) şartını sağlamadığından $\mathcal{T}_2$ ailesi X üzerinde bir topoloji $\boxed{\text{değildir}}$. □

1.1.4 Örnek. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve

$$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

olsun. O halde $\mathcal{T}_3$'ün iki elemanının kesişimi

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$$

$\mathcal{T}_3$'e ait olmadığından; yani Tanımlar 1.1.1'in (iii) şartını sağlamadığından $\mathcal{T}_3$ ailesi X üzerinde bir topoloji $\boxed{\text{değildir}}$. □

1.1.5 Örnek. $\mathbb{N}$ tüm doğal sayılar (yani, tüm pozitif tam sayılar) kümesi olsun ve $\mathcal{T}_4$ ailesi de $\mathbb{N}$, $\emptyset$ ve $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt kümelerinden oluşsun. Öyleyse $\mathcal{T}_4$'ün elemanlarının sonsuz birleşimi

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

$\mathcal{T}_4$'e ait olmadığından; yani Tanımlar 1.1.1'in (ii) şartını sağlamadığından $\mathcal{T}_4$ ailesi $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji $\boxed{\text{değildir}}$. □

1.1.6 Tanımlar. X boştan farklı herhangi bir küme ve $\mathcal{T}$, X'in tüm alt kümelerinin ailesi olsun. Öyleyse $\mathcal{T}$'ya X kümesi üzerinde **ayrık topoloji** denir. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına da **ayrık topolojik uzay** denir.

Tanımlar 1.1.6'daki $\mathcal{T}$'nun Tanımlar 1.1.1'in koşullarını sağladığını ve bu yüzden de bir topoloji olduğunu görebiliriz.

Tanımlar 1.1.6'daki X kümesinin $\boxed{\text{herhangi}}$ boştan farklı bir küme olabileceğine dikkat ediniz. Bu yüzden her bir X kümesi için bir tane olmak üzere sonsuz sayıda ayrık uzay vardır.

1.1.7 Tanımlar. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ olsun. Öyleyse $\mathcal{T}$'ya **ayrık olmayan topoloji** ve $(X, \mathcal{T})$'ya da **ayrık olmayan topolojik uzay** denir.

Bir kez daha $\mathcal{T}$'nun Tanımlar 1.1.1'in koşullarını sağladığını ve bu yüzden de bir topoloji olduğunu kontrol etmek zorundayız.

Tanımlar 1.1.7'deki X kümesinin $\boxed{\text{herhangi}}$ boştan farklı bir küme olabileceğini tekrar gözlemleyelim. Bu yüzden her bir X kümesi için bir tane olmak üzere sonsuz sayıda ayrık olmayan uzay vardır.

Bu bölümün giriş kısmında, ispatların önemini ve ispat yazımının neleri içerdiğini tartıştık. İspatlarla ilk deneyimimiz Örnek 1.1.8 ve Önerme 1.1.9 olacaktır. Bu ispatları dikkatlice çalışmalısınız.

İspatlarla ilgili olan YouTube videolarının birincisini izlemek isteyebilirsiniz. Bu video
"Topology Without Tears – Video 4 – Writing Proofs in Mathematics"
olarak adlandırıldı ve YouTube'da
http://youtu.be/T1snRQEQuEk
ya da Çin Youku sitesinde
http://tinyurl.com/mwpmlqs
veya
http://www.topologywithouttears.net
linklerinden izlenilebilir.

1.1.8 Örnek. $X = \{a, b, c\}$ ve $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ ve $\{c\} \in \mathcal{T}$ olmak üzere $\mathcal{T}$, X üzerinde topoloji olsun. $\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu ispatlayalım.

İspat.

Bize $\mathcal{T}$'nun bir topoloji ve $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, ve $\{c\} \in \mathcal{T}$ olduğu verilmiştir.

$\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu; yani (Tanımlar 1.1.6'dan) $\mathcal{T}$'nun X'in $\boxed{\text{tüm}}$ alt kümelerini içerdiğini ispatlamamız isteniyor. $\mathcal{T}$'nun topoloji olduğunu ve dolayısıyla Tanımlar 1.1.1'in (i), (ii), ve (iii) şartlarını sağladığını hatırlayalım.

Bu yüzden X'in tüm alt kümelerini yazarak ispatımıza başlamalıyız.

X kümesinin 3 elemanı vardır ve dolayısıyla 2^3 tane farklı alt kümesi vardır. Bunlar; $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$ ve $S_8 = \{a, b, c\} = X$'dir.

Bu alt kümelerin her birinin $\mathcal{T}$'da olduğunu ispatlamamız isteniyor. $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan Tanımlar 1.1.1 (i), X ve $\emptyset$'nin $\mathcal{T}$'nun elemanı; yani, $S_1 \in \mathcal{T}$ ve $S_8 \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

Bize $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ ve $\{c\} \in \mathcal{T}$; yani, $S_2 \in \mathcal{T}$, $S_3 \in \mathcal{T}$ ve $S_4 \in \mathcal{T}$ verilmiştir.

İspatı tamamlamak için $S_5 \in \mathcal{T}$, $S_6 \in \mathcal{T}$ ve $S_7 \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermemiz gerekir. Oysa $S_5 = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$'dır. $\{a\}$ ve $\{b\}$, $\mathcal{T}$'da verildiğinden, Tanımlar 1.1.1 (ii) onların birleşiminin de $\mathcal{T}$'da; yani, $S_5 = \{a, b\} \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

Benzer şekilde $S_6 = \{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$ ve $S_7 = \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$'dır. □

Bu bölümün tanıtma amacıyla yapılan yorumlarında matematiğin bir seyirci sporu olmadığını söyledik. Aktif bir katılımcı olmalısınız. Tabii ki katılımınız bazı alıştırmaları yapmayı içermektedir. Fakat sizden bundan daha fazlası beklenmektedir. Size verilen gereç konusunda $\boxed{\text{düşünmek}}$ zorundasınız.

Görevlerinizden biri ispatladığımız sonuçlara bakmak ve ilgili sorular sormaktadır. Örneğin, sadece $\{a\}$, $\{b\}$ ve $\{c\}$ tek nokta kümelerinin her biri $\mathcal{T}$'da ve $X = \{a, b, c\}$ ise $\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu göstermiştik. Bunun daha genel bir olgunun bir örneği olup olmadığını sormalısınız, yani $\mathcal{T}$ her tek nokta kümesini içerecek şekilde iken $(X, \mathcal{T})$ herhangi topolojik uzay ise $\mathcal{T}$ ayrık topoloji olmak zorunda mıdır? Cevap "evet" dir, ve bu Önerme 1.1.9'da ispatlandı.

1.1.9 Önerme. $(X, \mathcal{T})$, her $x \in X$ için, $\{x\}$ tek nokta kümesi $\mathcal{T}$'da olacak şekilde bir topolojik uzay ise $\mathcal{T}$ bir ayrık topolojidir.

İspat.

Bu sonuç Örnek 1.1.8'in bir genellemesidir. Böylece ispatın benzer olması beklenebilir. Ancak, Örnek 1.1.8'de yaptığımız gibi X'in tüm alt kümelerini listeleyemeyiz çünkü X sonsuz bir küme olabilir. Yine de X'in $\boxed{\text{her}}$ alt kümesinin $\mathcal{T}$'da olduğunu ispatlamak zorundayız.

Bu noktada, örneğin 4,5 ya da hatta 100 elemandan oluşan X'i alarak, herhangi özel durumlar için sonucu kanıtlamak cazip gelebilir. Ancak bu yaklaşım başarısızlığa mahkûmdur. Matematiksel kanıtın hata kabul etmez bir delil olduğunu açıkladığımız bu bölümün giriş yorumlarını hatırlayalım. Birkaç özel durumu ya da çok fazla sayıda özel durumları bile göz önüne alınarak hata kabul etmez bir delil üretemeyiz. Böylece bir delil $\boxed{\text{tüm}}$ durumları içerir. Bu yüzden boştan farklı keyfi bir X kümesi ele almalıyız. Bir şekilde X'in her alt kümesinin $\mathcal{T}$'da olduğunu ispatlamalıyız.

Örnek 1.1.8'in ispatına tekrar bakarak kilit noktayı görüyoruz, öyle ki X'in her alt kümesi X'in tek nokta alt kümelerinin bir birleşimidir ve tüm tek nokta kümelerinin zaten $\mathcal{T}$'da olduğunu biliyoruz. Bu genel durumda da doğrudur.

Her kümenin tek nokta alt kümelerinin bir birleşimi olduğu gerçeğini kaydederek ispata başlayalım. S, X'in herhangi alt kümesi olsun. O halde

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$$

olur.

Her $\{x\}$'in $\mathcal{T}$'da olduğu verildiğine göre Tanımlar 1.1.1 (ii) ve yukarıdaki ifade $S \in \mathcal{T}$ olmasını gerektir. S, X'in keyfi bir alt kümesi olduğundan $\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu görmekteyiz. $\square$

Her S kümesinin tek nokta alt kümelerinin bir birleşimi olması kitap boyunca birçok farklı durumda zaman zaman kullanacağımız bir sonuçtur. Bunun $S = \emptyset$ iken bile sonucunu $\emptyset$ olarak elde ettiğimiz **boş birleşimi** oluşturduğumuzda sağlandığına dikkat edelim.

Alıştırmalar 1.1

1. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ verilsin. X'in alt kümelerinin aşağıdaki sınıflarının X üzerinde bir topoloji olup olmadığını belirleyiniz:

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{a, f\},\ \{b, f\},\ \{a, b, f\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X,\ \emptyset,\ \{a, b, f\},\ \{a, b, d\},\ \{a, b, d, f\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X,\ \emptyset,\ \{f\},\ \{e, f\},\ \{a, f\}\}$.

2. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ verilsin. X' in alt kümelerinin aşağıdaki sınıflarından hangileri X üzerinde bir topolojidir? (cevabınızı doğrulayınız.)

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X,\ \emptyset,\ \{c\},\ \{b, d, e\},\ \{b, c, d, e\},\ \{b\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b, d, e\},\ \{a, b, d\},\ \{a, b, d, e\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X,\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a, b, c\},\ \{d, e, f\},\ \{b, d, e, f\}\}$.

3. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ and ve $\mathcal{T}$, X üzerinde ayrık topoloji ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

(a) $X \in \mathcal{T}$;	(b) $\{X\} \in \mathcal{T}$;	(c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$;	(d) $\emptyset \in \mathcal{T}$;
(e) $\emptyset \in X$;	(f) $\{\emptyset\} \in X$;	(g) $\{a\} \in \mathcal{T}$;	(h) $a \in \mathcal{T}$;
(i) $\emptyset \subseteq X$;	(j) $\{a\} \in X$;	(k) $\{\emptyset\} \subseteq X$;	(l) $a \in X$;
(m) $X \subseteq \mathcal{T}$;	(n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$;	(o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$;	(p) $a \subseteq \mathcal{T}$.

   [İpucu. Yukarıda tam olarak 6 tane doğru var.]

4. $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. **$\mathcal{T}$ herhangi sonlu sayıda elemanın kesişiminin $\mathcal{T}$'nun elemanı olduğunu** kanıtlayınız.
   [İpucu. İspatlamak için "matematiksel tümevarım" kullanınız.]

5. $\mathbb{R}$ tüm gerçel sayılar kümesi olsun. $\mathbb{R}$'nin alt kümelerinden aşağıdaki sınıflarının her birinin topoloji olduğunu kanıtlayınız.

   (i) $\mathcal{T}_1$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ ve herhangi n pozitif tam sayısı için tüm $(-n, n)$ aralıklarından oluşur;

   (ii) $\mathcal{T}_2$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ ve herhangi n pozitif tam sayısı için tüm $[-n, n]$ aralıklarından oluşur;

   (iii) $\mathcal{T}_3$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ ve herhangi n pozitif tam sayısı için tüm $[n, \infty)$ aralıklarından oluşur.

6. $\mathbb{N}$ tüm pozitif tam sayıların kümesi olsun. $\mathbb{N}$'nin alt kümelerinin aşağıdaki sınıflarının her birinin bir topoloji olduğunu kanıtlayınız.

   (i) $\mathcal{T}_1$, $\mathbb{N}$, $\emptyset$ ve herhangi n pozitif tam sayısı için her $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümelerinden oluşur. (Bu **başlangıç bölüt topolojisi** olarak adlandırılır.)

   (ii) $\mathcal{T}_2$, $\mathbb{N}$, $\emptyset$ ve herhangi n pozitif tam sayısı için her $\{n, n+1, \ldots\}$ kümelerinden oluşur. (Bu **bitiş bölüt topolojisi** adı olarak adlandırılır.)

7. Aşağıdaki kümeler üzerinde tüm olası topolojileri listeleyiniz:

   (a) $X = \{a, b\}$;

   (b) $Y = \{a, b, c\}$.

8. X sonsuz bir küme ve $\mathcal{T}$ üzerinde bir topoloji olsun. X'in her sonsuz alt kümesi $\mathcal{T}$'da ise $\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu ispatlayınız.

9.* $\mathbb{R}$ tüm gerçel sayılar kümesi olsun. $\mathbb{R}$'nin alt kümelerinin aşağıdaki on sınıfından hangi üçü topolojidir? Bunları tespit ediniz ve cevabınızı doğrulayınız.

(i) $\mathcal{T}_1$, $\mathbb{R}$, Ø ve $a < b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için her (a, b) aralığını içerir;

(ii) $\mathcal{T}_2$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif gerçel sayısı için her $(-r, r)$ aralığını içerir;

(iii) $\mathcal{T}_3$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif rasyonel sayısı için her $(-r, r)$ aralığını içerir;

(iv) $\mathcal{T}_4$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif rasyonel sayısı için her $[-r, r]$ aralığını içerir;

(v) $\mathcal{T}_5$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif irrasyonel sayısı için her $(-r, r)$ aralığını içerir;

(vi) $\mathcal{T}_6$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif irrasyonel sayısı için her $[-r, r]$ aralığını içerir;

(vii) $\mathcal{T}_7$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif gerçel sayısı için her $[-r, r)$ aralığını içerir;

(viii) $\mathcal{T}_8$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif gerçel sayısı için her $(-r, r]$ aralığını içerir;

(ix) $\mathcal{T}_9$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi r pozitif gerçel sayısı için her $[-r, r]$ aralığını ve her $(-r, r)$ aralığını içerir;

(x) $\mathcal{T}_{10}$, $\mathbb{R}$, Ø ve herhangi n pozitif tam sayısı ve herhangi r pozitif gerçel sayısı için her $[-r, r]$ aralığını ve her $(-r, r)$ aralığını içerir.

1.2 Açık Kümeler, Kapalı Kümeler, Hem Açık Hem Kapalı Kümeler

Sürekli olarak "$\mathcal{T}$'nun elemanları" demek yerine böyle kümelere bir isim vermek daha uygundur. Onlara "açık kümeler" denir. Ayrıca açık kümelerin tümleyenlerine de isim verilir. Onlar da "kapalı kümeler" olarak adlandırılır. Bu terminoloji ideal olmamakla birlikte gerçel sayılar ailesindeki "açık aralıklar" ve "kapalı aralıklar" kavramlarından gelmektedir. Bölüm 2'de bunlar hakkında daha fazla bilgiye sahip olacağız.

1.2.1 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$'nun elemanları **açık kümeler** olarak adlandırılır.

1.2.2 Önerme. Eğer $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ise

(i) X ve $\emptyset$ açık kümelerdir,

(ii) herhangi (sonlu ya da sonsuz) sayıda açık kümelerin birleşimi bir açık kümedir, ve

(iii) herhangi sonlu sayıda açık kümelerin kesişimi bir açık kümedir.

İspat. Açıkça (i) ve (ii), Tanım 1.2.1 ve Tanımlar 1.1.1 (i) ve (ii)'nin aşikar sonuçlarıdır. (iii) koşulu ise Tanım 1.2.1 ve Alıştırmalar 1.1 #4'den görülür. □

Önerme 1.2.2'yi okuduğunuzda, hafızanızda bir soru meydana gelir: Açık kümelerin herhangi sonlu ya da sonsuz birleşimi açıkken açık kümelerin sadece $\boxed{\text{sonlu}}$ kesişimlerinin açık olduğu ifade edilir. Açık kümelerin sonsuz kesişimleri daima açık mıdır? Aşağıdaki örnek cevabın "hayır" olduğunu gösterir.

1.2.3 Örnek. $\mathbb{N}$ tüm pozitif tam sayıların kümesi olsun. $\mathcal{T}$, $\mathbb{N}$'de S'nin tümleyeni $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu bir küme olacak şekilde $\mathbb{N}$'nin her S alt kümesi ve Ø'den oluşsun. $\mathcal{T}$'nun Tanımlar 1.1.1'i sağladığı ve böylece $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji olduğu kolay bir şekilde görülür. (Bir sonraki kısımda bu topolojiden ayrıca söz edilecek olup sonlu kapalı topoloji olarak adlandırılacaktır.) Her bir n doğal sayısı için S_n kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

$\mathcal{T}$ topolojisinde her bir S_n kümesi açık bir kümedir. Çünkü tümleyeni sonlu bir kümedir. Bununla birlikte,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\} \tag{1}$$

dir. $\{1\}$'in tümleyeni ne $\mathbb{N}$ ne de sonlu küme olduğundan, $\{1\}$ açık küme değildir. Bu yüzden (1) gösterir ki S_n açık kümelerinin kesişimi açık değildir. □

Örnek 1.2.3'deki örneği nasıl buldunuz? diye sorabilirsiniz. Cevap sıradandır! Deneme ve yanılma yoluyla bulunmuştur.

Örneğin eğer ayrık bir topolojiyi deneseydik açık kümelerin her bir kesişiminin gerçekten açık olduğunu bulurduk. Aynı şey ayrık olmayan topolojide de geçerlidir. Öyleyse yapmanız gereken bazı ustaca tahminlerdir.

Açık kümelerin kesişimlerinin açık küme olmak zorunda olmadığını ispatlamak için bir karşıt örneğe ihtiyacınız olduğunu unutmayınız!

1.2.4 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in bir S alt kümesinin X'deki tümleyeni $X \setminus S$, $(X, \mathcal{T})$'da açık ise S alt kümesine $(X, \mathcal{T})$'da **kapalı küme** denir.

Örnek 1.1.2'de kapalı kümeler

$$\emptyset, X, \{b, c, d, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, e, f\} \text{ ve } \{a\}$$

dir. Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık uzay ise X'in her bir alt kümesinin kapalı bir küme olduğu aşikardır. Ancak bir $(X, \mathcal{T})$ ayrık olmayan uzayında kapalı kümeler sadece X ve Ø'dir.

1.2.5 Önerme. Eğer $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ise

(i) $\emptyset$ ve X kapalı kümelerdir,

(ii) herhangi (sonlu ya da sonsuz) sayıda kapalı kümelerin kesişimi bir kapalı kümedir ve

(iii) herhangi sonlu sayıda kapalı kümelerin birleşimi bir kapalı kümedir.

İspat. (i) şıkkı, X'in tümleyeni $\emptyset$ ve $\emptyset$'nin tümleyeni X olduğundan Önerme 1.2.2 (i) ve Tanım 1.2.4'ten doğrudan görülür.

(iii) şıkkının doğru olduğunu kanıtlamak üzere $S_1, S_2, \ldots, S_n$ kapalı kümelerini alalım. $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$'nin bir kapalı küme olduğunu ispatlamamız isteniyor. Tanım 1.2.4'den $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$'in bir açık küme olduğunu göstermek yeterlidir.

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ kapalı kümeler oldukları için tümleyenleri olan $X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$, $\ldots$, $X \setminus S_n$ açık kümelerdir. Ancak

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n) \tag{1}$$

dir. (1)'in sağ tarafı açık kümelerin sonlu bir kesişimi olduğu için bir açık kümedir. Bu yüzden (1)'in sol tarafı bir açık kümedir. Böylece $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ bir kapalı kümedir. Bu yüzden (iii) doğrudur.

(ii) şıkkının ispatı (iii) şıkkına benzerdir. [Ancak bununla birlikte, Örnek 1.3.9'un ispatındaki uyarıyı okumalısınız.] $\square$

Uyarı. "Açık" ve "kapalı" isimleri topoloji dünyasına yeni gelenleri sık sık yanıltmaktadır. Bu isimlere rağmen bazı açık kümeler ayrıca kapalı kümelerdir! Dahası bazı kümeler ne açık ne de kapalı kümelerdir! Gerçekten de Örnek 1.1.2'yi göz önüne alırsak görürüz ki;

(i) $\{a\}$ kümesi hem açık hem kapalıdır;

(ii) $\{b, c\}$ kümesi ne açık ne de kapalıdır;

(iii) $\{c, d\}$ kümesi açıktır fakat kapalı değildir;

(iv) $\{a, b, e, f\}$ kümesi kapalıdır fakat açık değildir.

Ayrık olmayan $(X, \mathcal{T})$ uzayında X ve $\emptyset$ haricinde X'in tüm alt kümeleri ne açık ne de kapalı iken ayrık uzaydaki her küme hem açık hem kapalı kümedir. □

Kümelerin hem açık hem de kapalı olabileceğini hatırlatmak için aşağıdaki tanımı verelim.

1.2.6 Tanım. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir S alt kümesi açık ve kapalı ise bu kümeye $(X, \mathcal{T})$'da **hem açık hem kapalı** denir.

Her $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında X ve $\emptyset$'nin her ikisi de hem açık hem kapalıdır.[1]

Bir ayrık uzaydaki X'in tüm alt kümeleri hem açık hem kapalıdır.

Bir ayrık olmayan uzayda hem açık hem kapalı alt kümeler sadece X ve $\emptyset$'dir.

Alıştırmalar 1.2

1. Örnek 1.1.2'deki X kümesinin 64 tane alt kümesinin hepsini listeleyiniz. Her bir kümenin yanına (i) hem açık hem kapalı, (ii) ne açık ne kapalı, (iii) açık ancak kapalı olmayan ve (iv) kapalı ancak açık olmayan, olup olmadığını belirleyiniz.

2. $(X, \mathcal{T})$ uzayı her alt kümesinin kapalı olduğu bir topolojik uzay olsun. Bu uzayın bir ayrık uzay olduğunu ispatlayınız.

[1] İtiraf edelim ki "hem açık hem kapalı" terimi çok hoş olamayan bir kullanımdır ancak kullanımı artık yaygındır.

3. $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık uzay ya da ayrık olmayan uzay ise her açık kümenin, hem açık hem kapalı küme olduğunu gözlemleyiniz. Bir $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde ayrık ve ayrık olmayan topolojiler dışında her açık kümenin, hem açık hem kapalı küme olduğu bir $\mathcal{T}$ topolojisi bulunuz.

4. X sonsuz bir küme olsun. Eğer $\mathcal{T}$, X üzerinde X'in her sonsuz alt kümesi kapalı olacak şekilde bir topoloji ise $\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu kanıtlayınız.

5. X bir sonsuz küme ve $\mathcal{T}$, X üzerinde X'in açık olan tek sonsuz alt kümesi X'in kendisi olacak şekilde bir topoloji olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayının ayrık uzay olması gerekli midir?

6. (i) $\mathcal{T}$, X kümesi üzerinde tam olarak dört kümeyi içerecek şekilde bir topoloji olsun;

   yani A ve B kümeleri X'in boştan ve birbirinden farklı alt kümeleri olmak üzere $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$ olsun. [A'nın X'in **özalt kümesi** olması $A \subseteq X$ ve $A \neq X$ olması anlamına gelir. Bu $A \subset X$ ile gösterilir.] A ve B'nin aşağıdaki durumlardan sadece birini sağlaması gerektiğini kanıtlayınız:

   $$(a)\ B = X \setminus A; \qquad (b)\ A \subset B; \qquad (c)\ B \subset A.$$

   [İpucu. Öncelikle A ve B'nin en azından bir koşulu sağlaması gerektiğini gösteriniz, daha sonra bu koşullardan birden fazlası sağlamayacağını gösteriniz.]

   (ii) (i)'yi kullanarak, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ üzerinde tam olarak 4 küme içeren bütün topolojileri listeleyiniz.

7. (i) Wikipedia'da http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space web adresinde kaydedildiği gibi $n \in \mathbb{N}$ noktalı bir küme üzerinde farklı topolojilerin sayısı küçük bir n için bile çok fazla olabilir öyle ki $n = 2$ olduğunda 4 topoloji; $n = 3$ olduğunda 29 topoloji; $n = 4$ olduğunda 355 topoloji; $n = 5$ olduğunda 6942 topoloji vardır. Matematiksel tümevarımı kullanarak, n arttıkça topolojilerin sayısının da artığını kanıtlayınız.

   [İpucu. Eğer n noktalı bir küme M farklı topolojiye sahipse $n + 1$ noktalı bir kümenin en az $M + 1$ topolojiye sahip olduğunu göstermeniz gereklidir.]

   (ii) Matematiksel tümevarımı kullanarak, X sonlu kümesi $n \in \mathbb{N}$ noktaya sahip ise en azından $(n-1)!$ farklı topolojiye sahip olduğunu kanıtlayınız..

   [İpucu. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $Y = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ olsun. $\mathcal{T}$, X üzerinde herhangi bir topoloji olmak üzere bir $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ alınız. Y üzerinde bir $\mathcal{T}_i$ topolojisini şu şekilde tanımlayınız: Her bir $U \in \mathcal{T}$ açık kümesi için, U'daki herhangi bir x_i'yi x_{n+1} ile yer değiştirerek U_i'yi tanımlayınız; daha sonra $Y \backslash \{x_i\}$ ve Y kümeleri de dahil tüm U_i kümeleri ile $\mathcal{T}_i$'yi oluşturunuz. $\mathcal{T}_i$'nin gerçekten Y üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.]

   (iii) X kümesi kardinalitesi $\aleph$ olan herhangi bir sonsuz küme ise X üzerinde en az $2^{\aleph}$ farklı topoloji olduğunu kanıtlayınız. Her sonsuz küme üzerinde sayılamaz sayıda farklı topoloji olduğu sonucunu çıkarınız.

   [İpucu. Sadece 3 açık küme ile en az $2^{\aleph}$ farklı topolojinin var olduğunu kanıtlayınız. Kardinal sayıların tanıtımı için bkz. Ek 1.]

1.3 Sonlu-Kapalı Topoloji

Hangi kümelerin açık olduğunu belirterek bir küme üzerinde bir topoloji tanımlamak alışılmıştır. Ancak bununla birlikte, bazen hangi kümelerin kapalı olduğunu söyleyerek topoloji tanımlamak daha olağandır. Bir sonraki tanım buna bir örnektir.

1.3.1 Tanım. X boş olmayan herhangi bir küme olsun. Eğer X'in kapalı kümeleri X ve X'in tüm sonlu alt kümeleri; yani açık kümeleri $\emptyset$ ve X'in sonlu tümleyenlere sahip olan tüm alt kümeleri ise X üzerindeki $\mathcal{T}$ topolojisine **sonlu-kapalı topoloji** veya **sonlu tümleyenler topolojisi** denir.

Tanım 1.3.1'deki $\mathcal{T}$'nun gerçekten bir topoloji olduğunu; yani Tanımlar 1.1.1'in her bir koşulunu sağladığını göstermek gerekir.

Tanım 1.3.1'de X ve X'in sonlu kümelerinin kapalı olduğu her topolojik uzayın sonlu-kapalı topoloji olarak isimlendirildiğine dikkat ediniz. Bunlar $\boxed{\text{yegane}}$ kapalı kümeler olmalıdır. [Tabii ki herhangi bir X kümesi üzerindeki ayrık topolojide X kümesi ve X'in tüm sonlu alt kümeleri gerçekten de kapalıdır, fakat X'in tüm diğer alt kümeleri de kapalıdır.]

Sonlu-kapalı topolojideki tüm sonlu kümeler kapalıdır. Ancak bununla birlikte, aşağıdaki örnek sonsuz alt kümelerin açık kümeler olması gerekmediğini gösterir.

1.3.2 Örnek. $\mathbb{N}$ tüm pozitif tam sayıların kümesi ise üzerindeki sonlu-kapalı topolojide $\{1\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$ gibi kümeler sonludurlar ve dolayısıyla kapalıdır. Böylece tümleyenleri olan

$$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}, \ \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, \ldots\}, \ \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, \ldots\}$$

kümeleri, sonlu-kapalı topolojide açık kümelerdir. Diğer bir yandan, çift pozitif tam sayılar kümesi sonlu olmadığından kapalı bir küme değildir ve böylece onun tümleyeni olan tek pozitif tam sayılar kümesi, sonlu-kapalı topolojide bir açık küme değildir.

Dolayısıyla tüm sonlu kümeler kapalı olmakla birlikte tüm sonsuz kümeler açık değildir. □

1.3.3 Örnek. $\mathcal{T}$ bir X kümesi üzerinde sonlu-kapalı topoloji olsun. Eğer X en az 3 farklı hem açık hem kapalı alt kümeye sahipse X'in sonlu bir küme olduğunu ispatlayınız.

İspat.

$\mathcal{T}$'nun sonlu-kapalı topoloji olduğu ve en az 3 farklı hem açık hem kapalı alt kümesinin bulunduğu bize verilmiştir. X'in bir sonlu küme olduğunu ispatlamamız istenmektedir.

$\mathcal{T}$'nun sonlu-kapalı topoloji olmasının, X ve X'in tüm sonlu alt kümelerinden oluşan ailenin tüm kapalı kümeler ailesi olması anlamına geldiğini hatırlayınız. Ayrıca bir kümenin hem açık ve hem kapalı olması için kümenin kapalı ve açık, yani her ikisi de olması gerektiğini hatırlayınız.

Her topolojik uzayda X ve $\emptyset$ olmak üzere en az 2 tane hem açık hem kapalı küme var olduğunu unutmayınız. (Tanım 1.2.6'nın altındaki yoruma bakınız.) Fakat bize $(X, \mathcal{T})$ uzayında en az 3 tane hem açık hem kapalı kümenin var olduğu söylenmişti. Bu X ve $\emptyset$'den başka hem açık hem kapalı bir alt küme var olduğunu belirtir. Bu diğer hem açık hem kapalı kümeyi dikkatlice incelemeliyiz!

Bizim $(X, \mathcal{T})$ uzayımız 3 farklı hem açık hem kapalı alt kümeye sahip olduğu için, X'in $S \neq X$ ve $S \neq \emptyset$ olacak şekilde hem açık hem kapalı bir S alt kümesi vardır. S alt kümesi $(X, \mathcal{T})$'da açık olduğu için Tanım 1.2.4, $X \setminus S$ tümleyeninin kapalı olmasını gerektirir.

Böylece S ve $X \setminus S$ kümeleri sonlu-kapalı $\mathcal{T}$ topolojisinde kapalıdır. Bu nedenle S ve $X \setminus S$, yani her ikisi de X'e eşit olmadıklarından sonludur. Fakat $X = S \cup (X \setminus S)$ ve böylece X iki sonlu kümenin birleşimidir. Bu nedenle istendiği gibi X sonlu bir kümedir. □

Henüz herhangi bir sonsuz küme üzerine üç faklı topoloji koyabildiğimizi biliyoruz– ve çok daha fazlası da vardır. Bildiklerimizin üçü, ayrık topoloji, ayrık olmayan topoloji ve sonlu-kapalı topolojidir. O halde bir küme üzerindeki topolojiyi belirlemek için daima dikkatli olmalıyız.

Örneğin, $\{n : n \geq 10\}$ kümesi doğal sayılar kümesi üzerindeki sonlu-kapalı topolojide açıktır fakat ayrık olmayan topolojide açık değildir. Tek doğal sayılar kümesi, doğal sayılar kümesi üzerindeki ayrık topolojide açıktır, fakat sonlu-kapalı topoloji içinde açık değildir.

Muhtemelen daha önce karşılaştığınız bazı tanımları hatırlayalım.

1.3.4 Tanımlar. f, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon olsun.

(i) $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise f fonksiyonuna **bire-bir** veya **injektif** fonksiyon denir;

(ii) Her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ bir f fonksiyonu varsa **örten** veya **sürjektif** fonksiyon denir;

(iii) f fonksiyonu hem bire-bir hem de örten ise **bijektif** fonksiyon denir.

1.3.5 Tanımlar. f, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $g(f(x)) = x$ ve her $y \in Y$ için $f(g(y)) = y$ olacak şekilde Y'den X'e bir g fonksiyonu varsa f fonksiyonunun **bir tersi vardır** denir.

Aşağıdaki önerinin ispatı sizin için bir alıştırma olarak bırakılmıştır.

1.3.6 Önerme. f, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon olsun.

(i) f fonksiyonunun bir tersi vardır ancak ve ancak f bire-bir ve örtendir.

(ii) g_1 ve g_2, Y'den X'e iki fonksiyon olsun. Eğer g_1 ve g_2 fonksiyonlarının her ikisi de f'nin ters fonksiyonları ise $g_1 = g_2$'dir; yani her $y \in Y$ için $g_1(y) = g_2(y)$'dir.

(iii) g, Y'den X'e bir fonksiyon olsun. g fonksiyonu f'nin bir tersidir ancak ve ancak f fonksiyonu g'nin bir tersidir.

Uyarı. Bir fonksiyon "bir noktayı bir noktaya dönüştürüyorsa" bu fonksiyonun bire-bir olduğunu düşünmek öğrenciler için çok yaygın bir hatadır.

Tüm fonksiyonlar bir noktayı bir noktaya dönüştürür. Nitekim bu fonksiyon tanımının bir parçasıdır.

Bire-bir fonksiyon farklı noktaları farklı noktalara eşleştiren bir fonksiyondur.

$\square$

Şimdi daha önce hiç karşılaşmadığımız önemli bir kavrama dikkatimiz verelim.

1.3.7 Tanım. f, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon olsun. Eğer S, Y'nin herhangi bir alt kümesi ise $\boldsymbol{f^{-1}(S)}$ kümesi

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ and } f(x) \in S\}$$

ile tanımlanmaktadır. X'in $f^{-1}(S)$ alt kümesine S'nin **ters görüntü**sü denir.

Hatırlarsınız ki; $f\colon X \to Y$'nin bir ters fonksiyonu vardır ancak ve ancak f bire-bir ve örtendir. Fakat Y'nin herhangi alt kümesinin ters görüntüsü f bire-bir veya örten olmasa dahi vardır.

1.3.8 Örnek. f, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinden kendi içine, her $z \in \mathbb{Z}$ için $f(z) = |z|$ olacak şekilde verilmiş bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu $f(1) = f(-1)$ olduğundan birebir değildir.

Ayrıca $f(z) = -1$ olacak şekilde herhangi bir $z \in \mathbb{Z}$ var olmadığından örten de değildir. Böylece f kesinlikle bire-bir ve örten değildir. Bunun sonucu olarak Önerme 1.3.6 (i)'den f bir ters fonksiyona sahip değildir. Ancak bununla birlikte ters görüntüleri kesinlikle mevcuttur. Örneğin,

$$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1,-2,-3,1,2,3\}$$
$$f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\}) = \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}. \qquad \square$$

Bu bölümü ilginç bir örnek ile bitirelim.

1.3.9 Örnek. $(Y, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, X boş olmayan bir küme ve f, X'den Y'ye bir fonksiyon olsun. $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$ alalım. $\mathcal{T}_1$'in X üzerinde bir topoloji olduğunu ispat edelim.

İspat.

Amacımız $\mathcal{T}_1$ kümeler ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu göstermektir. Yani $\mathcal{T}_1$'in Tanımlar 1.1.1'in (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağladığını göstermemiz gerekir.

$$X = f^{-1}(Y) \quad \text{ve} \quad Y \in \mathcal{T} \quad \text{olduğundan} \quad X \in \mathcal{T}_1.$$
$$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \quad \text{ve} \quad \emptyset \in \mathcal{T} \quad \text{olduğundan} \quad \emptyset \in \mathcal{T}_1.$$

Böylece $\mathcal{T}_1$, Tanımlar 1.1.1'in (i) özelliğine sahiptir.

Tanımlar 1.1.1'in (ii) koşulunu sağlatmak üzere J indis kümesi için $\{A_j : j \in J\}$, $\mathcal{T}_1$'in elemanlarının bir ailesi olsun. $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$ olduğunu göstermeliyiz. $A_j \in \mathcal{T}_1$ olduğundan $\mathcal{T}_1$'in tanımı gereği $B_j \in \mathcal{T}$ iken $A_j = f^{-1}(B_j)$'dir. Ayrıca $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$'dir. [Bkz. Alıştırmalar 1.3 # 1.]

$\mathcal{T}$, Y üzerinde bir topoloji olduğundan her $j \in J$ için $B_j \in \mathcal{T}$ ve böylece $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$ olur. Bu nedenle $\mathcal{T}_1$'in tanımından $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \in \mathcal{T}_1$; yani, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{T}_1$, Tanımlar 1.1.1'in (ii) özelliğine sahiptir.

[**Uyarı.** Tüm kümelerin sayılabilir olmadığını hatırlayınız. (Sayılabilir kümeler üzerine değerlendirmeler için Ek bölüme bakınız.) Bu görüş doğrutusunda $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ kümelerinin $\mathcal{T}_1$'de olduğunu kabul etmek ve onların $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ birleşimlerinin $\mathcal{T}_1$'de olduğu göstermek yeterli olmayacaktır. Bu sadece $\mathcal{T}_1$'deki $\boxed{\text{sayılabilir}}$ sayıda kümelerin birleşiminin $\mathcal{T}_1$'de olduğunu ispat edecek, fakat $\mathcal{T}_1$ 'in Tanımlar 1.1.1'in (ii) özelliğine sahip olduğunu göstermeyecektir. Bu özellik $\mathcal{T}_1$'in ister sayılabilir ister sayılamayan sayıda kümelerinin, $\boxed{\text{tüm}}$ birleşimlerinin $\mathcal{T}_1$'de olmasını gerektirir.]

Son olarak, A_1 ve A_2 kümeleri $\mathcal{T}_1$'de olsun. $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$ olduğunu göstermeliyiz. $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1$ olduğundan $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ iken $A_1 = f^{-1}(B_1)$ ve $A_2 = f^{-1}(B_2)$'dir.

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2). \qquad \text{[Bkz. Alıştırmalar 1.3 \#1.]}$$

$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ olduğu için $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$ elde ederiz. Bu yüzden $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$ olur ve $\mathcal{T}_1$'in aynı zamanda Tanımlar 1.1.1'in (iii) özelliğine sahip olduğunu göstermiş olduk.

Böylece $\mathcal{T}_1$ gerçekten de X üzerinde topolojidir. $\square$

Alıştırmalar 1.3

1. f, bir X kümesinden bir Y kümesine bir fonksiyon olsun. Herhangi bir J indis kümesi ve Y'nin herhangi B_j alt kümeleri için

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \tag{1}$$

ve

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \tag{2}$$

olduğunu Örnek 1.3.9'da ifade ettik.

   (a) (1)'in doğruluğunu ispat ediniz.
   [İpucu. Soldaki kümenin herhangi x elemanını alarak ispata başlayınız ve onun sağ taraftaki kümenin içinde olduğunu gösteriniz. Daha sonra tersini yapınız.]

   (b) (2)'nin doğru olduğunu ispatlayınız.

   (c) $A_1 \subseteq X$ ve $A_2 \subseteq X$ olmak üzere $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ olacak şekilde A_1, A_2, X, ve Y (somut) kümelerini ve $f\colon X \to Y$ fonksiyonu bulunuz.

2. Alıştırmalar 1.1 #6 (ii)'de tanımlanan $\mathcal{T}$ topolojisi sonlu kapalı topoloji midir? (Cevabınızı doğrulayınız.)

3. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında her $\{x\}$ tek nokta kümesi içinde kapalı ise $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına bir T_1-uzayı denir. Aşağıdaki 9 topolojik uzaylardan sadece ikisinin T_1-uzayı olduğunu gösteriniz. (Cevabınızı doğrulayınız.)

   (i) Ayrık uzay;
   (ii) en az 2 noktalı ayrık olmayan bir uzay;
   (iii) sonlu-kapalı topoloji ile birlikte sonsuz bir küme;
   (iv) Örnek 1.1.2;
   (v) Alıştırmalar 1.1 #5 (i);
   (vi) Alıştırmalar 1.1 #5 (ii);
   (vii) Alıştırmalar 1.1 #5 (iii);
   (viii) Alıştırmalar 1.1 #6 (i);
   (ix) Alıştırmalar 1.1 #6 (ii).

4. $\mathcal{T}$ bir X kümesi üzerinde sonlu-kapalı topoloji olsun. Eğer $\mathcal{T}$ aynı zamanda ayrık topoloji ise X kümesinin sonlu olduğunu ispat ediniz.

5. X uzayının her farklı a, b noktaları için a'yı içerip b'yi içermeyen ya da[2] b'yi içerip a'yı içermeyen bir açık küme varsa $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına bir **T_0-uzayı** denir.

   (i) Her T_1-uzayının bir T_0-uzayı olduğunu ispatlayınız.

   (ii) Alıştırma 3'deki (i)–(vi) şıklarından hangileri T_0-uzayıdır? (Cevabınızı doğrulayınız.)

   (iii) $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerine $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı T_0-uzayı olacak fakat T_1-uzayı olmayacak şekilde bir $\mathcal{T}$ topolojisi koyunuz. [Elde edeceğiniz uzay **Sierpiński uzayı** olarak adlandırılmaktadır.]

   (iiv) Alıştırmalar 1.1 #6'da tanımlanan topolojik uzayların her birinin bir T_0-uzayı olduğunu kanıtlayınız. (Yukarıda verilen Alıştırma 3'ün hiçbir maddesinin T_1-uzayı olmadığını gözlemleyiniz.)

6. X herhangi bir sonsuz küme olsun. **Sayılabilir-kapalı topoloji**, kapalı kümeleri X ve X'in tüm sayılabilir alt kümeleri olacak şekilde tanımlanmaktadır. Bunun gerçekten de X üzerinde bir topoloji olduğunu ispatlayınız.

7. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. Aşağıdaki ifadelerin her birini kanıtlayınız.

   (i) Eğer $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{T}_3$, X üzerinde bir topoloji olmak zorunda değildir. (Cevabınızı somut bir örnek bularak kanıtlayınız.)

   (ii) Eğer $\mathcal{T}_4$ topolojisi $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ ile tanımlanırsa $\mathcal{T}_4$, X üzerinde bir topolojidir. ($\mathcal{T}_4$ topolojisine $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojilerinin **arakesiti** denir.)

   (iii) Eğer $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T}_2)$, T_1-uzayı iseler $(X, \mathcal{T}_4)$ de bir T_1-uzayıdır.

   (iv) Eğer $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T}_2)$, T_0-uzayı iseler $(X, \mathcal{T}_4)$ bir T_0-uzayı olmak zorunda değildir. (Cevabınızı somut bir örnek bularak kanıtlayınız.)

   (v) Eğer $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$ bir X kümesi üzerine topoloji ise $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ de X üzerinde bir topolojidir.

   (vi) Herhangi I indis kümesi ve her bir $i \in I$ için her bir $\mathcal{T}_i$, X üzerinde bir topoloji ise $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$, X üzerinde bir topolojidir.

[2] **"Ya da" kelimesinin matematikte ki kullanımının günlük kullanımından farklı olduğunu hatırlayınız. "Ya da" matematikte tek bildirim ifade etmez. Bu konu üzerine yorumlar için Bölüm 0'a bakınız.**

8. Wikipedia'da http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space adresinde, Alıştırmalar 1.2 #7'de belirttiğimiz gibi $n \in \mathbb{N}$ elemanlı sonlu bir küme üzerinde topolojilerin sayısı küçük bir n için bile oldukça çok fazla olacağı ifade edilmiştir. Ayrıca bu Alıştırmalar 1.3 #5'de tanımlanan T_0-uzayları için de doğrudur. Gerçekten de aynı Wikipedia kaynağı, eğer $n = 3$ ise 19 farklı T_0-uzayı, $n = 4$ için 219 farklı T_0-uzayı, $n = 5$ için 4231 farklı T_0-uzayı olduğunu söylemektedir. Matematiksel tümevarım kullanarak n arttıkça T_0-uzaylarının sayısının arttığını ispatlayınız.

   [İpucu. Eğer n noktalı M adet T_0-uzayı varsa en azından $n+1$ noktalı $M+1$ adet T_0-uzayı olduğunu göstermeniz yeterlidir.]

9. Bir X uzayının her alt kümesi ya açık ya kapalı (ya da her ikisi de) ise $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına bir **kapı uzayı** denir.

   (i) Bir ayrık uzay kapı uzay mıdır?

   (ii) Bir ayrık olmayan uzay kapı uzay mıdır?

   (iii) X sonsuz olmayan bir küme ve $\mathcal{T}$ sonlu-kapalı topoloji ise $(X, \mathcal{T})$ bir kapı uzay mıdır?

   (iv) X kümesi $\{a, b, c, d\}$ olsun. X üzerinde kapı uzayı olacak şekilde $\mathcal{T}$ topolojileri tanımlayınız?

10. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir S alt kümesi $(X, \mathcal{T})$'daki açık kümelerin bir arakesiti ise bu kümeye **doymuş** denir.

   (i) Her açık kümenin bir doymuş küme olduğunu kanıtlayınız.

   (ii) T_1-uzayındaki her kümenin doymuş küme olduğunu kanıtlayınız.

   (iii) Doymuş olmayan en az bir kümeye sahip olan bir topolojik uzay örneği veriniz.

   (iv) $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının her alt kümesi doymuş küme ise $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir T_1-uzayı olduğu doğru mudur?

1.4 Dipnot

Bu bölümde bir topolojik uzayın temel kavramlarını tanıttık. Ayrık uzayla, ayrık olmayan uzayla ve sonlu-kapalı topolojili uzayların yanı sıra çeşitli sonlu topolojik uzayları[3] örnek olarak gördük.

Bunların hiçbiri uygulamalara göre özel olarak önemli bir örnek değildir. Ancak bununla birlikte Alıştırmalar 4.3 #8'de her sonsuz topolojik uzayını; ayrık olmayan topoloji, ayrık topoloji, sonlu-kapalı topoloji, Alıştırmalar 1.1 #6'daki başlangıç ya da bitiş bölüt topolojisi olmak üzere beş topolojiden birini ihtiva ettiği belirtilmektedir. Bir sonraki bölümde çok önemli olan Öklid topolojisini tanımlayacağız.

Bu yolda "açık küme" ve "kapalı küme" terimleriyle karşılaştık ve bu terimlerin yanıltıcı olduğu hakkında uyarılarda bulunduk. Kümeler hem açık hem kapalı, ne açık ne de kapalı, açık fakat kapalı değil ya da kapalı fakat açık değil olabilir. Kapalı küme olmadığını kanıtlayarak bir kümenin açık olduğunu ispatlayamayacağımızı akılda tutmak önemlidir.

Topoloji, topolojik uzay, açık küme ve kapalı küme tanımlarının yanı sıra verilen en önemli konu ispat yazma üzerine olandır.

Bu bölümün giriş yorumlarında ispatları yazmayı öğrenmenin önemine işaret ettik. Örnek 1.1.8, Önerme 1.1.9 ve Örnek 1.3.3'de bir ispat boyunca nasıl "düşüneceğimizi" gördük. İspat yazabilmede kendi becerilerinizi geliştirmeniz olmazsa olmazdır. Bu amaçla denemek üzere Alıştırmalar 1.1 #8, Alıştırmalar 1.2 #2,4 ve Alıştırmalar #1,4 yararlı alıştırmalar eklenmiştir.

[3]**Sonlu topolojik uzay** ile X kümesi sonlu iken $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayını kastediyoruz.

Henüz yapmadıysanız, ispatlar üzerine YouTube videolarının ilk iki tanesini izlemelisiniz.
"Topology Without Tears – Video 4a – Writing Proofs in Mathematics" ve "Topology Without Tears – Video 4b – Writing Proofs in Mathematics" olarak adlarılan bu videolara
http://youtu.be/T1snRQEQuEk ve http://youtu.be/VrAwuszhzTw
veya Chinese Youku sitesinde
http://tinyurl.com/mwpmlqs ve http://tinyurl.com/n3jjmsm
veya
http://www.topologywithouttears.net
adreslerindeki link takip edilerek ulaşılabilir.
Aynı zamanda ispatları yazmakta dördüncü videoyu izlemek de oldukça yararlı olacaktır. Bu Matematiksel tümevarım kullanılarak ispat yazımı üzerinedir. "Topology Without Tears - Video 4d - Writing Proofs in Mathematics" olarak adlandırılan bu videoya
http://youtu.be/gu0Z029ebo0
adresinden erişilebilir.

Bazı öğrenciler "kümelerin kümesi" olan topoloji kavramını karıştırmaktadır. Anladığınızı kontrol etmek için Alıştırmalar 1.1 #3'ü yapınız.

Alıştırmalar daha sonra ayrıntılı olarak tanıtılacak olan T_0-uzayı ve T_1-uzayı kavramlarını içerir. Bunlar **ayırma aksiyomları** olarak bilinir.

Son olarak, ters görüntülerin önemini vurguladık. Bunlar Örnek 1.3.9 ve Alıştırmalar 1.3 #1'de ele alındı. İleride sürekli dönüşüm tanımımız ters görüntülere dayandırılacaktır.

Bölüm 2

Öklid Topolojisi

Giriş

Genellikle bir film veya romanda hikâye konusunun etrafında döndüğü bir kaç ana karakter vardır. Topoloji hikâyesinde, gerçel sayılar kümesi üzerindeki Öklid topolojisi ana karakterlerden biridir. Gerçekten de öylesine zengin bir örnektir ki ilham ve ileri inceleme için sıklıkla geri döneceğiz.

Tüm gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile gösterelim. Bölüm 1'de herhangi bir küme üzerine konulabilecek; ayrık topoloji, ayrık olmayan topoloji ve sonlu kapalı topoloji olmak üzere üç topoloji tanımladık. Böylece $\mathbb{R}$ üzerine konulabilecek üç topolojiyi biliyoruz. $\mathbb{R}$ üzerindeki diğer altı topoloji, Alıştırmalar 1.1 #5 ve #9'da tanımlandı. Bu bölümde $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi olarak bilinen, çok daha önemli ve ilginç bir topoloji tanımlayacağız.

Öklid topolojisinin analizi bizi "topoloji için taban" kavramına götürür. Lineer cebir alanında her vektör uzayının bir tabana sahip olduğunu ve her vektörün, taban elemanlarının bir lineer birleşimi olduğunu öğreniriz. Benzer şekilde, topolojik uzayda her açık küme taban üyelerinin bir birleşimi olarak ifade edilebilir. Gerçekten de bir küme açıktır ancak ve ancak taban elemanlarının bir birleşimidir.

Bu bölümü anlamak için, A 1.1; yani Ek 1'in ilk bölümünün içeriğine aşina olmak gerekir. Bu bilgiler Youtube'da bulunan http://youtu.be/9h83ZJeiecg & http://youtu.be/QPSRB4Fhzko; Youku'da bulunan http://tinyurl.com/m4dlzhh & http://tinyurl.com/kf9lp8e; "Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory" videoları ve http://www.topologywithouttears.net linki ile desteklenmektedir.

2.1 $\mathbb{R}$ Üzerinde Öklid Topolojisi

2.1.1 Tanım. $\mathbb{R}$'nin bir S alt kümesi aşağıdaki özelliğe sahipse **$\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi**'nde açıktır denir;

$(*)$ Her bir $x \in S$ ve $a < b$ için $x \in (a, b) \subseteq S$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ vardır.

Gösterim. Topolojiyi özel olarak belirtmeksizin $\mathbb{R}$ topolojik uzayından bahsettiğimizde $\mathbb{R}$ ile Öklid topolojisini kastedeceğiz.

2.1.2 Uyarılar. (i) $\mathcal{T}$ "Öklid Topolojisi" bir topolojidir.

İspat.

$\mathcal{T}$'nun Tanımlar 1.1.1'in (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağladığını göstermemiz isteniyor.

Bize verilen ise bir kümenin $\mathcal{T}$'nun elemanı olması için gerek ve yeter şartın $*$ özelliğine sahip olmasıdır.

İlk olarak, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ olduğunu göstereceğiz. $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a = x - 1$ ve $b = x + 1$ alırsak $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olur, yani $\mathbb{R}$, $*$ özelliğine sahip olur ve böylece $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$'dır. İkinci olarak, $\emptyset$'nin $*$ özelliğine sahip olduğu varsayıldığı için $\emptyset \in \mathcal{T}$'dır.

Şimdi, herhangi J indis kümesi için $\{A_j : j \in J\}$, $\mathcal{T}$'nun elemanlarının bir sınıfı olsun. O zaman $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$ olduğunu yani $\bigcup_{j \in J} A_j$ 'nin $*$ özelliğine sahip olduğunu göstermeliyiz. $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$ olsun. Öyleyse herhangi $k \in J$ için $x \in A_k$'dır. $A_k \in \mathcal{T}$ olduğundan $a < b$ olmak üzere $x \in (a, b) \subseteq A_k$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de a ve b vardır. $k \in J$ olduğundan $A_k \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$'dir ve böylece $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ olur. O halde $\bigcup_{j \in J} A_j$, $*$ özelliğine sahiptir ve bu yüzden istenildiği gibi $\mathcal{T}$'dadır.

Son olarak, A_1 ve A_2 kümeleri $\mathcal{T}$'da olsun. $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ olduğunu kanıtlamalıyız. Öyseyle $y \in A_1 \cap A_2$ alalım. Buradan $y \in A_1$ olur. $A_1 \in \mathcal{T}$ olduğundan $a < b$ olmak üzere $y \in (a, b) \subseteq A_1$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de a ve b vardır. Ayrıca $y \in A_2 \in \mathcal{T}$'dır. O halde $c < d$ olmak üzere $y \in (c, d) \subseteq A_2$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de c ve d vardır. Kabul edelim ki e, a ve c'den daha büyük ve f ise b ve d'den daha küçük olsun. $e < y < f$ olduğu kolayca görülür ve böylece $y \in (e, f)$ olur. $(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_1$ ve $(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_2$ olduğundan $y \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$'dır. Dolayısıyla $A_1 \cap A_2$, $*$ özelliğine sahiptir ve böylece $\mathcal{T}$'dadır.

O halde $\mathcal{T}$ gerçekten $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir. $\square$

Şimdi, $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisinde açık ve kapalı kümeleri tanımlayarak devam edelim. Özellikle, tüm açık aralıkların gerçekte bu topolojide açık kümeler ve tüm kapalı aralıkların da kapalı kümeler olduğunu göreceğiz.

(ii) $r < s$ olmak üzere $r, s \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{T}$ Öklid topolojisinde (r, s) açık aralığı gerçekten de $\mathcal{T}$'dadır ve böylece açık kümedir.

İspat.

Bize (r, s) açık aralığı verilmiştir.

Bizden istenen ise (r, s)'nin Öklid topolojisinde açık olduğunu, yani (r, s)'nin Tanım 2.1.1'deki $(*)$ özelliğine sahip olduğunu göstermemizdir.

Bu yüzden $x \in (r, s)$ alarak başlamalıyız. $a < b$ olmak üzere $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de a ve b bulmak istiyoruz.

$x \in (r, s)$ olsun. $a = r$ ve $b = s$ seçelim. O zaman açıkça

$$x \in (a, b) \subseteq (r, s)$$

olur. Dolayısıyla (r, s) açık aralığı Öklid topolojisinde açık bir kümedir. $\square$

(iii) Tüm r gerçel sayıları için (r, ∞) ve $(-\infty, r)$ açık aralıkları $\mathbb{R}$'de açık kümedir.

İspat.

Öncelikle, (r, ∞) açık aralığının bir açık küme; yani bu aralığın $(*)$ özelliğine sahip olduğunu göstermeliyiz.

Bunu göstermek için $x \in (r, \infty)$ alalım ve

$$x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ bulalım.

$x \in (r, \infty)$ olsun. $a = r$ ve $b = x + 1$ alalım. O zaman $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$ ve böylece $(r, \infty) \in \mathcal{T}$ olur.

Benzer bir akıl yürütme ile $(-\infty, r)$ açık aralığı da $\mathbb{R}$'de açık kümedir. $\square$

(iv) $\mathbb{R}$'de her açık aralık, açık küme iken tersinin doğru olmadığını not etmek önemlidir. $\mathbb{R}$'deki tüm açık kümeler aralıklar değildir. Örneğin, $(1,3) \cup (5,6)$ kümesi $\mathbb{R}$'de açık bir kümedir fakat açık bir aralık değildir. Hatta, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$ kümesi $\mathbb{R}$'de açık kümedir. □

(v) $c < d$ olmak üzere $\mathbb{R}$'deki her bir c ve d için $[c,d]$ kapalı aralığı $\mathbb{R}$'de açık küme değildir.[1]

İspat.

$[c,d]$ aralığının $(*)$ özelliğine sahip olmadığını göstermeliyiz.

Bunu yapmak için $(*)$ özelliğine sahip olan a, b noktaları var olmayacak şekilde herhangi bir x bulmak yeterlidir.

c ve d noktalarının $[c,d]$ aralığının çok özel noktaları oldukları aşikardır. Bu yüzden $x = c$ seçeceğiz ve istenilen özelliğe sahip a, b noktalarının var olmadığını göstereceğiz.

Çelişki yoluyla ispat adı verilen ispat yöntemini kullanalım. Varsayalım istenilen özelliğe sahip a ve b var olsun. Bunun çelişkiye yol açtığı gösterelim.

Sonuç olarak varsayım yanlıştır! Dolayısıyla böyle a ve b yoktur. Bu yüzden $[c,d]$, $(*)$ özelliğine sahip değildir ve böylece açık küme değildir.

$c \in [c,d]$ alıp inceleyelim. Varsayalım $a < b$ olmak üzere $c \in (a,b) \subseteq [c,d]$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de a ve b var olsun. O halde $c \in (a,b)$ olması $a < c < b$ olmasını ve böylece $a < \frac{c+a}{2} < c < b$ olmasını gerektirir. Buradan $\frac{c+a}{2} \in (a,b)$ ve $\frac{c+a}{2} \notin [c,d]$ olur. Dolayısıyla $(a,b) \not\subseteq [c,d]$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $c \in (a,b) \subseteq [c,d]$ olacak şekilde a ve b yoktur. Dolaysıyla $[c,d]$, $(*)$ özelliğine sahip değildir ve böylece $[c,d] \notin \mathcal{T}$ bulunur. □

(vi) $a < b$ olmak üzere $\mathbb{R}$'de her bir a ve b için $[a,b]$ kapalı aralığı, $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisinde bir kapalı kümedir.

[1] Çelişki yoluyla ispat konusunu ele alan "Topology Without Tears - Video 4c - Writing Proofs in Mathematics" YouTube videosunu izlemelisiniz. Bkz. http://youtu.be/T4384JAS3L4.

İspat. Kapalı olduğunu görmek için sadece, iki açık kümenin birleşimi olarak yazılan, tümleyeni $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$'nin bir açık küme olduğunu göstermemiz gerekmektedir. □

(vii) Her bir $\{a\}$ tek nokta kümesi $\mathbb{R}$'de kapalıdır.

İspat. $\{a\}$'nın tümleyeni $(-\infty, a)$ ile (a, ∞) açık kümelerinin birleşimidir ve dolayısıyla açıktır. O halde $\{a\}$ istenildiği gibi $\mathbb{R}$'de kapalıdır.

[Alıştırmalar 1.3 #3'ün terminolojisinde bu sonuç $\mathbb{R}$'nin bir T_1-uzayı olduğunu göstermektedir.] □

(viii) Basitçe "$a < b$" eşitsizliğini "$a \leq b$" ile yer değiştirerek (vii)'yi (vi)'ye dahil edebileceğimize dikkat edelim. $\{a\}$ tek nokta kümesi sadece $[a, b]$ kapalı aralığının dejenere durumudur. □

(ix) Tüm tam sayıların kümesi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesidir.

İspat. $\mathbb{Z}$'nin tümleyeni $\mathbb{R}$'nin $(n, n+1)$ açık alt kümelerinin birleşimi olup $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$'dir ve bu yüzden $\mathbb{R}$'de açıktır. Sonuç olarak $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'de kapalıdır. □

(x) Tüm rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin ne açık ne kapalı bir alt kümesidir.

İspat.

$\mathbb{Q}$'nun açık bir küme olmadığını $(*)$ özelliğine sahip olmadığını kanıtlayarak göstereceğiz.

Bunu yapmak için, $\mathbb{Q}$'nun $a < b$ olacak şekilde herhangi bir (a, b) aralığını kapsamadığını göstermek yeterlidir.

Varsayalım $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$ olsun. Herhangi iki farklı reel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır. (Bunu kanıtlayabilir misiniz?) Bu nedenle, $c \notin \mathbb{Q}$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır. Bu $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$ ile çelişir. Dolayısıyla, $\mathbb{Q}$ herhangi bir (a, b) aralığını içermez ve bu yüzden açık bir küme değildir.

$\mathbb{Q}$'nun kapalı bir küme olmadığını kanıtlamak için $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nun açık bir küme olmadığını göstermek yeterlidir. Herhangi iki farklı reel sayı arasında bir rasyonel sayı olduğunu kullanarak $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nin $a < b$ olmak üzere herhangi bir (a, b) aralığını içermediğini görürüz. Böylece $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de açık değildir ve dolayısıyla $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de kapalı değildir. □

(xi) Bölüm 3'de $\mathbb{R}$'nin hem açık hem kapalı alt kümelerinin sadece aşikar olanlar, yani $\mathbb{R}$ ve $\emptyset$ olduğunu kanıtlayacağız. $\square$

Alıştırmalar 2.1

1. $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için ne $[a, b)$ ne de $(a, b]$'nin $\mathbb{R}$'nin açık alt kümesi olmadıklarını ispatlayınız. Ayrıca $\mathbb{R}$'nin kapalı alt kümesi de olmadıklarını gösteriniz.
2. $[a, \infty)$ ve $(-\infty, a]$ kümelerinin $\mathbb{R}$'nin kapalı alt kümeleri olduklarını ispatlayınız.
3. Bir örnekle $\mathbb{R}$'nin sonsuz sayıda kapalı alt kümelerinin birleşiminin $\mathbb{R}$'nin kapalı alt kümesi olması gerekmediğini gösteriniz.
4. Aşağıdaki ifadelerin her birini ispatlayınız.
   (i) Tüm tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'nin açık alt kümesi değildir.
   (ii) Tüm asal sayılar kümesi S, $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesidir fakat açık bir alt kümesi değildir.
   (iii) Tüm irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$'nin ne açık ne de kapalı bir alt kümesidir.
5. Eğer F, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan sonlu bir alt kümesi ise F, $\mathbb{R}$'de kapalıdır fakat açık değildir, gösteriniz.
6. Eğer F, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan sayılabilir bir alt kümesi ise F açık küme değildir fakat F'nin seçimine bağlı olarak F kapalı bir küme olabilir ya da olmayabilir, ispatlayınız.
7. (i) $S = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$ olsun. S kümesinin $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisinde kapalı olduğunu ispatlayınız.
   (ii) $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$ kümesi $\mathbb{R}$'de kapalı mıdır?
   (iii) $\{\sqrt{2},\, 2\sqrt{2},\, 3\sqrt{2}, \ldots, n\sqrt{2}, \ldots\}$ kümesi $\mathbb{R}$'de kapalı mıdır?
8. (i) $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in bir S alt kümesi sayılabilir sayıda kapalı kümelerin birleşimi ise **F_σ-küme** olarak adlandırılır. Tüm (a, b) açık ve tüm $[a, b]$ kapalı aralıklarının $\mathbb{R}$'de F_σ-kümeler olduklarını ispatlayınız. .
   (ii) $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in bir T alt kümesi sayılabilir sayıda açık kümelerin kesişimi ise **G_δ-küme** olarak adlandırılır. Tüm (a, b) açık ve tüm $[a, b]$ kapalı aralıklarının $\mathbb{R}$'de G_δ-kümeler olduklarını ispatlayınız.
   (iii) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin $\mathbb{R}$'de bir F_σ-küme olduğunu ispatlayınız. (Alıştırmalar 6.5#3'da $\mathbb{Q}$'nun bir G_δ-küme $\boxed{\text{olmadığını}}$ ispatladık.)
   (iv) Bir F_σ-kümesinin tümleyeninin G_δ-kümesi ve bir G_δ-kümesinin tümleyeninin F_σ-kümesi olduğunu doğrulayınız.

2.2 Bir Topoloji için Taban

Uyarılar 2.1.2, $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisini tanımlamamıza çok daha uygun bir biçimde imkan vermektedir. Bunu yapmak için, topoloji tabanı kavramını tanıtalım.

2.2.1 Önerme. $\mathbb{R}$'nin bir S alt kümesi açıktır ancak ve ancak S kümesi açık aralıkların birleşimidir.

İspat.

Bizden ispatlamamız istenen; S açıktır ancak ve ancak S açık aralıkların birleşimidir, yani

(i) eğer S açık aralıkların birleşimi ise S açık kümedir ve

(ii) eğer S açık küme ise açık aralıkların birleşimidir.

Varsayalım ki S açık aralıkların birleşimi olsun, yani j herhangi J indis kümesine ait iken $S = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$ olacak şekilde (a_j, b_j) açık aralıkları var olsun. Uyarılar 2.1.2 (ii)'den her bir (a_j, b_j) açık aralığı bir açık kümedir. Böylece S kümesi açık kümelerin birleşimidir ve bu yüzden S kümesi açık bir kümedir.

Tersine, S kümesinin $\mathbb{R}$'de açık olduğunu varsayalım. Her bir $x \in S$ için $x \in I_x \subseteq S$ olacak şekilde $I_x = (a, b)$ aralığı vardır. Şimdi $S = \bigcup_{x\in S} I_x$ olduğunu iddia edelim.

Bizden S ve $\bigcup_{x\in S} I_x$ kümelerinin eşit olduğunu göstermemiz isteniyor.

Bu kümelerin eşitliği,

(i) eğer $y \in S$ ise $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, ve

(ii) eğer $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$ ise $z \in S$,

olduğu ispatlanarak gösterilir.

[(ii) ifadesi $\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$ ifadesine eşdeğer iken (i) ifadesi $S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$ ifadesine eşdeğerdir.]

İlk olarak, $y \in S$ olsun. Bu durumda $y \in I_y$'dir. Böylece istendiği gibi $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$ olur. İkinci olarak, $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$ olsun. O zaman herhangi $t \in S$ için $z \in I_t$ olur. Her bir $I_x \subseteq S$ olduğundan $I_t \subseteq S$ olduğunu görürüz ve buradan $z \in S$'dır. Dolayısıyla, $S = \bigcup_{x \in S} I_x$'dir ve istenildiği gibi S açık aralıkların bir birleşimidir. □

Yukarıdaki önerme $\mathbb{R}$'nin topolojisini tanımlamak için tüm (a, b) açık aralıklarının açık kümeler olduğunu söylemenin yeterli olduğunu bildirir. Diğer her açık küme bu açık kümelerin bir birleşimidir. Bu ise bizi sıradaki tanıma götürür.

2.2.2 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her açık küme X'in açık alt kümelerinin bir sınıfı olan $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimi ise $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ topolojisi için bir topoloji **tabanı**dır.

$\mathcal{B}$, bir X kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban ise X'in U alt kümesi $\mathcal{T}$'dadır ancak ve ancak U, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimidir. Böylece $\mathcal{B}$ aşağıdaki anlamda $\mathcal{T}$ topolojisini "üretir". $\mathcal{B}$'nın elemanlarının hangi kümeler olduğu belirtilirse $\mathcal{T}$'nun elemanlarını belirleyebiliriz. Bunlar sadece $\mathcal{B}$'nın elemanlarının birleşimi olan tüm kümelerdir.

2.2.3 Örnek. $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ olsun. Bu durumda Önerme 2.2.1'e göre $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi için bir tabandır. □

2.2.4 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık uzay ve $\mathcal{B}$, X'in tüm tek nokta alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Yani $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ olsun. Bu durumda Önerme 1.1.9'a göre $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ topolojisi için bir tabandır. □

2.2.5 Örnek. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$ olduğu için $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$, $\mathcal{T}_1$ için bir tabandır ve $\mathcal{T}_1$'in tüm elemanları, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimi olarak ifade edilebilir. ($\emptyset$'nin, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının boş birleşimi olduğuna dikkat ediniz.)

$\mathcal{T}_1$'in bizzat kendisinin de, $\mathcal{T}_1$ için bir taban olduğuna dikkat ediniz. □

2.2.6 Uyarı. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ise $\mathcal{B}=\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ topolojisi için bir tabandır. Örneğin, X'in tüm alt kümelerinin kümesi X üzerindeki ayrık topoloji için bir taban oluşturur.

Buna binaen görülür ki aynı topoloji için pek çok farklı taban olabilir. Gerçekten de $\mathcal{B}$, bir X kümesi üzerindeki bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban ve $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{T}$ olmak üzere X'in alt kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{B}_1$ ise $\mathcal{B}_1$ sınıfı da $\mathcal{T}$ için bir tabandır. [Bunu doğrulayınız.] □

"Bir topoloji için taban" kavramı yukarıda belirtildiği gibi topolojileri tanımlamamızı sağlar. Bununla birlikte aşağıdaki örnek dikkatli olmamız gerektiğini göstermektedir.

2.2.7 Örnek. $X=\{a,b,c\}$ ve $\mathcal{B}=\{\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$, X herhangi topoloji için bir taban değildir. Bunu görmek için, $\boxed{\text{varsayalım}}$ $\mathcal{B}$, bir $\mathcal{T}$ topolojisi için taban olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$'daki kümelerin tüm birleşimlerini içerir; yani

$$\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

olur. (Bir kez daha $\emptyset$'nin $\mathcal{B}$'nın elemanlarının boş bir birleşimi olduğu bilgisini kullanalım ve böylece $\emptyset\in\mathcal{T}$'dir.)

Ancak bununla birlikte $\{b\}=\{a,b\}\cap\{b,c\}$ kümesi $\mathcal{T}$'da olmadığı ve böylece $\mathcal{T}$, Tanımlar 1.1.1'in (iii) özelliğini sağlamadığı için $\mathcal{T}$ bir topoloji değildir. Bu bir çelişkidir ve bu yüzden bizim varsayımımız yanlıştır. Böylece X üzerinde herhangi bir topoloji için taban $\boxed{\text{değildir}}$. □

Öyleyse bir soru soralım; $\mathcal{B}$, X'in alt kümelerinin bir sınıfı ise $\mathcal{B}$ hangi koşullar altında bir topoloji için bir taban oluşturur? Bu soru Önerme 2.2.8 ile cevaplanmaktadır.

2.2.8 Önerme. X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{B}$, X'in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topoloji için tabandır ancak ve ancak $\mathcal{B}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(a) $X = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$ ve

(b) herhangi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathcal{B}$'nin elemanlarının bir birleşimidir.

İspat. $\mathcal{B}$ bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban ise $\mathcal{T}$ topolojisi Tanımlar 1.1.1'in (i),(ii) ve (iii) özelliklerini sağlamalıdır. Özel olarak X açık bir küme olmalı ve herhangi iki açık kümenin kesişimi de açık bir küme olmalıdır. Açık kümeler sadece $\mathcal{B}$'nın elemanlarının birleşimleri olduğu için bu durum yukarıdaki (a) ve (b)'nin doğru olmasını gerektirir.

Tersine $\mathcal{B}$, (a) ve (b) özelliklerine sahip olduğunu varsayalım ve $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının birleşimi olan X'in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{T}$'nun üzerinde bir topoloji olduğunu göstereceğiz. (Eğer öyleyse $\mathcal{B}$ açıkça bu $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban olur ve önerme doğrudur.)

(a)'dan $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ olup $X \in \mathcal{T}$'dir. $\emptyset$, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının boş birleşimi olduğuna ve buradan $\emptyset \in \mathcal{T}$ olduğuna dikkat ediniz. Böylece $\mathcal{T}$'nun Tanımlar 1.1.1'in (i) özelliğine sahip olduğunu görürüz.

Şimdi, $\mathcal{T}$'nun elemanlarının bir sınıfı $\{T_j\}$ olsun. O zaman her bir T_j, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimidir. Dolayısıyla tüm T_j'lerin birleşimi de $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimidir ve buradan da $\mathcal{T}$'nun elemanıdır. Böylece $\mathcal{T}$, Tanımlar 1.1.1'in (ii) koşulunu sağlamaktadır.

Son olarak C ve D, $\mathcal{T}$'nun elemanı olsun. $C \cap D \in \mathcal{T}$olduğunu doğrulamalıyız. Fakat herhangi K indis kümesi ve $B_k \in \mathcal{B}$ kümeleri için $C = \bigcup_{k\in K} B_k$'dir. Ayrıca herhangi J indis kümesi ve $B_j \in \mathcal{B}$ kümeleri için $D = \bigcup_{j\in J} B_j$'dir. Bu nedenle

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{k\in K,\, j\in J} (B_k \cap B_j)$$

dir.

$C \cap D$ için iki ifadenin de gerçekten eşit olduğunu doğrulamanız gerekir!

Sonlu olması durumunda bu

$$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4)$$

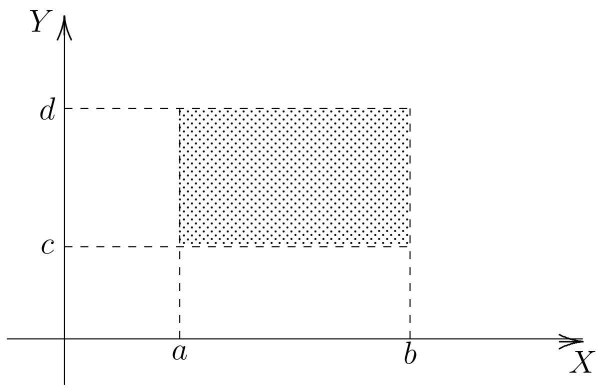
benzeri ifadeleri içerir.

(b) varsayımımıza göre her bir $B_k \cap B_j$ kümesi $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimidir ve bu yüzden $C \cap D$, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimidir. Böylece $C \cap D \in \mathcal{T}$ olur. O halde $\mathcal{T}$, Tanımlar 1.1.1'in (iii) özelliğine sahiptir. Sonuç olarak $\mathcal{T}$ gerçekten de bir topolojidir ve $\mathcal{B}$ bu topoloji için istenildiği gibi bir tabandır. $\square$

Önerme 2.2.8 çok kullanışlı bir sonuçtur. Bu, bir taban yazarak basitce topolojiler tanımlamamızı sağlar. Çoğu kez tüm açık kümeleri tanımlamaya çalışmaktan daha kolaydır.

Şimdi düzlem üzerindeki topolojiyi tanımlarken bu önermeyi kullanacağız. Bu topoloji "Öklid topolojisi" olarak bilinir.

2.2.9 Örnek. $\mathcal{B}$, düzlemde her bir kenarı X- veya Y-eksenlerine paralel olan "açık dikdörtgenler" sınıfı olan $\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b,\ c < y < d\}$ kümesi olsun.



Bu durumda $\mathcal{B}$, düzlemde bir topoloji için bir taban oluşturur. Bu topoloji Öklid topolojisi olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}^2$ sembolünü her kullandığımızda düzlemi ve eğer $\mathbb{R}^2$'ye topolojik uzay olarak başvuruyorsak topolojinin ne olduğu açıkça söylenmeden Öklid topolojisi ile birlikte düzlemi kastetmekteyiz.

Gerçekten $\mathcal{B}$'nın bir topoloji için bir taban olduğunu görmek için (i) düzlemin tüm açık dikdörtgenlerin bir birleşimi olduğuna ve (ii) herhangi iki dikdörtgenin arakesitinin bir dikdörtgen olduğuna dikkat ediniz. ["Dikdörtgen" ile kenarları eksenlere paralel olan çekli kastetmekteyiz.] Böylece Önerme 2.2.8'in koşulları sağlanır ve bundan dolayı $\mathcal{B}$ bir topoloji için tabandır. $\square$

2.2.10 Uyarı. Örnek 2.2.9'u genelleyerek her $n > 2$ tam sayısı için $\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$ üzerine bir topoloji nasıl konulduğunu görebiliriz. $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}^n$'nin kenarları eksenlere paralel olan tüm $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ alt kümlerinin sınıfı olsun. Bu $\mathcal{B}$ sınıfı $\mathbb{R}^n$ üzerinde **Öklid topolojisi** için taban oluşturur. $\square$

Alıştırmalar 2.2

1. Bu alıştırmada $\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2<1\}$ yuvarının $\mathbb{R}^2$'nin bir açık alt kümesi olduğunu ve akabinde düzlemde her açık yuvarın bir açık küme olduğunu ispat edeceksiniz.

   (i) $\langle a,b\rangle$, $D=\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2<1\}$ yuvarı içinde herhangi bir nokta olsun. $r=\sqrt{a^2+b^2}$ alalım. $R_{\langle a,b\rangle}$ köşeleri $\langle a\pm\frac{1-r}{8}\,,\,b\pm\frac{1-r}{8}\rangle$ noktaları olan açık dikdörtgen olsun. $R_{\langle a,b\rangle}\subset D$ olduğunu doğrulayınız.

   (ii) (i)'yi kullanarak
   $$D=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D} R_{\langle a,b\rangle}$$
   olduğunu gösteriniz.

   (iii) (ii)'yi kullanarak D'nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde açık küme olduğu sonucuna ulaşınız.

   (iv) Her $\{\langle x,y\rangle : (x-a)^2+(y-b)^2<c^2,\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ yuvarının $\mathbb{R}^2$'de açık olduğunu gösteriniz.

2. Bu alıştırmada $\mathbb{R}^2$'deki tüm açık yuvarların sınıfının $\mathbb{R}^2$ üzerindeki topoloji için bir taban olduğunu göstereceksiniz. [Daha sonra bu topolojinin Öklid topolojisi olduğunu göreceğiz.]

   (i) $\mathbb{R}^2$'de $D_1\cap D_2\neq\emptyset$ olmak üzere D_1 ve D_2 herhangi açık yuvarlar olsun. Eğer $\langle a,b\rangle$, $D_1\cap D_2$'de herhangi nokta ise $D_{\langle a,b\rangle}\subset D_1\cap D_2$ olmak üzere merkezi $\langle a,b\rangle$ olan bir $D_{\langle a,b\rangle}$ açık yuvarının var olduğunu gösteriniz.
   [İpucu. Bir şekil çiziniz ve Alıştırma 1(i)'nin benzeri bir yöntem kullanınız.]

   (ii) $D_1\cap D_2=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D_1\cap D_2} D_{\langle a,b\rangle}$ olduğunu gösteriniz.

   (iii) (ii) ve Önerme 2.2.8'yi kullanarak, $\mathbb{R}^2$'deki tüm açık yuvarların sınıfının $\mathbb{R}^2$ üzerinde topoloji için bir taban oluşturduğunu ispatlayınız.

3. $\mathcal{B}$, a ve b rasyonel sayılar ve $a<b$ olmak üzere $\mathbb{R}$'deki tüm (a,b) açık aralıklarının sınıfı olsun. $\mathcal{B}$'nın $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi için bir taban olduğunu ispatlayınız. [a ve b rasyonel sayı olmak zorunda değilken Önerme 2.2.1 ile Örnek 2.2.3'ü karşılaştırınız.]

   [İpucu. Önerme 2.2.8, $\mathcal{B}$'nın sadece Öklid topolojisi için bir taban değil de <u>herhangi</u> bir topoloji için taban olduğunu göstereceğinden onu kullanmayınız.]

4. Eğer bir $\mathcal{T}$ topolojisi için sayılabilir sayıda kümelerden oluşan bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayına **ikinci sayılabilirlik aksiyomu**nu sağlıyor veya **ikinci sayılabilir**dir denir.
   (i) Yukarıdaki Alıştırma 3'ü kullanarak, $\mathbb{R}$'nin ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlandığını gösteriniz.
   (ii) Sayılamaz bir küme üzerinde ayrık topolojinin ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlamadığını ispatlayınız.
   [İpucu. Belirli bir tabanın sayılamaz olduğunu göstermek yeterli değildir. Bu topoloji için $\boxed{\text{her}}$ tabanın sayılamaz olduğunu kanıtlamak zorundasınız.]
   (iii) Her pozitif n tam sayısı için $\mathbb{R}^n$'nin ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağladığını ispatlayınız.
   (iv) $(X,\mathcal{T})$ sonlu-kapalı topoloji ile birlikte tüm tam sayılar kümesi olsun. $(X,\mathcal{T})$ uzayı ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlar mı?

5. Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.
   (i) $m \neq 0$ olmak üzere m ve c reel sayılar olsun. $L = \{\langle x,y\rangle : y = mx + c\}$ doğrusu $\mathbb{R}^2$'nin kapalı alt kümesidir.
   (ii) $\mathbb{S}^1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ile verilen birim çember $\mathbb{S}^1$ olsun. $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2$'nin kapalı alt kümesidir.
   (iii) $\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ ile verilen birim n-küre $\mathbb{S}^n$ olsun. $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$'nin kapalı alt kümesidir.
   (iv) $B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ ile verilen birim n-yuvarı B^n olsun. B^n, $\mathbb{R}^n$'nin kapalı alt kümesidir.
   (v) $C = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ eğrisi $\mathbb{R}^2$'nin kapalı alt kümesidir.

6. $\mathcal{B}_1$, bir X kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_1$ topolojisi için taban ve $\mathcal{B}_2$, bir Y kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_2$ topolojisi için taban olsun. $X \times Y$ kümesi $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere $\langle x,y\rangle$ sıralı ikililerden oluşur. $\mathcal{B}$, $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ve $B_2 \in \mathcal{B}_2$ olmak üzere tüm $B_1 \times B_2$ kümelerinden oluşan $X \times Y$'nin alt kümelerinin sınıfı olsun. $\mathcal{B}$'nın $X \times Y$ üzerinde bir topoloji için tabanı olduğunu ispatlayanız. Bu şekilde tanımlanmış topolojiye $X \times Y$ üzerinde **çarpım topolojisi** denir.
   [İpucu. Bkz. Örnek 2.2.9.]

7. Yukarıdaki Örnek 3 ve Örnekler 2.1 #8'i kullanarak $\mathbb{R}$'nin her açık alt kümesinin bir F_σ-kümesi ve bir G_δ-kümesi olduğunu ispatlayınız.

2.3 Verilen bir Topoloji için Taban

Önerme 2.2.8, bir X kümesinin alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ sınıfının hangi koşullar altında X üzerindeki $\boxed{\text{herhangi}}$ bir topoloji için taban olduğu bildirmektedir. Ancak bazen X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi $\boxed{\text{verilir}}$ ve $\mathcal{B}$'nın bu belirli $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban olup olmadığını bilmek isteriz. $\mathcal{B}$'nın $\mathcal{T}$ için bir taban olduğunun sağlatılması için basitçe Tanım 2.2.2'yi uygulayabilir ve $\mathcal{T}$'nun her elemanının $\mathcal{B}$'daki elemanların bir birleşimi olduğunu gösterebiliriz. Bununla birlikte Önerme 2.3.2 bize alternatif bir yöntem sunmaktadır.

Fakat öncelikle X'in alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ sınıfının $\boxed{\text{herhangi}}$ bir topoloji için taban olduğunu söylemek ile $\boxed{\text{verilen}}$ bir topoloji için taban olduğu söylemek arasındaki farkı gösteren bir örnek verelim.

2.3.1 Örnek. $a < b$ ve $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$ olmak üzere tüm $(a, b]$ yarı-açık aralıklarının bir sınıfı $\mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimi ve her iki yarı-açık aralığın kesişimi de yarı-açık aralık olduğundan $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki bir topoloji için bir tabandır.

Buna rağmen $\mathcal{B}$ tabanına sahip olan $\mathcal{T}_1$ topolojisi Öklid topolojisi <u>değildir</u>. Bunu $(a, b]$'nin Öklid topolojisi ile verilen $\mathbb{R}$'de açık küme olmamasına rağmen, $\mathcal{T}_1$ topolojisi ile verilen $\mathbb{R}$'de açık küme olduğunu gözlemleyerek görebiliriz. (Bkz. Örnekler 2.1 #1). Yani $\mathcal{B}$ <u>bazı topolojiler</u> için tabandır fakat $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi için taban değildir. $\square$

2.3.2 Önerme. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay olsun. X'in açık alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ sınıfı $\mathcal{T}$ için bir tabandır ancak ve ancak herhangi U açık kümesinin herhangi x noktası için $x \in B \subseteq U$ olmak üzere $B \in \mathcal{B}$'dir.

İspat.

Bizden ispatlamamızı istenen aşağıdadır;
(i) eğer $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ için bir taban ve $x \in U \in \mathcal{T}$ ise $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır,

ve

(ii) eğer her bir $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ için bir tabandır.

Kabul edelim ki $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ için bir taban ve $x \in U \in \mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ için bir taban olduğu için U açık kümesi $\mathcal{B}$'daki elemanların birleşimidir; yani herhangi J indis kümesindeki her bir j için $B_j \in \mathcal{B}$ iken $U = \bigcup_{j\in J} B_j$'dir. Bununla birlikte herhangi $j \in J$ için $x \in U$ olması $x \in B_j$ olmasını gerektirir. Böylece, istendiği gibi $x \in B_j \subseteq U$'dir.

Tersine, her bir $U \in \mathcal{T}$ ve her bir $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ var olduğunu varsayalım. Her açık kümenin $\mathcal{B}$'nın elemanlarının birleşimi olduğunu göstermeliyiz. Bu yüzden V herhangi bir açık küme olsun. Her bir $x \in V$ için $x \in B_x \subseteq V$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır. Açıkça $V = \bigcup_{x\in V} B_x$'dir. (Bunu doğrulayınız!). Böylece V, $\mathcal{B}$'nın elemanlarının bir birleşimidir. □

2.3.3 Önerme. $\mathcal{B}$, bir X kümesi üzerindeki bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban olsun. X'in bir U alt kümesi açıktır ancak ve ancak her bir $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır.

İspat. U, X'in herhangi bir alt kümesi olsun. Kabul edelim ki her bir $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde $B_x \in \mathcal{B}$ var olsun. Açıkça $U = \bigcup_{x\in U} B_x$'dir. Böylece U, açık kümelerin bir birleşimidir ve dolayısıyla açıktır. Aksi durum Önerme 2.3.2'den görülür. □

Önerme 2.3.3'de tanımlanan taban özelliğinin tam olarak $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisini $\boxed{\text{tanımlamak}}$ için kullandığımız özellik olduğuna dikkat ediniz. $\mathbb{R}$'nin bir U alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şartın her bir $x \in U$ için $a < b$ ve $x \in (a, b) \subseteq U$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de a ve b noktalarının var olması olduğunu ifade ettik.

Uyarı. Önerme 2.2.8 ile Önerme 2.3.2 arasındaki farkı kavradığınızdan emin olunuz. Önerme 2.2.8, bir X kümesi üzerindeki herhangi bir topoloji için bir taban oluşturacak şekilde X'in alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ sınıfı için koşulları verir. Bununla birlikte Önerme 2.3.2, verilen belli bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban oluşturacak şekilde bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ sınıfı için koşulları verir.

Bir topolojinin birçok farklı tabana sahip olduğunu gördük. Bir sonraki önerme X kümesindeki $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ tabanlarının ne zaman aynı topolojiyi tanımladığını ifade etmektedir.

2.3.4 Önerme. Boştan farklı bir X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojileri için tabanlar sırasıyla $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$'dir ancak ve ancak

(i) her $B \in \mathcal{B}_1$ ve her $x \in B$ için $x \in B' \subseteq B$ olacak şekilde bir $B' \in \mathcal{B}_2$ vardır, ve

(ii) her $B \in \mathcal{B}_2$ ve her $x \in B$ için $x \in B' \subseteq B$ olacak şekilde bir $B' \in \mathcal{B}_1$ vardır.

İspat.

Bizden göstermemiz istenen şudur: $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$'nin aynı topoloji için tabandır ancak ve ancak (i) ve (ii) doğrudur.

İlk olarak $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$'nin aynı topoloji, yani $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ için taban olduklarını varsayalım. (i) ve (ii) koşularının sağlandığını gösterelim.

Daha sonra (i) ve (ii)'nin sağlandığını varsayalım. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğunu gösterelim.

İlk olarak $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğunu varsayalım. Öyleyse (i) ve (ii), Önerme 2.3.2'den doğrudan görülür.

Tersine $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$'nin (i) ve (ii) koşullarını sağladığını varsayalım. Önerme 2.3.2'den dolayı (i) koşulu her bir $B \in \mathcal{B}_1$ kümesinin $(X, \mathcal{T}_2)$'de açık olmasını; yani $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$

olmasını gerektirir. $\mathcal{T}_1$'in her bir elemanı $\mathcal{T}_2$'nin elemanlarının bir birleşimi olduğundan $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olur. Benzer şekilde (ii) koşulu $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ olmasını gerektirir. Böylece istendiği gibi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olur. □

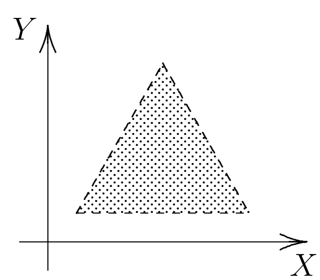
2.3.5 Örnek. X-eksenine paralel tabana sahip tüm "açık eşkenar üçgenlerin" kümesi $\mathcal{B}$'nın $\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklid topolojisi için bir taban olduğunu gösteriniz. ("Açık üçgen" ile sınırın dâhil olmadığını kastetmekteyiz.)

Taslak İspat. (Biz burada sadece resimsel bir kanıt verdik. Detaylı ispat size bırakılmıştır.)

Bizden $\mathcal{B}$'nın Öklid topolojisi için bir taban olduğunu göstermemiz isteniyor.

Önerme 2.3.4'ü uygulayacağız ancak ilk olarak $\mathcal{B}$'nın $\mathbb{R}^2$ üzerindeki herhangi bir topoloji için taban olduğunu göstermeliyiz.

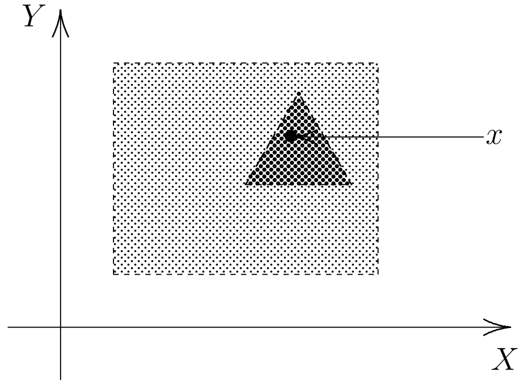
Bunu yapmak için $\mathcal{B}$'nın Önerme 2.2.8'i sağladığını göstermeliyiz.



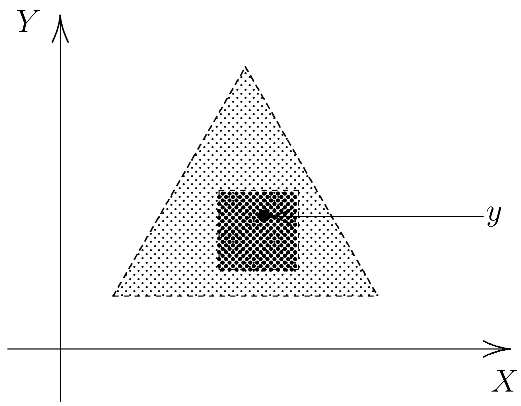
İlk gözlemlediğimiz, $\mathcal{B}$'nın herhangi bir topoloji için bir taban olduğudur çünkü $\mathcal{B}$, Önerme 2.2.8'in koşullarını sağlamaktadır. ($\mathcal{B}$'nın Önerme 2.2.8'in koşullarını sağladığını görebilmek için $\mathbb{R}^2$'nin X-eksenine paralel tabanlı bütün açık eşkenar üçgenlerin bir birleşimine eşit olduğunu ve bu şekildeki iki üçgenin arakesitinin yine bu şekilde diğer bir üçgen olduğunu gözlemleyiniz.)

Daha sonra Önerme 2.3.4'ün (i) ve (ii) koşularını sağladığını gösterelim.

Öncelikle (i) koşulunu kanıtlayalım. R eksenlere paralel olan kenarlara sahip açık bir dikdörtgen ve x, R içinde herhangi nokta olsun. $x \in T \subseteq R$ olacak şekilde X-eksenine paralel tabanlı açık bir T eşkenar üçgenin var olduğunu göstermek zorundayız. Şekilden bunu görmek kolaydır.



Son olarak Önerme 2.3.4'ün (ii) koşulunu doğrulayalım. T', X-eksenine paralel tabanlı açık bir eşkenar üçgen ve y, T' içinde herhangi nokta olsun. Bu durumda $y \in R' \subseteq T'$ olacak şekilde bir R' açık dikdörtgeni vardır. Yine bunu şekilden görmek kolaydır.



Böylece Önerme 2.3.4'ün koşulları sağlanır. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ gerçekten de $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir Öklid topolojisi için bir tabandır. □

Örnek 2.2.9'da Öklid topolojisi için tüm (kenarları eksenlere paralel olan) "açık dikdörtgenler"in sınıfı olacak şekilde bir taban tanımladık. Örnek 2.3.5 ise topoloji değişmeksizin "açık dikdörtgenler" ile (X-eksenine paralel tabanlı) "açık eşkenar üçgenler"in yer değiştirebilir olduğunu göstermektedir. Alıştırmalar 2.3 #1'de yukarıda parantez içindeki şartların topoloji değişmeksizin kaldırılabileceğini görmekteyiz. Ayrıca "açık dikdörtgenler" ile "açık yuvarlar"[2] değiştirebilir.

[2]Aslında pek çok kitap $\mathbb{R}^2$ üzerindeki topolojiyi açık yuvarlara dayandırarak tanımlamaktadır.

Alıştırmalar 2.3

1. Aşağıdaki sınıfların her birinin $\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklid topolojisi için bir taban olup olmadığını belirleyiniz:

   (i) eksenlere paralel kenarlı tüm "açık" karelerin sınıfı;

   (ii) tüm "açık" yuvarların sınıfı;

   (iii) tüm "açık" karelerin sınıfı;

   (iv) tüm "açık" dikdörtgenlerin sınıfı;

   (v) tüm "açık" üçgenlerin sınıfı.

2. (i) $\mathcal{B}$, boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban olsun. $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$ olmak üzere $\mathcal{B}_1$, X'in alt kümelerinin bir sınıfı ise $\mathcal{B}_1$'in de $\mathcal{T}$ için bir taban olduğunu ispatlayınız.

   (ii) (i)'den $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi için sayılamaz sayıda farklı tabanın var olduğu sonucunu çıkarınız.

3. $\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ olsun. Örnek 2.3.1'de görüldüğü gibi $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir tabandır ve $\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi $\boxed{\text{değildir}}$. Bununla birlikte her bir (a, b) aralığının $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$'da açık olduğunu gösteriniz.

4.* $[0, 1]$ üzerindeki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C[0, 1]$ olsun. .

   (i) $\mathcal{M} = \{M(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1]$ ve ε pozitif gerçel sayı$\}$ ve $M(f, \varepsilon) = \left\{g : g \in C[0, 1] \text{ ve } \int_0^1 |f - g| < \varepsilon\right\}$ olmak üzere $\mathcal{M}$ sınıfının $C[0, 1]$ üzerinde bir $\mathcal{T}_1$ topolojisi için bir taban olduğunu gösteriniz.

   (ii) $\mathcal{U} = \{U(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1]$ ve ε pozitif gerçel sayı$\}$ ve $U(f, \varepsilon) = \{g : g \in C[0, 1]$ ve $\sup_{x \in [0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon\}$ olmak üzere $\mathcal{U}$ sınıfının $C[0, 1]$ üzerinde bir $\mathcal{T}_2$ topolojisi için bir taban olduğunu gösteriniz.

   (iii) $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ olduğunu ispatlayınız.

5. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in açık alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{S}$ sınıfının elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinin sınıfı $\mathcal{T}$ için bir taban oluşturursa $\mathcal{S}$'ye $\mathcal{T}$ için bir **alt taban** denir.

   (i) (a, ∞) veya $(-\infty, b)$ biçimindeki tüm açık aralıkların sınıfının $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi için bir alt taban olduğunu ispatlayınız.

   (ii) Örnek 1.1.2'deki $\mathcal{T}_1$ topolojisi için $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$'nin alt taban olduğunu ispatlayınız.

6. $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için bir alt taban olsun. (Yukarıdaki Alıştırma 5'e bakınız.) $a < b$ olmak üzere tüm $[a, b]$ kapalı aralıkları $\mathcal{S}$'de ise $\mathcal{T}$'nun ayrık topoloji olduğunu ispatlayınız.

7. X boş olmayan küme ve $x \in X$ olmak üzere $\mathcal{S}$, tüm $X \setminus \{x\}$ kümelerinin sınıfı olsun. $\mathcal{S}$'nin X üzerindeki sonlu-kapalı topoloji için bir alt taban olduğunu ispatlayınız.

8. X herhangi sonsuz küme ve $\mathcal{T}$, X üzerinde ayrık topoloji olsun. $\mathcal{T}$ için $\mathcal{S}$, herhangi tek nokta kümelerini içermeyecek şekilde bir $\mathcal{S}$ alt tabanı bulunuz.

9. $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki tüm doğruların sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için alt taban ise bu topoloji nedir?

10. Düzlemdeki X-eksenine paralel olan tüm doğruların sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için alt taban ise $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$'daki açık kümeleri tanımlayınız.

11. Düzlemdeki tüm çemberlerin sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için alt taban ise $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$'daki açık kümeleri tanımlayınız.

12. Merkezleri X-ekseni üzerinde olan düzlemdeki tüm çemberlerin sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi için alt taban ise $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$'daki açık kümeleri tanımlayınız.

2.4 Dipnot

Bu bölümde, çok önemli bir topolojik uzay olan ve üzerinde Öklid topolojisi bulunan tüm gerçel sayıların kümesi $\mathbb{R}$'yi tanımladık ve onu incelemek için biraz zaman ayırdık. Bu topolojide açık aralıkların gerçekte açık kümeler (ve kapalı aralıkların kapalı kümeler) olduğunu gördük. Ancak bununla birlikte tüm açık kümeler açık aralıklar değildir. Buna rağmen $\mathbb{R}$'deki her açık küme açık aralıkların bir birleşimidir. Bu ise "bir topoloji için taban" kavramını tanıtmamıza ve $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi için bir tabanın tüm açık aralıkların sınıfı olduğunu tespit etmemize yol açtı.

Bölüm 1'in girişinde hata kabul etmeyen bir çıkarım olarak bir matematiksel ispatı betimledik ve ispat yazmanın önemini verdik. Bu bölümde Uyarılar 2.1.2 (v) ile birlikte bir diğer örnek olan Örnek 2.2.7'de çelişki yoluyla ispatı tanıttık. "Gerek ve yeter" şartların, yani "ancak ve ancak" koşulların ispatı Önerme 2.2.1 ile birlikte daha ileri örnekler olan Önermeler 2.2.8, 2.3.2, 2.3.3, ve 2.3.4'de açıkladık.

Topolojiler için tabanlar başlı başına önemli bir konudur. Örneğin, tüm tek nokta kümelerinin sınıfının ayrık topoloji için bir taban olduğunu gördük. Önerme 2.2.8 bir X kümesi üzerindeki $\boxed{\text{herhangi}}$ bir topoloji, X'in alt kümelerinin bir sınıfının taban oluşturması için gerek ve yeter şartları vermektedir. Bu X üzerinde $\boxed{\text{verilen}}$ bir topoloji için X'in alt kümelerinin bir sınıfının taban olması için gerek ve yeter şartları veren Önerme 2.3.2 ile karşılaştırıldı. İki farklı $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ sınıfının aynı topoloji için taban olabileceklerine dikkat çekildi. Bunun için gerek ve yeter şartlar Önerme 2.3.4 ile verildi.

Herhangi n pozitif tam sayısı için $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid topolojisini tanımladık. $\mathbb{R}^2$ için tüm açık yuvarların ailesi gibi tüm açık kareler ailesi ya da tüm açık dikdörtgenler ailesinin de bir taban olduğunu gördük.

Alıştırmalar üç farklı ilginç fikir sunmaktadır. Alıştırmalar 2.1 #8 ölçüm teorisinde önemli olan F_σ-kümesi ve G_δ-kümesi kavramlarını içermektedir. Alıştırmalar 2.3 #4 gerçel-değerli sürekli fonksiyonların uzayını tanıtmaktadır. Böyle uzaylara fonksiyonel analizdeki çalışmaların esas konusu olan fonksiyon uzayları denir. Fonksiyonel analiz, analiz (klasik) ve topolojinin bir harmanıdır ve bir süre modern analiz diye adlandırılmıştır, cf. Simmons [235]. Son olarak, Alıştırmalar 2.3 #5–12 alt taban kavramından bahsetmektedir.

Şu an itibariyle şu videoları izlemelisiniz:
Topology Without Tears - Video 1 - Pure Mathematics
Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory
Topology Without Tears - Video 4a & 4b &4c &4d - Writing Proofs in Mathematics
Bu videolara
http://www.topologywithouttears.net
linki ile YouTube ve Youku'dan ulaşılabilir.

Bölüm 3

Limit Noktalar

Giriş

Gerçel sayı doğrusu üzerinde "yakınlık" kavramı vardır. Örneğin $.1, .01, .001, .0001, .00001, \ldots$ dizisindeki her bir nokta 0'a bir öncekinden daha yakındır. Gerçekten de bazı bakımlardan 0 bu dizinin bir limit noktasıdır. O halde $(0, 1]$ aralığı 0 limit noktasını içermediğinden kapalı değildir. Bir genel topolojik uzayda "uzaklık fonksiyonu" bulunmamaktadır, dolayısıyla farklı bir biçimde ilerlemeliyiz. Limit noktası kavramını uzaklık kavramına başvurmaksızın tanımlayacağız. Hatta bu yeni limit noktası tanımımız yardımıyla 0 noktası hala $(0, 1]$'in bir limit noktası olacaktır. Limit noktası kavramının tanıtılması kapalı küme kavramının çok daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır.

Bu bölümde tanımlayacağımız bir diğer çok önemli kavram bağlantılılıktır. $\mathbb{R}$ topolojik uzayını göz önüne alalım. $[0, 1] \cup [2, 3]$ ve $[4, 6]$ kümelerinin her ikisinin de uzunluğu 2 olarak tanımlanmakla birlikte bunların farklı türde kümeler oldukları aşikârdır ... birincisi iki ayrık parçadan ve ikincisi sadece tek bir parçadan oluşur. İkisi arasındaki fark "topolojik"dir ve bağlantılılık kavramı kullanılarak açıklanacaktır.

Bu bölümü anlamak için Ek 1'in içeriğine aşina olmalısınız. Daha önceden de bahsedildiği gibi bu, YouTube'da
http://youtu.be/9h83ZJeiecg &
http://youtu.be/QPSRB4Fhzko;
Youku'da
http://tinyurl.com/m4dlzhh &
http://tinyurl.com/kf9lp8e;
ve
http://www.topologywithouttears.net
linklerinden ulaşabileceğiniz "Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory" videoları ile desteklenmektedir.

3.1 Limit Noktalar ve Kapanış

Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ise X kümesinin elemanları **noktalar** olarak ifade edilmektedir.

3.1.1 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi A olsun. Bir $x \in X$ noktasını içeren her U açık kümesi A kümesinin x'den farklı bir noktasını içeriyorsa x noktasına ***A* kümesinin** bir **limit noktası** (veya **yığılma noktası**) denir.

3.1.2 Örnek. $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ topoloji olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayını ve $A = \{a, b, c\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu durumda b, d ve e noktaları A kümesinin limit noktalarıdır, fakat a ve c, A kümesinin limit noktaları değildir.

İspat.

a noktası A kümesinin bir limit noktasıdır ancak ve ancak a'yı içeren her açık küme A kümesinin bir diğer noktası da içerir.

O halde a noktasının A kümesinin bir limit noktası $\boxed{\text{olmadığını}}$ göstermek için a'yı içeren fakat A kümesinin bir diğer noktasını içermeyen bir açık küme bulmak yeterlidir.

$\{a\}$ kümesi açıktır ve A kümesinin bir diğer noktasını içermez. Dolayısıyla a, A kümesinin bir limit noktası değildir.

$\{c, d\}$ kümesi c'yi içeren fakat A kümesinin bir diğer noktasını içermeyen bir açık kümedir. Bu nedenle c noktası A kümesinin bir limit noktası değildir.

b noktasının A kümesinin bir limit noktası olduğunu göstermek için b'yi içeren her açık kümenin A kümesinin b'den başka bir noktasını içerdiğini göstermeliyiz.

Bu durumu b'yi içeren $\boxed{\text{tüm}}$ açık kümeleri yazarak ve her birinin A kümesinin b'den başka bir noktasını içerdiğini doğrulayarak göstereceğiz.

b'yi içeren açık kümeler sadece X ve $\{b, c, d, e\}$'dir ve her ikisi de A kümesinin bir başka noktasını yani c'yi içermektedir. Dolayısıyla b, A kümesinin bir limit noktasıdır.

d noktası A'da bulunmamakla birlikte d yi içeren her açık küme A kümesinin bir diğer noktasını da içerdiğinden d, A kümesinin bir limit noktasıdır. Benzer şekilde e noktası da A kümesinin içinde değildir fakat A kümesinin bir limit noktasıdır. $\square$

3.1.3 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık uzay ve A kümesi X'in bir alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi A kümesinin x'den farklı hiçbir noktasını içermeyen bir açık küme olduğundan A kümesinin hiçbir limit noktası yoktur. $\square$

3.1.4 Örnek. $\mathbb{R}$'nin $A = [a, b)$ alt kümesini göz önüne alalım. Bu durumda $[a, b)$ içindeki her elemanın A'nın bir limit noktası olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca b noktası da A kümesinin bir limit noktasıdır. $\square$

3.1.5 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ ayrık olmayan bir uzay ve A, X'in en az iki elemana sahip bir alt kümesi olsun. Bu durumda X'in her noktası, A kümesinin bir limit noktasıdır. (Niçin A kümesinin en az iki noktası olduğu üzerinde durduk?) $\square$

Bir sonraki önerme, bir kümenin kapalı olup olmadığını test etmek için yararlı olacaktır.

3.1.6 Önerme. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının alt kümesi A olsun. Bu durumda A, $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında kapalıdır ancak ve ancak A limit noktalarının tümünü içerir.

İspat.

Bizden A kümesinin $(X, \mathcal{T})$'da kapalı olması için $\boxed{\text{gerek ve yeter şartın}}$ A kümesinin tüm limit noktalarını içermesi olduğunu ispatlamamız istenmektedir. Yani göstermemiz gerekenler şunlardır;

(i) eğer A kapalı küme ise tüm limit noktalarını içerir, $\boxed{\text{ve}}$

(ii) eğer A tüm limit noktalarını içeriyorsa kapalı bir kümedir.

A kümesinin $(X, \mathcal{T})$'da kapalı olduğunu kabul edelim. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ p noktası $X \setminus A$'ya ait olup A kümesinin limit olsun. Bu durumda $X \setminus A$, A kümesinin p limit noktasını içeren açık bir kümedir. Bu nedenle $X \setminus A$, A kümesinin bir elemanını içerir. Bunun yanlış olduğu aşikârdır ve böylece varsayımımızda bir çelişki vardır. Dolayısıyla A kümesinin her limit noktası A'ya ait olmalıdır.

Aksine A kümesinin tüm limit noktalarını içerdiğini kabul edelim. Her $z \in X \setminus A$ için kabulümüz $U_z \cap A = \emptyset$ olacak biçimde $U_z \ni z$ açık kümesinin var olmasını gerektirir, yani $U_z \subseteq X \setminus A$'dir. Böylece $X \setminus A = \bigcup_{z \in X \setminus A} U_z$ olur. (Kontrol ediniz!). Sonuç olarak $X \setminus A$ açık kümelerin bir birleşimidir ve böylece açıktır. Dolayısıyla $X \setminus A$ kümesinin tümleyeni olan A kapalıdır. □

3.1.7 Örnek. Önerme 3.1.6'nın uygulamaları olarak aşağıdaki sonuçları elde etmekteyiz:

(i) $[a, b)$ kümesi $\mathbb{R}$'de kapalı değildir. Çünkü b bir limit noktasıdır ve $b \notin [a, b)$'dır;

(ii) $[a, b]$ kümesi $\mathbb{R}$'de kapalıdır. Çünkü $[a, b]$'nin tüm limit noktaları (yani $[a, b]$'nin tüm elemanları) $[a, b]$ içerisindedir;

(iii) (a, b), $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesi değildir. Çünkü a limit noktasını içermez;

(iv) $[a, \infty)$, $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesidir. □

3.1.8 Önerme. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi A ve A kümesinin tüm limit noktalarının kümesi A' olsun. Bu durumda $A \cup A'$ kapalı bir kümedir.

İspat. Önerme 3.1.6'dan $A \cup A'$ kümesinin tüm limit noktalarını içerdiğini ya da buna denk olarak $X \setminus (A \cup A')$'nın hiçbir elemanının $A \cup A'$'nın bir limit noktası olmadığını göstermek yeterlidir.

$p \in X \setminus (A \cup A')$ olsun. $p \notin A'$ olduğundan $U \cap A = \{p\}$ ya da $U \cap A = \emptyset$ olacak şekilde p'yi içeren U açık kümesi vardır. Fakat $p \notin A$ olduğundan $U \cap A = \emptyset$'dır. Ayrıca $U \cap A' = \emptyset$ olduğunu da iddia etmekteyiz. U açık küme ve $U \cap A = \emptyset$ olduğundan $x \in U$ iken $x \notin A'$ olur. Dolayısıyla $U \cap A' = \emptyset$'dır. Yani $U \cap (A \cup A') = \emptyset$ ve $p \in U$'dir. Bu ise p'nin $A \cup A'$ kümesinin limit noktası olmadığı ve böylece $A \cup A'$ kümesinin kapalı olduğu anlamına gelir. $\square$

3.1.9 Tanım. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi A olsun. Bu durumda A ile onun tüm limit noktalarından oluşan $A \cup A'$ kümesine ***A* kümesinin kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

3.1.10 Uyarı. Önerme 3.1.8'den açıkça görülür ki $\overline{A}$ kapalı bir kümedir. Önerme 3.1.6 ve Alıştırmalar 3.1 #5 (i) göz önüne alınarak A kümesini kapsayan her kapalı küme aynı zamanda A' kümesini de kapsamalıdır. Dolayısıyla $A \cup A' = \overline{A}$ kümesi A kümesini içeren en küçük kapalı kümedir. Bu $\overline{A}$ kümesinin A'yı kapsayan tüm kapalı kümelerin kesişimi olmasını gerektirir. $\square$

3.1.11 Örnek. $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ olsun. $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$ ve $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$ olduğunu gösteriniz.

İspat.

Belli bir kümenin kapanışını bulmak için bu kümeyi kapsayan $\boxed{\text{tüm}}$ kapalı kümeleri bulmalıyız ve sonra en küçük olanını seçmeliyiz. Bu nedenle tüm kapalı kümeleri yazarak başlamalıyız (bu kapalı kümeler basitçe tüm açık kümelerin tümleyenleridir).

Kapalı kümeler $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ ve $\{a\}$'dir. Dolayısıyla $\{b\}$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b, e\}$ kümesidir; yani $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$ olur. Benzer şekilde $\overline{\{a, c\}} = X$ ve $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$ olduğu görülür. $\square$

3.1.12 Örnek. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin tüm rasyonel sayılarını içeren bir alt kümesi olsun. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayınız.

İspat. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda bir $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ vardır. $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ kümesi $\mathbb{R}$'de açık olduğundan $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ ve $a < b$ olacak şekilde a, b vardır. Fakat her (a, b) aralığında bir q rasyonel sayısı vardır öyle ki $q \in (a, b)$'dır. Böylece $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ olur ki buradan $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olması gerekir. Bu ise $q \in \mathbb{Q}$ olması ile çelişir. O halde $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$'dır. $\square$

3.1.13 Tanım. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi A olsun. Eğer $\overline{A} = X$ ise A kümesine X içinde **yoğun** veya X içinde **her yerde yoğun** denir.

Örnek 3.1.12'yi "$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin yoğun alt kümesidir." şeklinde yeniden ifade edebiliriz.

Ayrýca dikkat edersek Örnek 3.1.11'de $\{a, c\}$'nin X içinde yoğun olduğunu görebiliriz.

3.1.14 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık uzay olsun. Bu durumda X'in her alt kümesi (tümleyeni açık olduğundan) kapalıdır. Bu nedenle X'in her alt kümesinin kapanışı kendisi olduğundan X'in yoğun alt kümesi yalnızca X'in kendisidir. $\square$

3.1.15 Önerme. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi A olsun. A, X içinde yoğundur ancak ve ancak X'in boş olmayan her açık alt kümesi ile A kümesinin kesişimi boştan farklıdır. (Yani eğer $U \in \mathcal{T}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $A \cap U \neq \emptyset$'dır.)

İspat. Öncelikle boş olmayan her açık kümenin A ile boştan farklı biçimde kesiştiğini kabul edelim. $A = X$ ise A kümesinin X içinde yoğun olduğu aşikardır. $A \neq X$ ise herhangi $x \in X \setminus A$ alabiliriz. Eğer $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ ise $U \cap A \neq \emptyset$'dir. Dolayısıyla x, A kümesinin limit noktasıdır. x noktası $X \setminus A$ içinde keyfi bir nokta olduğundan $X \setminus A$'nın her noktası A kümesinin bir limit noktasıdır. Böylece $A' \supseteq X \setminus A$'dir ve bu durumda Tanım 3.1.9'a göre $\overline{A} = A' \cup A = X$'dir; yani A, X içinde yoğundur.

Aksine, A kümesinin X içinde yoğun olduğunu kabul edelim. U, X'in boş olmayan herhangi bir açık alt kümesi olsun. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $U \cap A = \emptyset$ olsun. Bu durumda $x \in U$ ise $x \notin A$ ve U açık kümesi A kümesinin hiçbir elemanını içermediğinden x, A kümesinin bir limit noktası $\boxed{\text{değildir}}$. Bu ise A, X içinde yoğun olması ve dolayısıyla $X \setminus A$'nın her elemanın A kümesinin limit noktası olması ile çelişir. Sonuç olarak varsayımımız yanlıştır ve istendiği gibi $U \cap A \neq \emptyset$'dir. $\square$

Alıştırmalar 3.1

1. (a) Örnek 1.1.2'e göre aşağıdaki kümelerin tüm limit noktalarını bulunuz:

   (i) $\{a\}$,
   (ii) $\{b, c\}$,
   (iii) $\{a, c, d\}$,
   (iv) $\{b, d, e, f\}$.

   (b) Yukarıdaki kümelerin her birinin kapanışını bulunuz.

   (c) Örnek 3.1.11'deki yöntemi kullanarak yukarıdaki kümelerin her birinin kapanışını bulunuz.

2. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ sonlu-kapalı topoloji ile birlikte tam sayılar kümesi olsun. Aşağıdaki kümelerin limit noktaları kümelerini sıralayınız:

   (i) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,
   (ii) Tüm çift tam sayılardan oluşan E kümesi.

3. $\mathbb{R}$'de $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının tüm limit noktalarını bulunuz.

4. (a) Aşağıdaki kümelerin her birinin $\mathbb{R}$'deki kapanışları nedir?

   (i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$,
   (ii) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi,
   (iii) $\mathbb{P}$ irrasyonel sayılar.

   (b) S, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $a \in \overline{S}$ olması için gerek ve yeter şart her n pozitif sayısı için $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $x_n \in S$ olmasıdır, kanıtlayınız.

5. S ve T bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayın $S \subseteq T$ olacak şekilde boş olmayan kümeleri olsun.

   (i) Eğer p, S kümesinin bir limit noktası ise p'nin aynı zamanda T kümesinin de bir limit noktası olduğunu doğrulayınız.

   (ii) (i) maddesinden $\overline{S} \subseteq \overline{T}$ sonucunu çıkarınız.

   (iii) S, X içinde yoğun ise T'nin de X içinde yoğun olduğunu gösteriniz.

   (iv) Madde (iii)'yi kullanarak $\mathbb{R}$'nin sayılmaz çoklukta farklı yoğun alt kümelerinin var olduğunu gösteriniz. [İpucu. Sayılamaz kümeler, Ek 1'de ele alınmaktadır.]

(v)* Tekrar (iii)'yi kullanarak gösteriniz ki, $\mathbb{R}$'nin sayılamaz çoklukta farklı sayılabilir yoğun alt kümeleri ve $2^{\mathfrak{c}}$ farklı sayılamaz yoğun alt kümesi vardır.
[İpucu. $\mathfrak{c}$'nin Ek 1'de ele alındığına dikkat ediniz.]

6. A ve B, Öklid topolojisi ile verilen $\mathbb{R}$ uzayının alt kümeleri olsun. (i) $A \cap \overline{B}$; (ii) $\overline{A} \cap B$; (iii) $\overline{A} \cap \overline{B}$; (iv) $\overline{A \cap B}$ olarak verilen dört kümeyi göz önüne alalım.

(a) Eğer A tüm rasyonel sayıların kümesi ve B tüm irrasyonel sayıların kümesi ise yukarıda verilen dört kümeden hiçbirinin birinin diğerine eşit olmadığını kanıtlayınız.

(b) Eğer A ve B, $\mathbb{R}$ içinde açık aralıklar ise yukarıda verilen dört kümenin en az ikisinin eşit olduğunu kanıtlayınız.

(c) $\mathbb{R}$'nin yukarıda verilen dört kümeden herhangi ikisi birine eşit olmayacak şekilde A ve B açık kümelerini bulunuz.

3.2 Komşuluklar

3.2.1 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, N, X'in bir alt kümesi ve p de N'de bir nokta olsun. Eğer $p \in U \subseteq N$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa N kümesine p noktasının bir **komşuluğu**dur denir.

3.2.2 Örnek. $[0, 1]$ kapalı aralığı $\mathbb{R}$'de $\frac{1}{2}$ noktasının bir komşuluğudur, çünkü $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$ vardır. □

3.2.3 Örnek. $(0, 1]$ aralığı $\mathbb{R}$'de $\frac{1}{4}$ noktasının bir komşuluğudur, çünkü $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, 1]$ bulunabilir. Fakat $(0, 1]$, 1 noktasının komşuluğu değildir. (İspatlayınız.) □

3.2.4 Örnek. Eğer $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve $U \in \mathcal{T}$ ise Tanım 3.2.1'den U açık kümesi her $p \in U$ noktasının bir komşuluğudur. Örneğin, $\mathbb{R}$'de her (a, b) açık aralığı içindeki her noktanın bir komşuluğudur. □

3.2.5 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve N bir p noktasının bir komşuluğu olsun. Eğer S kümesi X'in $N \subseteq S$ olacak şekilde herhangi bir alt kümesi ise p noktasının bir komşuluğudur. □

Bir sonraki önerme kolayca doğrulanır, bu yüzden ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

3.2.6 Önerme. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında bir alt küme A olsun. $x \in X$ noktası A'nın limit noktasıdır ancak ve ancak x'in her komşuluğu A'da x'den farklı bir nokta içerir. □

Bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şart tüm limit noktalarını içermesi olduğundan aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz:

3.2.7 Sonuç. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında bir alt küme A olsun. A kümesi kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X \setminus A$ için $N \subseteq X \setminus A$ olacak şekilde x noktasının bir N komşuluğu vardır. □

3.2.8 Sonuç. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında bir alt küme U olsun. $U \in \mathcal{T}$'dur ancak ve ancak her $x \in U$ için $N \subseteq U$ olacak şekilde x noktasının bir N komşuluğu vardır. □

Bir sonraki sonuç kolayca Sonuç 3.2.8'den çıkarılmaktadır.

3.2.9 Sonuç. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında bir alt küme U olsun. $U \in \mathcal{T}$'dur ancak ve ancak her $x \in U$ için $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. □

Sonuç 3.2.9, bir kümenin açık mı kapalı mı olduğunu belirlemek için faydalı bir ölçüdür. Bir kümenin açık olabilmesi için gerek ve yeter şartın içindeki her noktayı içeren bir açığı kapsaması olduğunu söylemektedir.

Alıştırmalar 3.2

1. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında bir alt küme A olsun. A kümesinin X içinde yoğun olması için gerek ve yeter şart $X \setminus A$'daki her bir noktanın her komşuluğunun A ile arakesitinin boştan farklı olmasıdır, ispatlayınız.

2. (i) A ve B, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında alt kümeler olsun.

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

olduğunu ispatlayınız.

(ii) Bir örnekle

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

olduğunu gösteriniz.

3. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{T}$, X üzerinde sonlu-kapalı topolojidir ancak ve ancak (i) $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayıdır, ve (ii) X'in her sonsuz alt kümesi X'de yoğundur, ispat ediniz.

4. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı sayılabilir yoğun alt kümeye sahipse **ayrılabilir**dir denir. Aşağıdaki uzaylardan ayrılabilir olanları belirleyiniz:

(i) alışılmış topoloji ile $\mathbb{R}$ kümesi;

(ii) ayrık topoloji ile sayılabilir bir küme;

(iii) sonlu-kapalı topoloji ile sayılabilir bir küme;

(iv) X sonlu iken $(X, \mathcal{T})$;

(v) $\mathcal{T}$ sonlu iken $(X, \mathcal{T})$;

(vi) ayrık topoloji ile sayılamaz bir küme;

(vii) sonlu-kapalı topolojisi ile sayılamaz bir küme;

(viii) ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan bir $(X, \mathcal{T})$ uzayı.

5. $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve A, X'in herhangi bir alt kümesi olsun. A'nın kapsadığı en büyük açık kümeye A kümesinin **içi** denir ve **Int(A)** ile gösterilir. [X'in tamamı A'da kalan tüm açık alt kümelerinin birleşimidir.]

(i) $\mathbb{R}$'de Int$([0, 1]) = (0, 1)$ olduğunu ispatlayınız.

(ii) $\mathbb{R}$'de Int$((3, 4)) = (3, 4)$ olduğunu ispatlayınız.

(iii) A kümesi $(X, \mathcal{T})$'da açık ise Int$(A) = A$ olduğunu doğrulayınız.

(iv) $\mathbb{R}$'de Int$(\{3\}) = \emptyset$ olduğunu doğrulayınız.

(v) Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık olmayan uzaysa, X'in tüm A özalt kümeleri için Int$(A) = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

(vi) $\mathbb{R}$'nin her sayılabilir A alt kümesi için Int$(A) = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

6. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının herhangi bir A alt kümesi için Int$(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ olduğunu gösteriniz. (İç tanımı için yukarıdaki Alıştırma 5'e bakınız.)

7. Bir A kümesinin $(X, \mathcal{T})$ içinde yoğun olması için gerek şart Int$(X \setminus A) = \emptyset$ olmasıdır. Bunu yukarıdaki Alıştırma 6 yardımıyla ispatlayınız.

8. A_1 ve A_2, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının keyfi alt kümeleri olsun. Yukarıdaki Alıştırma 5'deki iç tanımını kullanarak aşağıdaki durumlardan hangilerinin doğru olduğunu belirleyiniz.

   (i) Int$(A_1 \cap A_2) =$ Int$(A_1) \cap$ Int(A_2),

   (ii) Int$(A_1 \cup A_2) =$ Int$(A_1) \cup$ Int(A_2),

   (iii) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

   (Eğer cevabınız herhangi biri için "doğru" ise ispat yapmalısınız. Eğer cevabınız "yanlış" ise somut bir karşı örnek vermelisiniz.)

9.* S, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının yoğun bir alt kümesi olsun. X'in her U açık alt kümesi işin $\overline{S \cap U} = \overline{U}$ eşitliğinin olduğunu ispatlayınız.

10. S ve T, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının yoğun alt kümeleri olsun. Aynı zamanda T açıksa yukarıdaki Alıştırma 9'dan $S \cap T$'nın X'de yoğun olduğu sonucunu çıkarınız.

11. $\mathcal{B} = \{[a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ olsun. Aşağıdaki ifadelerin her birini ispatlayınız.

   (i) $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_1$ topolojisi için bir tabandır. ($(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayı **Sorgenfrey doğrusu** olarak adlandırılır.)

   (ii) $\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi ise $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$ olur.

   (iii) $a < b$ olmak üzere her $a, b \in \mathbb{R}$ için $[a, b)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$'de hem açık hem kapalı bir kümedir.

   (iv) Sorgenfrey doğrusu ayrılabilir bir uzaydır.

   (v)* Sorgenfrey doğrusu ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlamaz.

3.3 Bağlantılılık

3.3.1 Uyarı. Burada bazı temel tanımları ve hali hazırda bildiğiniz gerçekleri vereceğiz. S, gerçel sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. Her $x \in S$ için $x \leq b$ olacak biçimde $b \in S$ varsa b'ye S'nin **en büyük elemanı** denir. Benzer şekilde her $x \in S$ için $a \leq x$ olacak biçimde $a \in S$ varsa a'ya S'nin **en küçük elemanı** denir. Her $x \in S$ için $x \leq c$ olacak biçimde bir c gerçel sayısı varsa S gerçel sayılar kümesine **üstten sınırlı** denir ve c'ye S'nin **üst sınırı** denir. Benzer biçimde "**alttan sınırlı**" küme ve "**alt sınır**" terimleri tanımlanır. Bir küme hem üstten sınırlı hem de alttan sınırlı ise kümeye **sınırlı** küme denir. □

En Küçük Üst Sınır Aksiyomu: S, gerçel sayılar kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer S üstten sınırlıysa bir en küçük üst sınıra sahiptir. □

S'nin en küçük üst sınırına S'nin **supremumu** da denir ve $\sup(S)$ ile gösterilir. En küçük üst sınırı S kümesine ait olabilir ya da olmayabilir. Aslında, S'nin supremumu S'nin elemanıdır ancak ve ancak S en büyük elemana sahiptir. Örneğin, $S = (1, 2)$ açık aralığının supremumu 2'dir fakat $2 \notin (1, 2)$'dir. Diğer taraftan $[3, 4]$ kapalı aralığının supremumu $[3, 4]$ aralığında bulunan 4'tür ve 4, $[3, 4]$ aralığının en büyük elemanıdır. Gerçel sayıların alttan sınırlı herhangi S alt kümesi **infimum** olarak da adlandırılan ve $\inf(S)$ ile gösterilen **en büyük alt sınır** a sahiptir.

3.3.2 Lemma. S, $\mathbb{R}$'nin üstten sınırlı bir alt kümesi ve p, S'nin supremumu olsun. Eğer S, $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesi ise $p \in S$'dir.

İspat. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $p \in \mathbb{R} \setminus S$ olsun. $\mathbb{R} \setminus S$ kümesi açık olduğundan $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$ ve $a < b$ olacak şekilde a ve b gerçel sayıları vardır. p, S için $\boxed{\text{en küçük}}$ üst sınır ve $a < p$ olduğu için $a < x$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Ayrıca $x < p < b$ ve dolayısıyla $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \backslash S$'dir. Fakat $x \in S$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle varsayımımız yanlış olup $p \in S$'dir. □

3.3.3 Önerme. T, $\mathbb{R}$'nin hem kapalı hem açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda ya $T = \mathbb{R}$ ya da $T = \emptyset$'dir.

İspat. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $T \neq \mathbb{R}$ ve $T \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda bir $x \in T$ elemanı ve bir $z \in \mathbb{R} \setminus T$ elemanı vardır. Genelliği bozmaksızın, $x < z$ olduğunu kabul edelim. $S = T \cap [x, z]$ alalım. O zaman iki kapalı kümenin kesişimi olan S kapalı bir küme olur. Ayrıca, z açıkça bir üst sınırı olduğu için S üstten sınırlıdır. p, S'nin supremumu olsun. Lemma 3.3.2'den $p \in S$ olur. $p \in [x, z]$ olduğu için $p \leq z$'dir. $z \in \mathbb{R} \setminus S$ olduğundan $p \neq z$ olur ve böylece $p < z$'dir.

Ayrıca T açık bir kümedir ve $p \in T$ vardır. O halde $\mathbb{R}$'de $p \in (a, b) \subseteq T$ ve $a < b$ olacak şekilde a ve b sayıları vardır. $p < t < \min(b, z)$ olacak biçimde t verilsin, öyle ki $\min(b, z)$, b ve z'den küçük olanını gösterir. Bu yüzden $t \in T$ ve $t \in [p, z]$'dir. Böylece $t \in T \cap [x, z] = S$ olur. $t > p$ ve p, S'nin supremumu olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır ve sonuç olarak $T = \mathbb{R}$ ya da $T = \emptyset$ olur. □

3.3.4 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in hem açık hem kapalı alt kümeleri sadece X ve $\emptyset$ ise X uzayı **bağlantılı**dır denir.

Bunun sonucunda Önerme 3.3.3'u tekrar ele alarak aşağıdakileri elde ederiz:

3.3.5 Önerme. $\mathbb{R}$ topolojik uzayı bağlantılıdır. □

3.3.6 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ birden fazla elemanlı herhangi ayrık topolojik uzay ise, her bir tek nokta kümesi hem açık hem kapalı küme olduğundan $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı değildir. □

3.3.7 Örnek. $(X, \mathcal{T})$ ayrık olmayan topolojik uzay ise, hem açık hem kapalı kümeler sadece X ve $\emptyset$ olduğundan $(X, \mathcal{T})$ bağlantılıdır. (Aslında $(X, \mathcal{T})$'nun açık olan kümeleri sadece X ve $\emptyset$'dir.) □

3.3.8 Örnek. Eğer $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

ise $\{b, c, d, e\}$ hem açık hem kapalı olduğundan $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı değildir. □

3.3.9 Uyarı. Tanım 3.3.4'den görülür ki; $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı bağlantılı değildir (yani **bağlantısız**dır) ancak ve ancak $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde boştan farklı A ve B açık kümeleri vardır.[1] (Bkz. Alıştırmalar 3.3 #3.)

Bu bölümü $\mathbb{R}^2$ (ve aslında, her bir $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$) bağlantılı uzaydır, diyerek sonuçlandırıyoruz. Ancak ispatı Bölüm 5'te yapılacaktır.

Bağlantılık üzerine çok daha fazla şey söyleyeceğimiz çok önemli bir özelliktir.

Alıştırmalar 3.3

1. S gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi ve $T = \{x : -x \in S\}$ olsun.

   (a) a gerçel sayısının S'nin infimumu olması için gerek ve yeter şart $-a$'nın T'nin supremumu olmasıdır, ispatlayınız.

   (b) En Küçük Üst Sınır Aksiyomunu ve (a)'yı kullanarak gerçel sayıların boş olmayan alttan sınırlı her kümesinin bir en büyük alt sınıra sahip olduğunu ispatlayınız.

2. Aşağıdaki gerçel sayı kümelerinin her birinin eğer varsa en büyük elemanını ve en küçük üst sınırını bulunuz.

   (i) $S = \mathbb{R}$.
   (ii) $S = \mathbb{Z} =$ tüm tam sayılar kümesi.
   (iii) $S = [9, 10)$.
   (iv) $S = n$ pozitif sayılar olmak üzere $1 - \frac{3}{n^2}$ biçimindeki tüm gerçel sayılar kümesi.
   (v) $S = (-\infty, 3]$.

[1] Pek çok kitap bağlantılılığı tanımlamak için bu özelliği kullanır.

3. $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı uzay değildir ancak ve ancak $A \cup B = X$ olacak şekilde A ve B boş olmayan ayrık açık özalt kümeleri vardır, ispatlayınız.
4. Örnek 1.1.2'deki $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı mıdır?
5. $(X, \mathcal{T})$ sonlu-kapalılar topolojisi ile birlikte herhangi sonsuz küme olsun. $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı mıdır?
6. $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir-kapalılar topolojisi ile birlikte sonsuz bir küme olsun. $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı mıdır?
7. Alıştırmalar 1.1 #9'deki topolojik uzayların hangileri bağlantılıdır?

3.4 Dipnot

Bu bölümde limit noktası kavramı tanıttık ve bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şartın tüm limit noktalarını içermesi olduğunu gösterdik. Önerme 3.1.8'den sonra herhangi A kümesinin onu kapsayan bir en küçük kapalı $\overline{A}$ kümesine sahip olduğunu söylemektedir. $\overline{A}$ kümesi A'nın kapanışı olarak adlandırılmaktadır.

Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir A alt kümesi eğer $\overline{A} = X$ ise X'de yoğun olarak adlandırılır. $\mathbb{Q}$'nun $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğunu ve ayrıca tüm irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{P}$'nin de $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğunu gördük. Bir noktanın komşuluğu kavramını ve bağlantılı topolojik uzay kavramını tanıttık. Önemli bir sonuç olan $\mathbb{R}$'nin bağlantılı olmasını ispatladık. Daha sonra bağlantılılık hakkında çok daha fazla şey söyleyeceğiz.

Alıştırmalarda bir kümenin kapanışının tümleyeni olan, kümenin içi kavramını tanıttık.

Bölüm 4

Homeomorfizmler

Giriş

Matematiğin her bir alt dalında iki yapının denk olup olmadığını bilmek birinci derecede önemlidir. Örneğin, küme teorisine göre bir kümeyi diğer bir kümeye eşleştiren bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa bu kümeler denktir. Bir gruptan diğerine bire-bir ve üzerine olan bir homomorfizm varsa bu gruplar denktir ve izomorfik olarak da adlandırılırlar. Bir topolojik uzaydan diğer bir topolojik uzaya bir homeomorfizm varsa bu uzaylar denktir ve homeomorfik olarak da bilinir.

Bu bölümü çalışmaya başlamadan Ek 1'i incelemeli ve YouTube'da
http://youtu.be/veSbFJFjbzU
ve Youku'da
http://tinyurl.com/mulg9fv
adreslerinden ulaşabileceğiniz "Topology Without Tears - Video 1 - Pure Mathematics" videolarını,
YouTube'da
http://youtu.be/9h83ZJeiecg ve http://youtu.be/QPSRB4Fhzko
ve Youku'da
http://tinyurl.com/m4dlzhh ve http://tinyurl.com/kf9lp8e
adreslerinden ulaşabileceğiniz
"Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory" videolarını
ve YouTube'da
"Topology Without Tears - Video 4a & 4b &4c &4d - Writing Proofs in Mathematics" videolarını izlemelisiniz. YouTube ve Youku'daki videoların linklerine http://www.topologywithouttears.net adresinden ulaşabilirsiniz.

4.1 Alt Uzaylar

4.1.1 Tanım. Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. Y'nin alt kümelerinin $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ sınıfı Y üzerinde **alt uzay topolojisi** (veya **relatif topoloji** veya **indirgenmiş topoloji** veya **$\mathcal{T}$ tarafından Y üzerine indirgenmiş topoloji**) olarak adlandırılan bir topolojidir. $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topolojik uzayına $(X,\mathcal{T})$'nun bir **alt uzayı** denir.

$\mathcal{T}_Y$'nin gerçekten de Y üzerinde bir topoloji olduğunu kontrol etmelisiniz.

4.1.2 Örnek. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

ve $Y = \{b,c,e\}$ verilsin. Bu durumda Y üzerindeki alt uzay topolojisi

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\} \qquad \square$$

olur.

4.1.3 Örnek. $X = \{a,b,c,d,e\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

ve $Y = \{a,d,e\}$ olsun. Öyleyse Y üzerindeki indirgenmiş topoloji

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{d,e\}\} \qquad \square$$

dir.

4.1.4 Örnek. $\mathcal{B}$, X üzerinde $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban ve Y, X'in bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ sınıfının $\mathcal{T}_Y$ alt uzay topolojisi için bir taban olduğunu göstermek hiç de zor değildir. [Alıştırma: bunu kanıtlayınız.]

Öyleyse $\mathbb{R}$'nin $(1,2)$ alt kümesini göz önüne alalım. $(1,2)$ üzerindeki indirgenmiş topoloji için bir taban $\{(a,b) \cap (1,2) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ sınıfıdır. Bir başka deyişle $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, 1 \leq a < b \leq 2\}$, $(1,2)$ açık aralığı üzerindeki indirgenmiş topoloji için bir tabandır. $\square$

4.1.5 Örnek. $\mathbb{R}$'nin $[1,2]$ alt kümesini ele alalım. $[1,2]$ üzerindeki $\mathcal{T}$ alt uzay topolojisi için

$$\{(a,b)\cap[1,2] : a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$$

bir tabandır. Yani,

$$\{(a,b) : 1\le a<b\le 2\}\cup\{[1,b) : 1<b\le 2\}\cup\{(a,2] : 1\le a<2\}\cup\{[1,2]\},$$

$\mathcal{T}$ için bir tabandır.

Fakat burada bazı şaşırtıcı farklılıklar görülmektedir; örneğin $[1,1\frac{1}{2})$ kümesi kesinlikle $\mathbb{R}$'de açık bir küme `değildir`. Ancak $[1,1\frac{1}{2}) = (0,1\frac{1}{2})\cap[1,2]$ kümesi, $[1,2]$ alt uzayında açık bir kümedir.

Ayrıca $(1,2]$, $\mathbb{R}$'de açık değildir, ancak $[1,2]$'de açıktır. Hatta $[1,2]$ kümesi de $\mathbb{R}$'de açık olmamasına rağmen $[1,2]$'de açık bir kümedir.

Bu yüzden bir kümenin açık olduğunu her söylediğimizde o kümenin hangi uzayda veya hangi topolojide açık bir küme olduğunu tam olarak açıklamalıyız. □

4.1.6 Örnek. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'nin tüm tam sayılardan oluşan alt kümesi olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi tarafından $\mathbb{Z}$ üzerine indirgenen topolojinin ayrık topoloji olduğunu ispatlayınız.

İspat.

$\mathbb{Z}$ üzerinde $\tau_{\mathbb{Z}}$ indirgenmiş topolojisinin ayrık topoloji olduğunu ispatlamak için Önerme 1.1.9 yardımıyla $\mathbb{Z}$'deki her tek elemanlı kümenin $\tau_{\mathbb{Z}}$'de açık olduğunu; yani $n\in\mathbb{Z}$ ise $\{n\}\in\tau_{\mathbb{Z}}$ göstermek yeterlidir.

$n\in\mathbb{Z}$ olsun. O halde $\{n\}=(n-1,n+1)\cap\mathbb{Z}$ olur. Bununla birlikte $(n-1,n+1)$, $\mathbb{R}$'de açıktır ve dolayısıyla $\{n\}$, $\mathbb{Z}$ üzerine indirgenmiş topolojiye göre açıktır. Bu yüzden $\mathbb{Z}$'deki her tek nokta kümesi $\mathbb{Z}$ üzerine indirgenmiş topolojide açıktır. Böylece indirgenmiş topoloji ayrıktır. □

Gösterim. Hangi topoloji olduğunu açıkça belirtmeksizin

$\mathbb{Q}$ = rasyonel sayılar kümesi,

$\mathbb{Z}$ = tam sayılar kümesi,

$\mathbb{N}$ = pozitif tam sayılar kümesi,

$\mathbb{P}$ = irrasyonel sayılar kümesi,

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) veya $[a, \infty)$

kümeleri topolojik uzaylar olarak her anıldığında $\mathbb{R}$'nin bir alt uzayı olarak indirgenmiş topolojiyi kastederiz. (Bazen, bu kümeler üzerindeki indirgenmiş topolojiyi "**alışılmış topoloji**" olarak ifade edeceğiz.)

Alıştırmalar 4.1

1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ olsun. $Y = \{a, c, e\}$ ve $Z = \{b, c, d, e\}$ üzerinde, sırasıyla, $\mathcal{T}_Y$ ve $\mathcal{T}_Z$ topolojilerinin elemanlarını listeleyiniz.

2. $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisi tarafından pozitif tam sayıların kümesi $\mathbb{N}$ üzerine indirgenmiş topolojiyi tanımlayınız.

3. Aşağıdakilerin her biri üzerindeki alışılmış topoloji için bir taban yazınız:

   (i) $a < b$ olmak üzere $[a, b)$;
   (ii) $a < b$ olmak üzere $(a, b]$;
   (iii) $(-\infty, a]$;
   (iv) $(-\infty, a)$;
   (v) (a, ∞);
   (vi) $[a, \infty)$.

   [İpucu: bkz. Örnekler 4.1.4 ve 4.1.5.]

4. $A \subseteq B \subseteq X$ ve X üzerindeki topoloji $\mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{T}_B$, B üzerindeki alt uzay topolojisi olsun. İlaveten $\mathcal{T}$'dan A üzerine indirgenen topoloji $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_B$'den A üzerine indirgenen topoloji $\mathcal{T}_2$ olsun. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğunu ispatlayınız. (Böylece **bir alt uzayın alt uzayı da bir alt uzaydır**.)

5. $(Y, \mathcal{T}_Y)$, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. Y'nin bir Z alt kümesi $(Y, \mathcal{T}_Y)$'de kapalıdır ancak ve ancak A, $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir kapalı bir alt kümesi olmak üzere $Z = A \cap Y$ olmalıdır, gösteriniz.

6. Bir ayrık uzayın her alt uzayının ayrık olduğunu gösteriniz.

7. Bir ayrık olmayan uzayın her alt uzayının ayrık olmayan uzay olduğunu gösteriniz.

8. $\mathbb{R}$'nin $[0,1] \cup [3,4]$ alt uzayının en az 4 tane hem açık hem kapalı alt kümeye sahip olduğunu gösteriniz. Tam olarak kaç tane hem açık hem kapalı alt kümesi vardır?

9. Bir bağlantılı uzayın her alt uzayının bağlantılı olduğu doğru mudur?

10. $(Y, \mathcal{T}_Y)$, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının alt uzayı olsun. $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ olması için gerek ve yeter şart $Y \in \mathcal{T}$ olmasıdır, gösteriniz.

    [İpucu: $Y \in \mathcal{T}_Y$ olduğunu hatırlayınız.]

11. A ve B, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bağlantılı alt uzayları olsun. Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \cup B$'nin bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

12. $(Y, \mathcal{T}_1)$, bir $(X, \mathcal{T})$ T_1-uzayının bir alt uzayı olsun. $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayının da T_1-uzayı olduğunu gösteriniz.

13. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında her farklı $a, b \in X$ için $a \in U$, $b \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa $(X, \mathcal{T})$ uzayına **Hausdorff uzayı** (veya **T_2-uzayı**) denir.
    (i) $\mathbb{R}$'nin Hausdorff uzayı olduğunu gösteriniz.
    (ii) Her ayrık uzayın Hausdorff uzayı olduğunu ispatlayınız.
    (iii) Herhangi bir T_2-uzayının aynı zamanda bir T_1-uzayı olduğunu gösteriniz.
    (iv) Sonlu kapalı topolojiyle verilen $\mathbb{Z}$'nin bir T_1-uzayı olduğunu fakat bir T_2-uzayı olmadığını gösteriniz.
    (v) Bir T_2-uzayının herhangi alt uzayının bir T_2-uzayı olduğunu kanıtlayınız.
    (vi) Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff kapı uzayı (bkz. Alıştırmalar 1.3 #9) ise en çok bir $x \in X$ noktasının bir limit noktası olduğunu ve eğer $y \in X$ noktası bir limit noktası ise $\{y\}$ tek nokta kümesinin bir açık küme olduğunu ispatlayınız.

14. $(Y, \mathcal{T}_1)$, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer $(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlarsa $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayının da ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayacağını gösteriniz.

15. $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $[a, b]$ aralığının bağlantılı olduğunu gösteriniz. [İpucu: Önerme 3.3.3'ün ifadesinde ve ispatında her yerde $\mathbb{R}$ yerine $[a, b]$ alınız.]

16. Alışılmış topoloji ile verilmiş tüm rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ ve alışılmış topoloji ile verilmiş tüm irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{P}$ olsun.
    (i) Ne $\mathbb{Q}$ ne de $\mathbb{P}$'nin bir ayrık uzay olmadığını gösteriniz.
    (ii) $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{P}$ bir bağlantılı uzay mıdır?
    (iii) $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{P}$ bir Hausdorff uzayı mıdır?
    (iv) $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{P}$ sonlu-kapalı topolojiye sahip midir?

17. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının herhangi A kapalı alt kümesi ve herhangi $x \in X \setminus A$ noktası için $x \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa $(X, \mathcal{T})$ uzayına **regüler uzay** denir. Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir regüler uzay ve T_1-uzayı ise bu uzaya **T_3-uzayı** denir. Aşağıdakileri ifadeleri ispatlayınız.
    (i) Bir regüler uzayın her alt uzayı bir regüler uzaydır.
    (ii) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$ ve $\mathbb{R}^2$ uzayları regüler uzaydır.
    (iii) Eğer $(X, \mathcal{T})$ is bir regüler T_1-uzayı ise T_2-uzayıdır.
    (iv) Sorgenfrey doğrusu bir regüler uzaydır.
    (v)* X, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi ve $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. A, $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisinde kapalı küme ve T, S'nin herhangi alt kümesi olmak üzere $C = A \cup T$ iken kapalı olacak şekilde bir $C \subseteq \mathbb{R}$ kümesi tanımlayınız. Bu kapalı kümelerin tümleyenleri $\mathbb{R}$ üzerinde Hausdorff olan ancak regüler olmayan bir $\mathcal{T}$ topolojisi oluşturur.

4.2 Homeomorfizmler

Şimdi denk topolojik uzaylar kavramını inceleyelim. Bir örnek göz önüne alarak başlayalım:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \qquad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}$$

olsun. Sezgisel olarak $(X, \mathcal{T})$ uzayının $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayına "denk" olduğu açıktır. $f(a) = g,\ f(b) = h,\ f(c) = i,\ f(d) = j$ ve $f(e) = k$ şeklinde tanımlanan $f\colon X \to Y$ fonksiyonu denkliği sağlar. Şimdi bunu resmi hale getirelim.

4.2.1 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f : X \to Y$ fonksiyonu varsa bu uzayların **homeomorfik** olduğunu söylenir:

(i) f bire-birdir (yani $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olur),

(ii) f örtendir (yani herhangi $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ vardır),

(iii) her $U \in \mathcal{T}_1$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$'dur ve

(iv) her $V \in \mathcal{T}$ için $f(V) \in \mathcal{T}_1$'dir.

İlaveten, f dönüşümü $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayları arasında **homeomorfizm** olarak adlandırılır. $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ olarak yazılır. □

"$\cong$"nın bir denklik bağıntısı olduğunu ve bunu tüm (a, b) açık aralıklarının birbiriyle homeomorfik olduğunu göstermek için kullanacağız. Örnek 4.2.2, "$\cong$"nın geçişli bir bağıntı olduğunu gösteren ilk adımdır.

4.2.2 Örnek. $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}_1)$ ve $(Z,\mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylar olsun. Eğer $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ ise $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ olduğunu ispatlayınız.

İspat.

Bize $(X,\tau) \cong (Y,\tau_1)$ verilmiştir; yani, bir $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_1)$ homeomorfizmi vardır. Ayrıca $(Y,\tau_1) \cong (Z,\tau_2)$ verilmiştir. Yani bir de $g : (Y,\tau_1) \to (Z,\tau_2)$ homeomorfizmi vardır.

Bizden $(X,\tau) \cong (Z,\tau_2)$ olduğunu göstermemiz istenmektedir. Yani bir $h : (X,\tau) \to (Z,\tau_2)$ homeomorfizmi bulmamız gerekmektedir. $g \circ f : X \to Z$ bileşke dönüşümünün istenen homeomorfizm olduğunu kanıtlayacağız.

$(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ olduğundan $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ ve $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ homeomorfizmleri vardır. $g \circ f : X \to Z$ bileşke dönüşümünü göz önüne alalım. [Böylece her $x \in X$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x))$'dir.] $g \circ f$ dönüşümünün bire-bir ve örten olduğunu kanıtlamak oldukça basittir. Şimdi $U \in \mathcal{T}_2$ alalım. Bu durumda g bir homeomorfizm olduğundan $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$'dir. f'nin bir homeomorfizm olduğunu göz önüne alarak $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ elde ederiz. Oysa $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$'dır. Bu yüzden $g \circ f$, Tanım 4.2.1'in (iii) özelliğine sahiptir. Bundan sonra $V \in \mathcal{T}$ olsun. O zaman $f(V) \in \mathcal{T}_1$ ve böylece $g(f(V)) \in \mathcal{T}_2$'dir. yani $g \circ f(V) \in \mathcal{T}_2$ olur ve $g \circ f$'nin Tanım 4.2.1'in (iv) özelliğine sahip olduğunu görürüz. Sonuç olarak $g \circ f$ bir homeomorfizmdir. □

4.2.3 Uyarı. Örnek 4.2.2 "$\cong$" bağıntısının bir geçişli ikili bağıntı olduğunu gösterir. Aslında bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla ispatlanabilir;

(i) $(X,\mathcal{T}) \cong (X,\mathcal{T})$ olur. (Yansıma);

(ii) $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ iken $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (X,\mathcal{T})$ olur. (Simetrik);

[Eğer $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ bir homeomorfizm ise
$f^{-1} : (Y,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T})$'nin de bir homeomorfizm olduğuna dikkat ediniz.]

(iii) $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ iken $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ olur. (Geçişli).

□

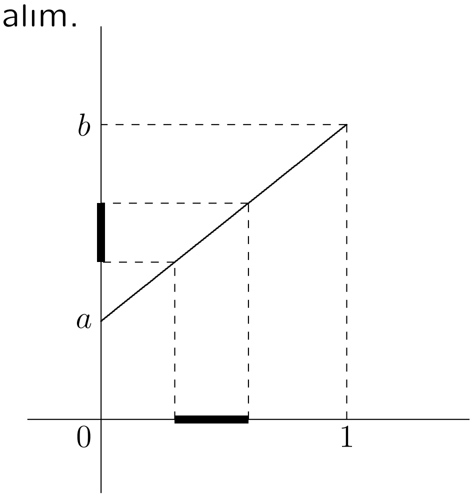
Sıradaki üç örnek $\mathbb{R}$'deki tüm açık aralıklarının homeomorfik olduğunu gösterir. Uzunluk kesinlikle bir topolojik özellik değildir. Özellikle $(0,1)$ gibi sonlu uzunluklu bir açık aralık, $(-\infty,1)$ gibi bir sonsuz uzunluklu bir açık aralığa homeomorftur. Aslında tüm açık aralıklar $\mathbb{R}$'ye homeomorftur.

4.2.4 Örnek. Boştan farklı her iki (a, b) ve (c, d) açık aralıklarının homeomorfik olduklarını kanıtlayınız.

Taslak İspat.

Uyarı 4.2.3'e göre (a, b) aralığının $(0, 1)$ aralığına homeomorfik ve (c, d)'in $(0, 1)$'e homeomorfik olduğunu göstermek yeterlidir. Bununla birlikte a ve b ($a < b$ olmasının dışında) keyfi olduklarından, eğer (a, b) aralığı $(0, 1)$ aralığına homeomorfik ise (c, d) aralığı da $(0, 1)$ aralığına homeomorfiktir. (a, b)'nın $(0, 1)$'e homeomorfik olduğunu ispatlamak için bir $f : (0, 1) \to (a, b)$ homeomorfizmi bulmak yeterlidir.

$a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ olsun ve $f(x) = a(1-x)+bx$ olacak şekilde $f : (0, 1) \to (a, b)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.



Açıkça $f : (0, 1) \to (a, b)$ bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Ayrıca $(0, 1)$'deki herhangi açık aralığın f altındaki görüntüsünün de (a, b)'de bir açık aralık olduğu grafikten görülmektedir.

$$f((0,1)\text{'de açık aralık}) = (a,b)\text{'de bir açık aralık.}$$

Ancak $(0, 1)$'deki her açık aralık $(0, 1)$'deki açık aralıkların bir birleşimidir ve bu yüzden

$$\begin{aligned} f((0,1)\text{'de açık aralık}) &= f((0,1)\text{'de açık aralıkların birleşimi}) \\ &= (a,b)\text{'de açık aralıkların birleşimi} \\ &= (a,b)\text{'de açık aralık.} \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir. Böylece Tanım 4.2.1'in (iv) koşulu sağlanır. Benzer şekilde

f^{-1}((a,b)'de açık küme)'nin $(0,1)$'de açık küme olduğunu görürüz. O halde Tanım 4.2.1'in (iii) koşulu da sağlanır.

[Alıştırma: yukarıdaki ispatın tamamını dikkatli bir şekilde yazınız.]

Bunun sonucu olarak f bir homeomorfizmdir ve $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için $(0,1) \cong (a,b)$ olur.

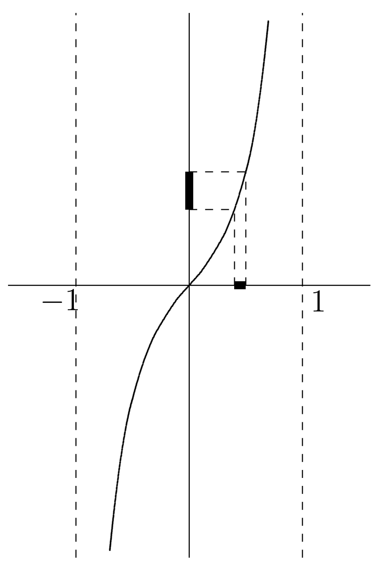
İstenildiği gibi $(a,b) \cong (c,d)$ olduğu yukarıdan direkt görülür. □

4.2.5 Örnek. $\mathbb{R}$ uzayının alışılmış topolojiye göre $(-1,1)$ açık aralığına homeomorf olduğunu ispatlayınız.

Taslak İspat. $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x}{1-\mid x \mid}$$

olarak tanımlansın. f'nin bire-bir ve örten olduğu kolaylıkla ispatlanır ve Örnek 4.2.2'deki gibi şematik bir kanıt f'nin bir homeomorfizm olduğunu gösterir.



[Alıştırma: f'nin bir homeomorfizm olduğunun ispatını tam olarak yazınız.] □

4.2.6 Örnek. $a < b$ olmak üzere her (a,b) açık aralığının $\mathbb{R}$'ye homemorfik olduğunu ispatlayınız.

İspat. Örnekler 4.2.5 ve 4.2.4 ve Uyarı 4.2.3'den direkt görülür. □

4.2.7 Uyarı. $a < b$ ve $c < d$ olmak üzere herhangi iki $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralığının birbirine homemorfik olduğu benzer bir tarzda ispatlanabilir. $\square$

Alıştırmalar 4.2

1. (i) $a < b$ ve $c < d$ iken a, b, c ve d gerçel sayılar ise $[a, b] \cong [c, d]$ olduğunu ispatlayınız.

   (ii) a ve b herhangi gerçel sayılar ise

   $$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a, \infty) \cong [b, \infty)$$

   olduğunu ispatlayınız.

   (iii) $c < d$ ve $e < f$ olmak üzere c, d, e ve f herhangi gerçel sayılar ise

   $$[c, d) \cong [e, f) \cong (c, d] \cong (e, f]$$

   olduğunu ispatlayınız.

   (iv) $a < b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için

   $$[0, 1) \cong (-\infty, a] \cong [a, \infty) \cong [a, b) \cong (a, b]$$

   sonucunu çıkarınız.

2. $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.

3. m ve c sıfırdan farklı gerçel sayılar olsun ve $\mathbb{R}^2$'nin bir X alt uzayı

   $$X = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$$

   olarak verilsin. X'in $\mathbb{R}$'ye homeomorfik olduğunu ispatlayınız.

4. (i) a_1, b_1, a_2 ve b_2 pozitif gerçel sayılar olmak üzere X_1 ve X_2, $\mathbb{R}^2$'nin

   $$X_1 = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_1 \text{ ve } |y| \leq b_1\}$$

   ve

   $$X_2 = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_2 \text{ ve } |y| \leq b_2\}$$

   ile verilmiş kapalı dikdörtgen bölgeleri olsunlar. X_1 ve X_2, sırasıyla, $\mathbb{R}^2$'den indirgenmiş topolojileri $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ ile birlikte iseler $X_1 \cong X_2$ olduğunu gösteriniz.

(ii) c_1 ve c_2 pozitif gerçel sayılar olmak üzere D_1 ve D_2, $\mathbb{R}^2$'nin

$$D_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_1\}$$

ve

$$D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_2\}$$

ile verilmiş kapalı alt yuvarları olsunlar. D_1 ve D_2 kendi alt uzay topolojilerine sahip olmak üzere $D_1 \cong D_2$ olduğunu ispatlayınız.

(iii) $X_1 \cong D_1$ olduğunu kanıtlayınız.

5. X_1 ve X_2, $\mathbb{R}$'nin $X_1 = (0,1) \cup (3,4)$ ve $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$ ile verilen iki alt uzayı olsun. $X_1 \cong X_2$ midir? (Cevabınızı doğrulayınız.)

6. (**Grup Homeomorfizmi**) $(X, \mathcal{T})$ herhangi topolojik uzay ve G, X'in kendi içine tüm homeomorfizmlerinin kümesi olsun.

   (i) G'nin fonksiyonların bileşke işlemi altında grup olduğunu gösteriniz.

   (ii) Eğer $X = [0,1]$ ise G'nin sonsuz olduğunu gösteriniz.

   (iii) Eğer $X = [0,1]$ ise G bir Abel grup mudur?

7. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ homeomorfik topolojik uzaylar olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız;

   (i) $(X, \mathcal{T})$ bir T_0-uzayı ise $(Y, \mathcal{T}_1)$ bir T_0-uzayıdır.

   (ii) $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı ise $(Y, \mathcal{T}_1)$ bir T_1-uzayıdır.

   (iii) $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı ise $(Y, \mathcal{T}_1)$ bir Hausdorff uzayıdır.

   (iv) $(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlıyorsa $(Y, \mathcal{T}_1)$ ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlar.

   (v) $(X, \mathcal{T})$ ayrılabilir bir uzay ise $(Y, \mathcal{T}_1)$ ayrılabilir bir uzaydır.

8.* $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık topolojik uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayı $\mathbb{R}$'nin bir alt uzayına homeomorfik olması için gerek ve yeter şart X'nun sayılabilir olmasıdır.

4.3 Homeomorfik Olmayan Uzaylar

İki topolojik uzayın homeomorfik olduğunu ispatlamak için aralarında bir homeomorfizm bulmalıyız.

Fakat iki topolojik uzayın homeomorfik olmadığını ispatlamak (aralarında hiçbir homeomorfizm olmadığını göstermemiz gerektiğinden) daha zordur. Bir sonraki örnek bunu nasıl gösterebileceğimizin bir ipucunu verir.

4.3.1 Örnek. $[0,2]$ aralığının $\mathbb{R}$'nin $[0,1] \cup [2,3]$ alt uzayına homeomorfik olmadığını kanıtlayınız.

İspat. $(X, \mathcal{T}) = [0,2]$ ve $(Y, \mathcal{T}_1) = [0,1] \cup [2,3]$ olsun. Bu durumda

$$[0,1] = [0,1] \cap Y \Rightarrow [0,1],\ (Y, \mathcal{T}_1)\text{'de kapalıdır,}$$

ve

$$[0,1] = (-1, 1\frac{1}{2}) \cap Y \Rightarrow [0,1],\ ((Y, \mathcal{T}_1)\text{'de açıktır.}$$

O halde $[0,1]$ boştan farklı hem açık hem kapalı özalt küme olduğundan Y bağlantılı değildir.

$\boxed{\text{Varsayalım}}$ $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ olsun. O halde bir $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ homeomorfizmi vardır. Bu durumda $f^{-1}([0,1])$, X'de hem açık hem kapalı kümedir ve böylece X bağlantılı değildir. $[0,2] = X$ bağlantılı olduğundan bu yanlıştır. (Bkz. Alıştırmalar 4.1 #15.) Sonuç olarak bir çelişki elde ettik ve bu yüzden $(X, \mathcal{T}) \ncong (Y, \mathcal{T}_1)$ olur. □

Bundan ne öğrendik?

4.3.2 Önerme. Bağlantılı bir topolojik uzaya homeomorfik olan herhangi topolojik uzay bağlantılıdır. □

Önerme 4.3.2 iki topolojik uzayın homeomorfik olmadığını göstermek için bu uzaylardan birinin sahip olduğu fakat diğerinin sahip olmadığı "homeomorfizmlerin koruduğu" bir özellik bulmak şeklinde bir yol sunar.

Alıştırmalarda karşılaştığımız "homeomorfizmlerin koruduğu" özelliklerin bazıları;

(i) T_0-uzayı;

(ii) T_1-uzayı;

(iii) T_2-uzayı veya Hausdorff uzayı;

(iv) regüler uzay;

(v) T_3-uzayı;

(vi) ikinci saylabilirlik özelliğine sahip uzay;

(vii) ayrılabilir uzaydır. [Bkz. Alıştırmalar 4.2 #7.]

Ayrıca diğerleri;

(viii) ayrık uzay;

(ix) ayrık olmayan uzay;

(x) sonlu kapalı topoloji;

(xi) sayılabilir-kapalı topolojidir.

O halde bağlantılılıkla birlikte homeomorfizmler tarafından korunan on iki özellik biliyoruz. Ayrıca iki topolojik uzay $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$, eğer X ve Y farklı kardinalitelere sahip ise (örneğin X sayılabilir ve Y sayılamaz ise) veya $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_1$ farklı kardinalitelere sahip ise homeomorfik olamazlar.

Bunların yanı sıra belirli bir problemle karşılaştığında ihtiyacımız olan bunlardan hiçbiri olmayabilir. Örneğin $(0,1)$'in $[0,1]$'e homeomorfik olmadığını veya $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{R}^2$'ye homeomorfik olmadığını gösterelim. Bu uzayların homeomorfik olmadığını nasıl kanıtlayabileceğimizi kısaca göreceğiz.

Amacımıza doğru ilerlemeden önce şu soruyu soralım: $\mathbb{R}$'nin hangi alt uzayları bağlantılıdır?

4.3.3 Tanım. $\mathbb{R}$'nin bir S alt kümesi "$x < y < z$ olmak üzere $x \in S$, $z \in S$ ve $y \in \mathbb{R}$ iken $y \in S$'dir" özelliğine sahipse S'ye bir **aralık** denir.

4.3.4 Uyarılar. Aşağıdakilere dikkat ediniz:

(i) Her bir $\{x\}$ tek nokta kümesi bir aralıktır.

(ii) Her bir aralık; $\{a\}, [a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,\infty)$ formlarından birine sahiptir.

(iii) Örnek 4.2.6, Uyarı 4.2.7 ve Örnekler 4.2 #1'den görülür ki her aralık $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ ya da $\{0\}$ kümelerinden birine homeomorfiktir. Hatta Örnekler 4.3 #1'de daha da güçlü bir açıklama yapabileceğiz.

4.3.5 Önerme. $\mathbb{R}$'nin bir S alt uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart bir aralık olmasıdır.

İspat. Tüm aralıkların bağlantılı olduğu, Önerme 3.3.3'e benzer bir metodla, ispatta her yerde $\mathbb{R}$ yerine bağlantılı olduğunu ispatlamaya çalıştığımız aralık alınarak kanıtlanabilir.

Aksine, S bağlantılı olsun. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$ ve $y \notin S$ olsun. Bu durumda $(-\infty,y) \cap S = (-\infty,y] \cap S$ kümesi S'nin bir açık ve kapalı alt kümesidir. Böylece S'nin hem açık hem kapalı bir alt kümesi, yani $(-\infty,y) \cap S$ kümesi vardır. S'nin bağlantılı olmadığını göstermek için bu hem açık hem kapalı kümenin bir özalt küme olduğunu ve boştan farklı olduğunu doğrulamalıyız. x noktasını içerdiğinden bu küme boştan farklıdır. Ayrıca, $z \in S$ olup $z \notin (-\infty,y) \cap S$ sağlandığından bir özalt kümedir. O halde S bağlantılı değildir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, S bir aralıktır.$\square$

"Bağlantılı" isimlendirmesinin tercih edilmesinin bir sebebini şimdi göreceğiz. $\mathbb{R}$'nin "bağlantısız" parçaların bir birleşimi olan $X = [0,1] \cup [2,3] \cup [5,6]$ gibi alt uzaylar bağlantılı değilken $[a,b]$, (a,b), vb. gibi alt uzayları bağlantılıdır.

Şimdi de $(0,1) \not\cong [0,1]$ olduğunu gösteren problemi ele alalım. Öncelikle görünüşte aşikar olan bir tetkik sunalım.

4.3.6 Uyarı. $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ bir homeomorfizm olsun. $a \in X$ alalım öyle ki $X \setminus \{a\}$, X'in bir alt uzayı ve $\mathcal{T}_2$ indirgenmiş topolojisine sahip olsun. Ayrıca $Y \setminus \{f(a)\}$, Y'nin bir alt uzayı ve $\mathcal{T}_3$ indirgenmiş topolojisine sahiptir. Bu durumda $(X \setminus \{a\}, \mathcal{T}_2)$ ile $(Y \setminus \{f(a)\}, \mathcal{T}_3)$ homeomorfiktir.

Taslak İspat. Her $x \in X \setminus \{a\}$ için $g(x) = f(x)$ alarak $g\colon X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{f(a)\}$ tanımlayalım. Bu durumda g'nin bir homeomorfizm olduğu kolayca doğrulanır. (Bunun ispatını yapınız.) □

Bunun bir sonucu olarak aşağıdaki görülür:

4.3.7 Sonuç. $a < b$ ve $c < d$ olmak üzere a, b, c ve d gerçel sayılar ise

(i) $(a, b) \not\cong [c, d)$,

(ii) $(a, b) \not\cong [c, d]$ ve

(iii) $[a, b) \not\cong [c, d]$ olur.

İspat. (i) $(X, \mathcal{T}) = [c, d)$ ve $(Y, \mathcal{T}_1) = (a, b)$ alalım. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $y \in Y$ için $X \setminus \{c\} \cong Y \setminus \{y\}$ olur. Fakat (a, b)'den kaldırılan nokta hangi nokta olursa olsun elde edilen uzay bağlantısız olduğu halde $X \setminus \{c\} = (c, d)$ bir aralık olduğundan bağlantılıdır. Bunun sonucu olarak Önerme 4.3.2'den

$$\text{Her bir } \; y \in Y \; \text{ için } \; X \setminus \{c\} \not\cong Y \setminus \{y\}\text{'dir.}$$

Bu bir çelişkidir. O halde $[c, d) \not\cong (a, b)$ olur.

(ii) Her $y \in (a, b)$ için $(a, b) \setminus \{y\}$ bağlantısız olmasına rağmen $[c, d] \setminus \{c\}$ bağlantılıdır. O halde $(a, b) \not\cong [c, d]$ olur.

(iii) $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $[a, b) \cong [c, d]$ olsun. Bu durumda herhangi bir $y \in [a, b)$ için $[c, d] \setminus \{c\} \cong [a, b) \setminus \{y\}$'dır. Bu nedenle herhangi $z \in [a, b) \setminus \{y\}$ için $([c, d] \setminus \{c\}) \setminus \{d\} \cong ([a, b) \setminus \{y\}) \setminus \{z\}$ olur; yani $[a, b)$'de herhangi farklı y ve z için $(c, d) \cong [a, b) \setminus \{y, z\}$ olur. Fakat $[a, b)$'nin herhangi iki farklı y ve z noktaları için $[a, b) \setminus \{y, z\}$ olduğu halde (c, d) bağlantılıdır. Böylece bir çelişki elde ettik. Sonuç olarak $[a, b) \not\cong [c, d]$ bulunur. □

Alıştırmalar 4.3

1. Yukarıdakilerden her aralığın aşağıdaki uzaylardan sadece bir tanesine homeomorfik olduğunu çıkarınız:

$$\{0\}; \qquad (0,1); \qquad [0,1]; \qquad [0,1).$$

2. $\mathbb{R}$'nin birden fazla noktalı her sayılabilir alt uzayının bağlantısız olduğunu Önerme 4.3.5'den çıkarınız. (Özellikle $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ bağlantısıztır.)

3. X, $\mathbb{R}^2$'de birim çember olsun; yani $X = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$ ve alt uzay topolojisine sahip olsun.

   (i) $X \setminus \{\langle 1, 0\rangle\}$'in $(0,1)$ açık aralığına homeomorfik olduğunu gösteriniz.

   (ii) $X \not\cong (0,1)$ ve $X \not\cong [0,1]$ olduğunu çıkarınız.

   (iii) Her $a \in X$ noktası için $X \setminus \{a\}$ alt uzayının bağlantılı olduğunu gözlemleyerek, $X \not\cong [0,1)$ olduğunu gösteriniz.

   (iv) X'in herhangi aralığa homeomorfik olmadığını çıkarınız.

4. $\mathbb{R}^2$'nin Y alt uzayı

$$Y = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

   olarak verilsin.

   (i) Y yukarıdaki Alıştırma 3'deki X uzayına homeomorfik midir?

   (ii) Y bir aralığa homeomorfik midir?

5. $\mathbb{R}^2$'nin Z alt uzayı

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-3/2)^2 + y^2 = 1\}.$$

   olarak verilsin. Aşağıdakileri kanıtlayınız.

   (i) Z herhangi aralığa homeomorfik değildir, ve

   (ii) Z, yukarıdaki Alıştırma 3 ve 4'teki X ve Y uzaylarına homeomorfik değildir.

6. Sorgenfrey doğrusu $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ veya bu uzaylardan herhangi birinin alt uzayına homeomorfik değildir.

7. (i) Örnekler 1.1 #5 (i)'deki topolojik uzay Örnekler 1.1 #9 (ii)'deki uzaya homeomorfik değildir.

(ii)* Örnekler 1.1 #5'de $(X, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T}_2)$ midir?

(iii)* Örnekler 1.1 # 9'de $(X, \mathcal{T}_2) \cong (X, \mathcal{T}_9)$ midir?

8. X sonsuz bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadelerin her birini ispatlayınız. (orijinali ilk olarak [106] tarafından ispatlanmıştır).

(i)* $\mathcal{T}_1$ ayrık olmayan topoloji iken veya $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ bir T_0-uzayı iken $(X, \mathcal{T})$ uzayı $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir alt uzayına homeomorfiktir.

(ii)** $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_2$ sonlu-kapalı topoloji veya ayrık topoloji olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir alt uzayına homeomorfiktir.
.

(iii) Herhangi sonsuz Hausdorff uzayı bir sonsuz ayrık alt uzay içerir ve böylece bir alt uzay ayrık topoloji ile verilen $\mathbb{N}$'ye homeomorfiktir, (ii)'den elde ediniz.

(iv)** $(X, \mathcal{T})$, T_1-uzayı olmayan bir T_0-uzayı olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayı $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_3)$ uzayına homeomorfik olan bir alt uzaya sahiptir, öyle ki $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathbb{N}$, $\emptyset$ ve tüm $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ kümelerini içerir ya da $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathbb{N}$, $\emptyset$ ve tüm $\{n, n+1, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ kümelerini içerir.

(v) Yukarıdan çıkarınız ki, $\mathcal{T}_4$ ayrık olmayan topoloji, ayrık topoloji, sonlu-kapalı topoloji ya da (iv)'de tanımlanan, sırasıyla, **baslangıç bölüt topolojisi** ve **bitiş bölüt topolojisi** olarak bilinen topolojilerden biri olmak üzere her sonsuz topolojik uzay $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_4)$ uzayına homeomorfik bir alt uzaya sahiptir. İlaveten $\mathbb{N}$ üzerinde bu beş topolojiden herhangi ikisi birbirine homeomorfik değildir.

9. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ iki topolojik uzay olsun. Bir $f : X \to Y$ dönüşümü U kümesini $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir V açık alt uzayına homemorfik olarak dönüştürecek şekilde her $x \in X$ noktasının bir U açık komşuluğu varsa; yani $\mathcal{T}$'dan U üzerine indirgenmiş topoloji $\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_1$'den $V = f(U)$ üzerine indirgenmiş topoloji $\mathcal{T}_3$ iken f dönüşümü $(U, \mathcal{T}_2)$'den $(V, \mathcal{T}_3)$'e bir homemorfizm ise f dönüşümüne **yerel homeomorfizm** denir. Eğer $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayından $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayının içine bir yerel homeomorfizm varsa $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ **yerel olarak homeomorfik**dir, denir.

   (i) $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ homeomorfik topolojik uzaylar ise $(X, \mathcal{T})$'nun $(Y, \mathcal{T}_1)$'e yerel olarak homeomorfik olduğunu kanıtlayınız.

   (ii) $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}_1)$'in açık alt uzayı ise $(X, \mathcal{T})$'nun $(Y, \mathcal{T}_1)$'e yerel olarak homeomorfik olduğunu ispatlayınız.

   (iii)* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ bir yerel homeomorfizm ise f dönüşümü $(X, \mathcal{T})$'nun her açık alt kümesini $(Y, \mathcal{T}_1)$'in bir açık alt kümesine dönüştürür, ispatlayınız.

10. A, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $O \subseteq A \subseteq \overline{O}$ olacak şekilde bir $O \in (X, \mathcal{T})$ varsa A kümesine **yarı-açık** denir. Aşağıdakileri doğrulayınız:

    (i) Her açık küme bir yarı-açık kümedir;

    (ii) Bir kapalı küme bir yarı-açık küme olmak zorunda değildir;

    (iii) Eğer A, $\mathbb{R}$'de tek nokta kümesinden farklı bir aralık ise A, $\mathbb{R}$'nin yarı-açık alt kümesidir;

    (iv) Eğer $\mathcal{T}$ sonlu-kapalı topoloji, ayrık topoloji ya da ayrık olmayan topoloji ise yarı-açık kümeler kesinlikte açık kümelerdir.

4.4 Dipnot

Eskilerinden yeni topolojik uzaylar üretmenin üç önemli yolu vardır. Bunlar; alt uzaylar, çarpım ve bölüm uzayları oluşturmaktır. Sırası geldikçe üçünü de inceleyeceğiz Alt uzaylar oluşturmayı bu bölümde irdelendik. Bu da $\mathbb{Q}$, $[a, b]$, (a, b), vb. önemli uzayları tanıtmamıza imkan verdi.

Homeomorfizmin esas kavramını tanımlandık. "$\cong$"nin bir denklik bağıntısı olduğunu gördük. Eğer bir özellik homeomorfizm ile korunuyorsa; yani $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T})$ bir özelliğe sahip iken $(Y, \mathcal{T}_1)$ uzayı da bu özelliğe sahip olmak zorunda ise bu özelliğe **topolojik özellik** denir. Bağlantılılığın bir topolojik özellik olduğu gösterildi. Bundan dolayı bağlantılı bir uzaya homeomorfik olan herhangi uzay bağlantılı olmak zorundadır. (Diğer birkaç topolojik özellik de tanımlandı.) $\mathbb{R}$'de bir aralık kavramını tanımladık ve aralıkların $\mathbb{R}$'nin bağlantılı alt uzayları olduklarını açık bir şekilde gösterdik.

$(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ gibi iki topolojik uzay verildiğinde bunların homemorfik olup olmadıklarnı göstermek ilgi çekici bir vazifedir. $\mathbb{R}$'deki her aralığın $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ ve $\{0\}$'dan bir ve yalnız birine homeomorfik olduğunu ispatladık. Bir sonraki bölümde $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{R}^2$'ye homeomorfik olmadığını görmekteyiz. $\mathbb{R}^2$'nin $\mathbb{R}^3$'e homeomorfik olmadığını göstermek daha çetin bir problemdir. Bu Jordan eğri teoremi yardımıyla daha sonra yapılacaktır. Yine kaymağın kaymağı benzetmesinden $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ olması için gerek ve yeter şart $n = m$ olmasıdır. Buna en iyi yaklaşım (bu kitapta sadece şöyle bir değindiğimiz) cebirsel topoloji yardımıyla olur.

Alıştırmalar 4.2 #6'da özünde ilginç ve önemli bir konu olan homeomorfizmler grubu kavramı tanımlandı.

Bölüm 5

Sürekli Fonksiyonlar

Giriş

Soyut matematiğin pek çok dalında kategori teorisinin "nesneler" ve "oklar" olarak adlandırılan kavramları çalışılır. Lineer cebirde nesneler, vektör uzayları ve oklar ise lineer dönüşümlerdir. Küme teorisinde nesneler kümeler ve oklar ise fonksiyonlar iken grup teorisinde nesneler, gruplar ve oklar da homomorfizmlerdir. Topolojide de nesneler topolojik uzaylardır. Biz şimdi okları, yani sürekli fonksiyonları tanıtacağız.

5.1 Sürekli Fonksiyonlar

Şüphesiz halihazırda $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye sürekli fonksiyonlar kavramına[1] aşinayız.

Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.Eğer her $a \in \mathbb{R}$ noktası ve her ε pozitif gerçel sayısı için $\mid x - a \mid < \delta$ iken $\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$ olacak şekilde δ sayısı varsa f fonksiyonuna **sürekli** fonksiyon denir.

Bu tanımı "mutlak değer"in veya "çıkarma işlemi"nin olmadığı topolojik uzaylara nasıl genelleyeceğimiz hiç de açık değildir. O halde genellemeye daha uygun olan sürekliliğin bir diğer (denk) tanımı yapmalıyız.

[1] Bu bölümün baş kısımlarında reel analizin bazı kavramlarını, özellikle sürekliliğin ε–δ tanımını bildiğiniz kabul edilir. Eğer durum böyle değilse doğrudan Tanım 5.1.3'e ilerleyiniz. Eğer bu alandaki bilgilerinizi tazelemek isterseniz Gutenberg Projesi kapsamında http://www.gutenberg.org/ebooks/38769 linkinden ücretsiz olarak indirebileceğiniz G.H. Hardy tarafından yazılan 'A course of pure mathematics" isimli klasik kitaba bakmak isteyebilirsiniz.

Kolayca görülür ki **$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir $a \in \mathbb{R}$ ve her bir $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, yani her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ var olmasıdır öyle ki $x \in (a - \delta\, , \, a + \delta)$ için $f(x) \in (f(a) - \varepsilon\, , \, f(a) + \varepsilon)$'dir.**

Bu tanım "mutlak değer" kavramını içermediğinden bir ilerlemedir ancak hala "çıkarma işlemini" içermektedir. Bir sonra ki lemma çıkarma işleminden nasıl kurtulacağımızı gösterir.

5.1.1 Lemma. f fonksiyonu $\mathbb{R}$'den kendi içine bir dönüşüm olsun. Bu durumda f'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart her $a \in \mathbb{R}$ noktası için ve $f(a)$'yı içeren her U açık kümesi için $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde a'yı içeren bir V açık kümesi vardır.

İspat. f'nin sürekli olduğunu kabul edelim. $a \in \mathbb{R}$ ve U kümesi $f(a)$'yı içeren herhangi açık küme olsun. Bu durumda $f(a) \in (c, d) \subseteq U$ olacak şekilde c ve d gerçel sayıları vardır. ε sayısı $d - f(a)$ ve $f(a) - c$ sayılarından küçük olana eşit olsun. Böylece

$$(f(a) - \varepsilon\, , \, f(a) + \varepsilon) \subseteq U$$

olur. f dönüşümü sürekli olduğundan her $x \in (a - \delta\, , \, a + \delta)$ için $f(x) \in (f(a) - \varepsilon\, , \, f(a) + \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. V, $(a - \delta, a + \delta)$ açık kümesi olsun. Bu durumda istenildiği gibi $a \in V$ ve $f(V) \subseteq U$ olur.

Tersine her bir $a \in \mathbb{R}$ için ve $f(a)$'yı içeren U açık kümesi için $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde a'yı içeren bir V açık kümesi var olsun. f'nin sürekli olduğunu göstermeliyiz. $a \in \mathbb{R}$ ve ε herhangi pozitif gerçel sayı olsun. $U = (f(a) - \varepsilon\, , \, f(a) + \varepsilon)$ alalım. Bu durumda U, $f(a)$'yı içeren bir açık küme olur. Bu sebeple $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde a'yı içeren bir V açık kümesi vardır. V kümesi a'yı içeren bir açık küme olduğundan $a \in (c, d) \subseteq V$ olacak şekilde c ve d gerçel sayıları bulunur. δ'yı $d - a$ ve $a - c$ sayılarından küçük olanına eşit olacak şekilde seçelim, böylece $(a - \delta\, , \, a + \delta) \subseteq V$ olur. Dolayısıyla her $x \in (a - \delta\, , \, a + \delta)$ için istenildiği gibi $f(x) \in f(V) \subseteq U$ bulunur. O halde f süreklidir. □

Sürekliliği tanımlamak için Lemma 5.1.1'deki özelliği kullanabilirdik fakat bir sonra ki lemma daha düzgün bir tanım yapmamızı sağlayacaktır.

5.1.2 Lemma. f bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayından bir $(Y, \mathcal{T}')$ topolojik uzayı içine tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

(i) her $U \in \mathcal{T}'$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$'dur,

(ii) her $a \in X$ için ve $f(a) \in U$ iken her $U \in \mathcal{T}'$ ve $a \in V$ için $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır.

İspat. Kabul edelim ki (i) koşulu sağlansın. $a \in X$ ve $f(a) \in U$ ile birlikte $U \in \mathcal{T}'$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ olur. $V = f^{-1}(U)$ alalım. Böylece $a \in V$, $V \in \mathcal{T}$ ve $f(V) \subseteq U$ elde ederiz. Bunun sonucu (ii) koşulu sağlanır.

Tersine, (ii) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $U \in \mathcal{T}'$ olsun. Eğer $f^{-1}(U) = \emptyset$ ise açıkça $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ olur. Eğer $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ değilse $a \in f^{-1}(U)$ alalım. Bu durumda $f(a) \in U$ olur. O halde $a \in V$ ve $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ kümesi vardır. Dolayısıyla her $a \in f^{-1}(U)$ için $a \in V \subseteq f^{-1}(U)$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Sonuç 3.2.9'dan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ elde edilir. Sonuç olarak (i) koşulu sağlanır. □

Lemmalar 5.1.1 ve 5.1.2 birlikte alındığında görülür ki; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ süreklidir ancak ve ancak $\mathbb{R}$'nin her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$ açık bir kümedir.

Bu ifade iki topolojik uzay arasındaki sürekli fonksiyon kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamamızda bize fikir vermektedir:

5.1.3 Tanım. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve f, X'den Y'ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $U \in \mathcal{T}_1$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ ise $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ dönüşümüne **sürekli dönüşüm** denir.

Yukarıdaki uyarılardan sürekliliğin bu tanımının $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}_1) = \mathbb{R}$ durumumdaki alışılmış tanımla çakıştığı görülmektedir.

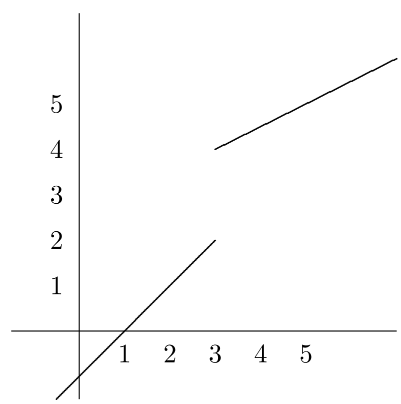
Sürekliliğin bu tanımının pratiğe nasıl güzel uygulandığını bir kaç örnek inceleyerek görelim.

5.1.4 Örnek. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x$ olarak verilsin. Yani f özdeşlik dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathbb{R}$'deki herhangi U açık kümesi için $f^{-1}(U) = U$ olduğundan $f^{-1}(U)$ açık kümedır. Sonuç olarak f süreklidir. □

5.1.5 Örnek. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir c sabiti ve her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ verilsin. U, $\mathbb{R}$'de herhangi açık küme olsun. Eğer $c \in U$ ise açıkça $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ olur. Eğer $c \notin U$ ise $f^{-1}(U) = \emptyset$ olur. Her iki durumda da $f^{-1}(U)$ açıktır. Dolayısıyla f süreklidir. □

5.1.6 Örnek. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \quad , & x \leq 3, \\ \frac{1}{2}(x+5), & x > 3. \end{cases}$$



> Bir dönüşümün sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık kümenin tersinin bir açık küme olmasıdır.
>
> Bu sebeple f'nin sürekli `olmadığını` göstermek için $f^{-1}(U)$ açık olmayacak şekilde sadece bir U açık kümesi bulmalıyız.

O zaman $f^{-1}((1,3)) = (2,3]$ olur ki bu açık bir küme değildir. Dolayısıyla f sürekli değildir. □

Lemma 5.1.2'nin aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebileceğini görmekteyiz.[2]

5.1.7 Önerme. f, bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayından bir $(Y, \mathcal{T}')$ topolojik uzayı içine tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda f süreklidir ancak ve ancak her $x \in X$ için ve $f(x) \in U$ olmak üzere her $U \in \mathcal{T}'$ için $x \in V$ ve $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. □

5.1.8 Önerme. $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}_1)$ ve $(Z, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylar olsunlar. Eğer $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ ve $g : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$ sürekli dönüşümler ise $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_2)$ bileşke fonksiyonu süreklidir.

İspat.

$g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$ bileşke fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için $U \in \tau_2$ ise $(g \circ f)^{-1}(U) \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz.

Bununla birlikte $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$'dir.

U, $(Z, \mathcal{T}_2)$'de herhangi açık küme olsun. g sürekli olduğundan $g^{-1}(U)$ kümesi $\mathcal{T}_1$'de açıktır. Bununla birlikte f fonksiyonu da sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(U))$ kümesi $\mathcal{T}$'da açıktır. Ayrıca $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$'dır. Böylece $g \circ f$ süreklidir. □

Aşağıdaki önerme istenildiğinde sürekliliğin açık kümeler yerine kapalı kümeler cinsinden tanımlanabileceğini göstermektedir.

5.1.9 Önerme. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar olsunlar. Bu durumda $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ süreklidir ancak ve ancak Y'deki her S kapalı kümesi için $f^{-1}(S)$, X'de kapalı bir kümedir.

İspat. Bu ispat

$$f^{-1}(S\text{'nin tümleyeni}) = f^{-1}(S)\text{'nin tümleyeni} \qquad \square$$

olduğu göz önüne alınarak kolayca sonuçlanır.

[2] Eğer Lemma 5.1.2'yi ve ispatını henüz okumadıysanız şimdi yapmalısınız.

5.1.10 Uyarı. Sürekli fonksiyonlar ve homeomorfizmler arasındaki ilişki şu şekildedir: $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ bir homeomorfizm ise$f$ sürekli bir dönüşümdür. Tabii ki her sürekli fonksiyon bir homeomorfizm olmayabilir.

Bununla birlikte ispatı "süreklilik" ve "homeomorfizm" tanımlarından yapılan bir aşağıdaki önerme tüm hikayeyi anlatmaktadır.

5.1.11 Önerme. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}')$ topolojik uzaylar ve f, X'den Y'ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda f bir homeomorfizmdir ancak ve ancak

(i) f süreklidir,

(ii) f bire-bir ve örtendir; yani $f^{-1} : Y \to X$ ters fonksiyonu vardır ve

(iii) f^{-1} süreklidir. □

Bir diğer faydalı çıkarım ise sürekli bir fonksiyonun kısıtlanışının da sürekli bir fonksiyon olduğunu belirten aşağıdaki önermedir. Bunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır – ayrıca bkz. Alıştırmalar 5.1 #8.

5.1.12 Önerme. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ bir sürekli dönüşüm, A, X'in bir alt kümesi ve $\mathcal{T}_2$, A üzerine indirgenmiş topoloji olsun. Dahası $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{T}_1)$, dönüşümüne f'nin A'ya kısıtlanışı olsun. Yani her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ olsun. Bu durumda g süreklidir.

Alıştırmalar 5.1

1. (i) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ sabit bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olduğunu gösteriniz.

   (ii) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ özdeşlik dönüşümü olsun. f'nin sürekli olduğunu gösteriniz.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

   olarak verilsin.

   (i) Örnek 5.1.6'daki metodu kullanarak f'nin sürekli olmadığını kanıtlayınız.

(ii) $f^{-1}\{1\}$'i bulunuz ve Önerme 5.1.9'u kullanarak f'nin sürekli olmadığı sonucunu çıkarınız.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ x+2, & x > 1, \end{cases}$$
olarak tanımlansın. f sürekli midir? (Cevabınızı doğrulayınız.)

4. $\mathbb{R}$'nin $(X, \mathcal{T})$ alt uzayı $X = [0,1] \cup [2,4]$ ile verilsin. $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 2, & x \in [2,4], \end{cases}$$
olarak tanımlansın. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayınız. (Bu sizi şaşırtıyor mu?)

5. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve $\mathcal{B}_1$ sınıfı $\mathcal{T}_1$ için bir taban olsun. Bir $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart her $U \in \mathcal{B}_1$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ olmasıdır, gösteriniz.

6. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve f, X'den Y'ye tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık uzay ise f'nin sürekli olduğunu kanıtlayınız.

7. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve f, X'den Y'ye tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $(X, \mathcal{T})$ bir ayrık olmayan uzay ise f'nin sürekli olduğunu kanıtlayınız.

8. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ bir sürekli dönüşüm olsun. X'in bir alt kümesi A, A üzerine indirgenmiş topoloji $\mathcal{T}_2$, $B = f(A)$, B üzerine indirgenmiş topoloji $\mathcal{T}_3$ ve f'nin A'ya kısıtlanışı $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (B, \mathcal{T}_3)$ olsun. g'nin sürekli olduğunu ispatlayınız.

9. f bir $(X, \mathcal{T})$ uzayından bir $(Y, \mathcal{T}\,')$ uzayı içine tanımlı bir dönüşüm olsun. f süreklidir ancak ve ancak her $x \in X$ için ve $f(x)$'in her N komşuluğu için $f(M) \subseteq N$ olacak şekilde x'in bir M komşuluğu vardır, ispatlayınız.

10. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. Eğer $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ ise $\mathcal{T}_1$'e $\mathcal{T}_2$'den **daha ince topoloji** (ve $\mathcal{T}_2$'ye $\mathcal{T}_1$'den **daha kaba topoloji**) denir. Aşağıdakileri ispatlayınız.

(i) $\mathbb{R}$ Öklid topolojisi, $\mathbb{R}$ üzerindeki sonlu-kapalı topolojiden daha incedir.

(ii) $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ özdeşlik dönüşümü süreklidir ancak ve ancak $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$'den daha ince topolojidir.

11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, her q rasyonel sayısı için $f(q) = 0$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

12. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer f bire-bir ise aşağıdakileri ispatlayınız;

    (i) $(Y, \mathcal{T}_1)$ Hausdorff ise $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff'tur.

    (ii) $(Y, \mathcal{T}_1)$ bir T_1-uzayı ise $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayıdır.

13. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve f, $(X, \mathcal{T})$'den $(Y, \mathcal{T}_1)$'ye bir fonksiyon olsun. f sürekli olması için gerek ve yeter şart X'in her A alt kümesi için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ olmasıdır, ispatlayınız.

    [İpucu: Önerme 5.1.9'den faydalanınız.]

5.2 Ara Değer Teoremi

5.2.1 Önerme. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{T}_1)$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ örten ve sürekli olsun. Eğer $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı ise $(Y, \mathcal{T}_1)$ bağlantılıdır.

İspat. Varsayalım $(Y, \mathcal{T}_1)$ bağlantılı olmasın. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $U \neq Y$ olacak şekilde bir hem açık hem kapalı U alt kümesi vardır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ açık bir kümedir ve ayrıca Önerme 5.1.9'dan da kapalı bir kümedir. Yani $f^{-1}(U)$, X'in hem açık hem kapalı bir alt kümesidir. f örten ve $U \neq \emptyset$ olduğundan $f^{-1}(U) \neq \emptyset$'dir. Ayrıca $f^{-1}(U) \neq X$'dir, eğer öyle olmasaydı f'nin örtenliğinden U, Y'ye eşit olurdu. Sonuç olarak $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı değildir. Bu bir çelişkidir. O halde $(Y, \mathcal{T}_1)$ bağlantılıdır. □

5.2.2 Uyarılar. (i) Eğer "örtenlik" koşulu kaldırılırsa yukarıdaki önerme yanlış olur. (Buna bir örnek bulunuz.)

(ii) Basit bir şekilde açıklarsak Önerme 5.2.1 ifade etmektedir ki: **bağlantılı bir kümenin herhangi sürekli görüntüsü bağlantılıdır.**

(iii) Önerme 5.2.1'a göre $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı bir uzaysa ve $(Y, \mathcal{T}')$ bağlantılı değil (yani **bağlantısız**) ise $(X, \mathcal{T})$'dan $(Y, \mathcal{T}')$ üzerine tanımlı sürekli hiçbir fonksiyon yoktur. Örneğin $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Q}$ üzerine (ya da $\mathbb{Z}$ üzerine) tanımlı sonsuz sayıda fonksiyon vardır ancak hiçbiri sürekli değildir. Aslında Alıştırmalar 5.2 # 10'da $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Q}$ *içine* ($\mathbb{Z}$ içine) sürekli fonksiyonların sadece sabit fonksiyonlar olduğunu gözlemleyeceğiz. $\square$

Bağlantılılık kavramının aşağıdaki kuvvetlendirilmiş versiyonu çoğu kez daha kullanışlıdır.

5.2.3 Tanım. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında her farklı a ve b noktaları için $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ olacak şekilde $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$ sürekli fonksiyonu varsa $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına **yol-bağlantılı** (veya **yolsal bağlantılı**) denir. f dönüşümüne ***a* noktasınıı *b* noktasına bağlayan yol** denir.

5.2.4 Örnek. Her aralığın yol-bağlantılı olduğu kolaylıkla görülür. $\square$

5.2.5 Örnek. Her $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ yol-bağlantılıdır. $\square$

5.2.6 Önerme. Her yol-bağlantılı uzay bağlantılıdır.

İspat. $(X, \mathcal{T})$ bir yol-bağlantılı uzay olsun ve varsayalım bağlantılı olmasın.

Bu durumda boştan farklı hem açık hem kapalı U özalt kümesi vardır. Öyleyse $a \in U$ ve $b \in X \setminus U$ olacak şekilde a ve b vardır. $(X, \mathcal{T})$ yol-bağlantılı olduğundan $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ olacak şekilde bir $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$ sürekli fonksiyonu vardır.

Bununla birlikte $f^{-1}(U)$, $[0, 1]$'in hem açık hem kapalı alt kümesidir. $a \in U$ olduğundan $0 \in f^{-1}(U)$ olur ve böylece $f^{-1}(U) \neq \emptyset$'dır. $b \notin U$ olduğundan $1 \notin f^{-1}(U)$ olur ve bundan dolayı $f^{-1}(U) \neq [0, 1]$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f^{-1}(U)$, $[0, 1]$'in boştan farklı hem açık hem kapalı özalt kümesidir. Bu $[0, 1]$'in bağlantılılığı ile çelişir.

Sonuç olarak $(X, \mathcal{T})$ bağlantılıdır. $\square$

5.2.7 Uyarı. Önerme 5.2.6'nın tersi doğru değildir. Yani her bağlantılı uzay yol-bağlantılı değildir. Böyle bir uzaya bir örnek $\mathbb{R}^2$'nin aşağıdaki alt uzayıdır:

$$X = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\} \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}.$$

[Alıştırmalar 5.2 #6, X'in bağlantılı olduğunu göstermektedir. $\langle 0, 0\rangle$ noktasını $\langle 1/\pi, 0\rangle$ noktasına bağlayan hiçbir yol olmadığından X yol-bağlantılı değildir. Bir şekil çiziniz ve bununla iddianızın doğru olduğunu görünüz.] $\square$

Şimdi $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ olduğunu gösterebiliriz.

5.2.8 Örnek. $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$'nin yol-bağlantılı olduğu açıktır ve öyleyse Önerme 5.2.6'dan bağlantılıdır. Bununla birlikte Önerme 4.2.5'dan $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ bağlantısızdır. Dolayısıyla $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ olur. $\square$

Şimdi topolojinin bir gerçel değerli fonksiyonlar teorisine güzel bir uygulaması olan Weierstrass Ara Değer Teoremini verelım. Sonuçtaki can alıcı topolojik kavram bağlantılılıktır.

5.2.9 Teorem. (Weierstrass Ara Değer Teoremi) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a) \neq f(b)$ olsun. Bu durumda $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki her p sayısı için $f(c) = p$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ noktası vardır.

İspat. $[a, b]$ bağlantılı ve f sürekli olduğuna göre Önerme 5.2.1 $f([a, b])$'nin bağlantılı olduğunu ifade eder. Bu Önerme 4.3.5'den $f([a, b])$'nin bir aralık olmasını gerektirir. $f(a)$ ve $f(b)$ noktaları $f([a, b])$'nin içindedir. O halde eğer p, $f(a)$ ve $f(b)$ arasında ise $p \in f([a, b])$ olur; yani bazı $c \in [a, b]$ sayıları için $p = f(c)$'dir. $\square$

5.2.10 Sonuç. Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ise $f(x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in [a, b]$ vardır. $\square$

5.2.11 Sonuç. (Sabit Nokta Teoremi) f, $[0,1]$'den $[0,1]$'e tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z) = z$ olacak şekilde bir $z \in [0,1]$ vardır. (z noktası **sabit nokta** olarak adlandırılır.)

İspat. Eğer $f(0) = 0$ ya da $f(1) = 1$ ise sonucun doğru olduğu aşikardır. O halde $f(0) > 0$ ve $f(1) < 1$ durumunu göz önüne almak yeterli olacaktır.

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x - f(x)$ olarak tanımlansın. Açıkça g sürekldir, $g(0) = -f(0) < 0$ ve $g(1) = 1 - f(1) > 0$ olur. Bu nedenle Sonuç 5.2.10'dan $g(z) = 0$ yani $z - f(z) = 0$ veya $f(z) = z$ olacak şekilde bir $z \in [0,1]$ vardır. □

5.2.12 Uyarı. Sonuç 5.2.11, bir n-boyutlu kübü kendi içine sürekli bir şekilde resmedildiğinde bir sabit noktanın olacağını ifade eden Brouwer Sabit Nokta Teoremi olarak bilinen çok önemli bir teoremin özel bir halidir. [Bu teoremin pek çok ispatı vardır ancak çoğu cebirsel topolojinin metotlarına dayanır. En sade ispat Kuratowski [163]'de syf. 238–239'da verilmiştir.]

Alıştırmalar 5.2

1. Yol-bağlantılı bir uzayın bir süreki görüntüsünün yol-bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

2. a, $b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığından kendi içine tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bir sabit noktanın var olduğunu kanıtlayınız.

3. (i) Sonuç 5.2.11'de her yerde $[0,1]$ ile $(0,1)$ yer değiştirdiğimizde Sonuç 5.2.11'in yanlış olacağını gösteren bir örnek veriniz.

   (ii) Eğer bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzaydan kendi içine tanımlı her sürekli fonksiyon bir sabit noktaya sahipse $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına **sabit nokta özelliği**ne sahiptir denir. Sabit nokta özelliğine sahip aralıkların sadece kapalı aralıklar olduğunu gösteriniz. .

   (iii) X en az iki noktalı bir küme olsun. $(X, \mathcal{T})$ ayrık uzayının ve $(X, \mathcal{T}')$ ayrık olmayan uzayının sabit-nokta özelliğine sahip olmadığını ispatlayınız.

   (iv) Sonlu-kapalı topolojili bir uzay sabit-nokta özelliğine sahip midir?

   (v) Eğer $(X, \mathcal{T})$ uzayı sabit-nokta özelliğine sahip ve $(Y, \mathcal{T}_1)$, $(X, \mathcal{T})$ uzayına homeomorfik ise $(Y, \mathcal{T}_1)$ sabit-nokta özelliğine sahiptir, ispatlayınız.

4. $\{A_j : j \in J\}$ bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bağlantılı alt uzaylarının bir ailesi olsun. Eğer $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ ise $\bigcup_{j \in J} A_j$ bağlantılıdır, gösteriniz.

5. A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bağlantılı bir alt uzayı olsun. $\overline{A}$'nın da bağlantılı olduğunu ispatlayınız. Öncelikle $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ ise B'nin bağlantılı olduğunu gösteriniz.

6. (i) $\mathbb{R}^2$'nin $Y = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\}$ alt uzayının bağlantılı olduğunu gösteriniz.
   [İpucu: Önerme 5.2.1'i kullanınız.]

   (ii) $\overline{Y} = Y \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}$ olduğunu doğrulayınız.

   (iii) Alıştırma 5'i kullanarak $\overline{Y}$ alt uzayının bağlantılı olduğunu gözlemleyiniz.

7. E, $\mathbb{R}^2$'deki her iki koordinatı da rasyonel olan tüm noktaların kümesi olsun. $\mathbb{R}^2 \setminus E$ uzayının yol-bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

8.* C, $\mathbb{R}^2$'nin herhangi sayılabilir alt kümesi olsun. $\mathbb{R}^2 \setminus C$ uzayının yol-bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

9. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve a, X'de herhangi nokta olsun. **a'nın X'deki bileşeni** $C_X(a)$, X'in a'yı içeren tüm bağlantılı alt kümelerinin bir birleşimi olarak tanımlıdır. Aşağıdakileri gösteriniz;

   (i) $C_X(a)$ bağlantılıdır. (Yukarıdaki Alıştırma 4'ü kullanınız.)

   (ii) $C_X(a)$, a'yı içeren en büyük bağlantılı kümedir.

   (iii) $C_X(a)$, X'de kapalıdır. (Yukarıdaki Alıştırma 5'i kullanınız.)

10. Eğer bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının her boştan farklı bağlantılı alt kümesi bir tek nokta kümesi ise $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına **tamamen bağlantısız** denir. Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.

   (i) $(X, \mathcal{T})$ tamamen bağlantısız olması için gerek ve yeter şart her $a \in X$ için $C_X(a) = \{a\}$ olmasıdır. (Alıştırma 9'daki gösterime bakınız.)

   (ii) Alışılmış topoloji ile verilen tüm rasyınel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ tamamen bağlantısızdır.

   (iii) Eğer f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Q}$ içine tanımlı sürekli bir fonksiyon ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Q}$ vardır.

   (iv) Tamamen bağlantısız bir uzayın her alt uzayı tamamen bağlantısızdır.

   (v) $\mathbb{R}^2$ 'nin her sayılabilir alt uzayı tamamen bağlantısızdır.

   (vi) Sorgenfrey doğrusu tamamen bağlantısızdır.

11. (i) Alıştırma 9'u kullanarak doğal bir yolla bir topolojik uzayda bir noktanın "yol-bileşenini" tanımlayınız.
   (ii) Herhangi topolojik uzayda her yol-bileşenin yol-bağlantılı bir uzay olduğunu ispatlayınız.
   (iii) Eğer $(X, \mathcal{T})$, X'deki her noktanın yol-bağlantılı bir komşuluğa sahip olacağışekilde özelliğe sahip bir topolojik uzay ise her yol-bileşenin bir açık küme olduğunu ispatlayınız. Her yol-bileşenin bir kapalı küme olduğu sonucunu da çıkarınız.
   (iv) $\mathbb{R}^2$'nin bir açık alt kümesinin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart yol-bağlantılı olmasıdır, (iii)'yi kullanarak ispatlayınız.

12.* A ve B bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Eğer A ve B her ikisi de açık veya her ikisi de kapalı iken $A \cup B$ ve $A \cap B$ her ikisi de bağlantılı ise A ve B bağlantılıdır, gösteriniz.

13. Eğer bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı için hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir taban varsa $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına **sıfır-boyutlu** denir. Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız:
   (i) $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{P}$ sıfır-boyutlu uzaylardır.
   (ii) Bir sıfır-boyutlu uzayın bir alt uzayı da sıfır-boyutludur.
   (iii) Bir sıfır-boyutlu Hausdorff uzayı tamamen bağlantısızdır. (Bkz. Alıştırma 10)
   (iv) Her ayrık olmayan uzay sıfır-boyutludur.
   (v) Her ayrık uzay sıfır-boyutludur.
   (vi) Birden fazla noktalı ayrık olmayan uzaylar tamamen bağlantısızdır.
   (vii) Bir sıfır-boyutlu T_0-uzayı Hausdorff uzayıdır.
   (viii)* $\mathbb{R}$'nin bir alt uzayı sıfır-boyutludur ancak ve ancak tamamen bağlantısızdır.

14. Her yerel homeomofizmin sürekli bir dönüşüm olduğunu gösteriniz. (Bkz. Alıştırmalar 4.3#9.)

5.3 Dipnot

Bu bölümde topolojik uzaylar arasında her açık kümenin ters görüntüsü bir açık küme olacak şekilde bir özelliğe sahip olan dönüşüme "sürekli" dönüşüm dedik. Bu güzel bir tanımdır ve anlaşılması kolaydır. Bu tanım bölümün başında bahsi geçen reel analizde verilen tanımla mukayese edilmektedir. Sadece genelleştirmenin hatırı için değil aynı zamanda gerçekte ne olup bittiğini görmek için reel analizdeki tanımı genelleştirdik.

Weierstrass Ara Değer Teoremi sezgisel olarak açık görünmektedir fakat şimdi bunun $\mathbb{R}$'nin bağlantılı olması ve bir bağlantılı uzayın sürekli görüntüsünün de bağlantılı uzay olması gerçeğinden elde edildiğini görmekteyiz.

Bağlantılılıktan daha kuvvetli bir özelliği yani yol-bağlantılılığı tanıttık. Bir çok durumda bir uzayın bağlantılı olduğunu iddia etmek yeterli değildir, ayrıca yol-bağlantılı olmak zorundadır. Bu özellik cebirsel topolojide önemli bir rol oynar.

Sırası geldiğinde Brouwer Sabit Nokta Teoremine tekrar dönüş yapacağız. Bu kuvvetli bir teoremdir. Sabit nokta teoremlerinin topoloji, fonksiyonel analiz ve difarensiyel denklemler dahil matematiğin çeşitli dallarında önemli rolleri vardır. Günümüzde halen araştırma faaliyetlerinin bir konusudur.

Alıştırmalar 5.2 #9 ve #10'da "bileşen" ve "tamamen bağlantısız" kavramları ile karşılaştık. Her ikisi de bağlantılılığı kavramak için önemlidir.

Ek 1: Sonsuz Kümeler

A1.0 Giriş

Bir zamanlar uzak bir diyarda iki otel varmış; Sonlu Otel (sonlu sayıda odaları olan sıradan bir otel) ve Hilbert'in Sonsuz Oteli ($1, 2, \ldots n, \ldots$ ile numaralandırılmış sonsuz sayıda odaları olan olağanüstü bir otel). Bir gün şehre oda arayan bir ziyaretçi gelmiş. İlk olarak Sonlu Otel'e gitmiş ve tüm odaların dolu olduğu bilgisi verilmiş ve bu yüzden yer temin edememiş. Ancak kendisine her zaman bir oda bulabileceği diğer otel olan Hilbert'in Sonsuz Oteli tarif edilmiş. Böylece Hilbert'in Sonsuz Oteli'ne gitmiş ve orada da tüm odaların dolu olduğu söylenmiş. Ancak bununla birlikte otel görevlisi bu otelde kimseyi çıkarmadan her zaman ekstra bir konuğun ağırlanabileceğini söylemiş. Görevli oda 1'deki misafiri oda 2'ye, oda 2'deki misafiri oda 3'e taşımış ve bu şekilde devam ettiğinde sonuçta oda 1 boş kalmış!

Bu sevimli örnekten sonsuz kümeler ile sonlu kümeler arasında yapısal bir farkın bulunduğunu görmekteyiz. Bu Ek bölümün amacı Sonsuz Kümeler[3] teorisine ayrıntılı ancak çok kısa bir giriş yapmaktır. Eğer daha önce üzerine çalışmamışsanız, bu sürükleyici konuda bir takım sürprizlerle karşılaşacaksınız. "Sonsuz kümelerin eşit oluşturulmadığını"-bazılarının diğerlerinden daha büyük olduğunu öğreneceğiz. İlk bakışta bu ifadenin ne anlama geldiği muhtemelen hiç de açık değildir. "Daha büyük" terimini tanımlamaya ihtiyaç duymaktayız. Hatta "iki küme aynı büyüklüktedir" ile ne demek istediğimizi açıklamamız gerekmektedir.

[3] Küme teorisi hakkında ücretsiz olarak indirilebilecek oldukça güzel ve ayrıntılı bir kitap mevcuttur. "Introduction to the Foundations of Mathematics" isimli bu kitap Raymond L. Wilder tarafından yazılmıştır. Ulaşabileceğiniz linki:
https://ia701202.us.archive.org/27/items/IntroductionToTheFoundationsOfMathematics/Wilder-IntroductionToTheFoundationsOfMathematics.pdf

Bu Ek bölüm için tamamlayıcı gereçleri sağlayan, izlemeniz gereken üç video vardır. Bu videolar "Topology Without Tears – Video 2a, 2b, and 2c – Infinite Set Theory" olarak adlandırıldı.
Kısım (a) YouTube'da at http://youtu.be/9h83ZJeiecg ve Çin Youku sitesinde http://tinyurl.com/m4dlzhh,
Kısım (b) YouTube'da http://youtu.be/QPSRB4Fhzko ve Çin Youku sitesinde http://tinyurl.com/kf9lp8e,
Kısım (c) YouTube'da http://youtu.be/YvqUnjjQ3TQ ve Çin Youku sitesinde http://tinyurl.com/mhlqe93 linklerinden izlenebilir.
Bu videolar Küme Teorisinin Zermelo-Fraenkel (ZF) aksiyomlarının bir irdelemesini ve Russell Paradoksu'nun ZF küme teorisi içinde olmadığını gösteren kısa bir ispatı içermektedir.

A1.1 Sayılabilir Kümeler

A1.1.1 Tanımlar. A ve B iki küme olsun. Eğer hem bire-bir hem de örten olan bir $f : A \to B$ fonksiyonu varsa (yani f bir **bijeksiyon** ya da bir **bire-bir eşleme** ise) A ile B kümelerine **eşgüçlü** kümeler denir ve $A \sim B$ ile gösterilir.

A1.1.2 Önerme. A, B ve C kümeleri verilsin.

(i) Bu durumda $A \sim A$ sağlanır.
(ii) Eğer $A \sim B$ ise $B \sim A$'dır.
(iii) Eğer $A \sim B$ ve $B \sim C$ ise $A \sim C$'dır.

Taslak İspat.

(i) Her $x \in A$ için $f(x) = x$ olarak verilen A üzerindeki f özdeşlik fonksiyonu, A ile kendisi arasında bir bire-bir eşlemedir.

(ii) Eğer f, A'dan B üzerine bir bire-bir ve örten fonksiyon ise B'den A'ya bir g ters fonksiyonuna sahiptir ve böylece g de bir bire-bir eşlemedir.

(iii) Eğer $f\colon A \to B$ bire-bir eşleme ve $g\colon B \to C$ bire-bir eşleme ise onların bileşkesi $gf\colon A \to C$ de bir bire-bir eşlemedir. □

Önerme A1.1.2 "$\sim$" bağıntısının (i) yansıyan, (ii) simetrik, ve (iii) geçişken; yani bir **denklik bağıntısı** olduğunu ifade etmektedir.

A1.1.3 Önerme. $n, m \in \mathbb{N}$ olsun. $\{1, 2, \ldots, n\}$ ile $\{1, 2, \ldots, m\}$ kümeleri eşgüçlüdürler ancak ve ancak $n = m$'dir.

İspat. Alıştırma. □

Şimdi "sonlu küme" ve "sonsuz küme" terimlerini açık bir şekilde tanımlayalım.

A1.1.4 Tanımlar. S bir küme olsun.

(i) Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için S boş küme ise ya da $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi ile eşgüçlü ise **sonlu**dur denir.

(ii) Eğer S sonlu değilse kümeye **sonsuz**dur denir.

(iii) Eğer $S \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ ise S'nin **kardinalitesi** n dir denir ve card $\boldsymbol{S = n}$ ile gösterilir.

(iv) Eğer $S = \emptyset$ ise kardinalitesi 0 olduğu söylenir ve card $\boldsymbol{\emptyset = 0}$ ile gösterilir.

Bir sonraki adım sonsuz kümenin "en küçük" çeşidini tanımlamayı amaçlamaktadır. Böyle kümeler sayılabilir sonsuz olarak adlandırılacaktır. Gelinen noktada herhangi "daha büyük" sonsuz küme çeşidinin var olup olmadığını bilmiyoruz – aslında bu bağlamda "daha büyük" ile ne kastedildiğini de bilmiyoruz.

A1.1.5 Tanımlar. S bir küme olsun.

(i) S kümesi ile $\mathbb{N}$ eşgüçlü ise S kümesinin **sayılabilir sonsuz** olduğu söylenir.

(ii) S kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz ise S kümesine **sayılabilir** denir.

(iii) S kümesi sayılabilir sonsuz ise $\boldsymbol{\aleph_0}$ **kardinalitesine** sahiptir denir ve card $\boldsymbol{S = \aleph_0}$ ile gösterilir.

(iv) S kümesi sayılabilir değilse S'ye **sayılamaz** küme denir.

A1.1.6 Uyarı. S kümesi sayılabilir sonsuz ise $f : \mathbb{N} \to S$ bir bire-bir eşleme ve her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = f(n)$ olmak üzere $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$'dir. Böylece S'nin elemanlarını $\boxed{\text{listeleyebiliriz}}$. S sonlu ve boştan farklı bir küme ise elbette onun elemanlarını da $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ ile listeleyebiliriz. Dolayısıyla herhangi sayılabilir kümenin elemanlarını listeleyebiliriz. Tersine, **eğer S'nin elemanları listelenebilirse S sayılabilirdir.** Çünkü listeleme, $\{1, 2, \ldots, n\}$ ile ya da $\mathbb{N}$ ile bire-bir bir eşleme ile tanımlanır. $\square$

A1.1.7 Örnek. Tüm pozitif çift tam sayıların kümesi S sayılabilir sonsuzdur.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = 2\,n$ ile verilen $f : \mathbb{N} \to S$ fonksiyonu bire-bir bir eşlemedir. $\square$

Örnek A1.1.7 biraz düşünmeye değerdir. Eğer iki küme "aynı büyüklükte" ise aralarında bire-bir eşleme olan iki küme aklımıza gelir. Ancak burada öz alt kümelerinden bir tanesi ile bire-bir eşlemeye sahip olan $\mathbb{N}$ kümesi söz konusudur. Bu durum sonlu kümelerde söz konusu değildir. Gerçekten de sonlu kümeler, öz alt kümelerinden herhangi biriyle eşgüçlü olmayan kümeler olarak karakterize edilebilirler.

A1.1.8 Örnek. Tüm tam sayıların kümesi $\mathbb{Z}$ sayılabilir sonsuzdur.

İspat. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu

$$f(n) = \begin{cases} m, & \text{eğer } n = 2m,\ m \geq 1 \text{ ise,} \\ -m, & \text{eğer } n = 2m+1,\ m \geq 1 \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer } n = 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Böylece f bir bire-bir eşlemedir. $\square$

A1.1.9 Örnek. Tüm tam kare olan pozitif tam sayıların kümesi olarak verilen S sayılabilir sonsuzdur.

İspat. $f(n) = n^2$ ile verilen $f : \mathbb{N} \to S$ fonksiyonu bir bire-bir eşlemedir. $\square$

Örnek A1.1.9 yaklaşık 1600'lerde G. Galileo tarafından ispatlanmıştır. Bu Galileo'yu uğraştırmış ve Galileo, sonsuz kümelerin insanoğlunun çalışma alanı olmadığını söylemiştir.

A1.1.10 Önerme. Eğer bir S kümesi sayılabilir bir kümeyle eşgüçlü ise sayılabilirdir.

İspat. Alıştırma. $\square$

A1.1.11 Önerme. Eğer S bir sayılabilir bir küme ve $T \subset S$ ise T sayılabilirdir.

İspat. S sayılabilir olduğundan bir $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ listesi yazabiliriz. (S sonlu ise sonlu bir liste olur, S sayılabilir sonsuz ise sonsuz bir liste olur.)

(Eğer $T \neq \emptyset$ ise) t_1 , T'de ilk s_i olsun. (Eğer $T \neq \{t_1\}$ ise) t_2, T'de ikinci s_i olsun. (Eğer $T \neq \{t_1, t_2\}$), $\ldots$ ise) t_3, T'de üçüncü s_i olsun, $\ldots$.

Bu işlem T'nin sonlu olması durumunda herhangi bir n için $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ olduğunda sonlanır. Eğer işlem sonlanmıyorsa T'nin elemanlarının bir $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ listesini elde ederiz. Bu liste T'nin her bir elemanını içerir çünkü eğer $s_i \in T$ ise işlemin i.nci adımından sonraya kalmadan s_i'ye ulaşırız; böylece s_i listenin içinde oluşur. O halde T sayılabilir sonsuz olur. Sonuç olarak T, ya sonlu ya da sayılabilir sonsuzdur. $\square$

Örnek A1.1.8 veÖnerme A1.1.11'in doğrudan bir neticesi olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

A1.1.12 Sonuç. $\mathbb{Z}$'nin her alt kümesi sayılabilirdir. $\square$

A1.1.13 Lemma. $i \neq j$ için $S_i \cap S_j = \emptyset$ olmak üzere sayılabilir sonsuz kümelerin sayılabilir sonsuz bir ailesi $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ise $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ sayılabilir sonsuz bir kümedir.

İspat. Her bir S_i kümesi sayılabilir sonsuz küme olduğundan $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in}, \ldots\}$ yazılabilir. Şimdi s_{ij}'leri bir kare dizilim içine koyalım ve onları aşağı ve yukarı doğru köşegen zikzaklar çizerek listeleyelim.

$$
\begin{array}{cccccccc}
s_{11} & \to & s_{12} & & s_{13} & \to & s_{14} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
s_{21} & & s_{22} & & s_{23} & & \cdots & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
s_{31} & & s_{32} & & s_{33} & & \cdots & \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \vdots & & \ddots &
\end{array}
$$

Bu ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$'nin tüm üyelerinin listesinin ve her bir S_i sonsuz olduğu için bu listenin sonsuz olduğunu göstermektedir. Bu yüzden $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ sayılabilir sonsuzdur. $\square$

Lemma A1.1.13'de S_i kümelerinin ikişer ikişer ayrık olduğunu kabul ettik. Eğer ikişer ikişer ayrık değillerse tekrar eden elemanlar silinerek ispat kolay bir şekilde değiştirilebilir:

A1.1.14 Lemma. Eğer $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ailesi sayılabilir sonsuz kümelerin bir sayılabilir sonsuz ailesi ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ sayılabilir sonsuz bir kümedir. □

A1.1.15 Önerme. Sayılabilir kümelerin herhangi sayılabilir ailesinin bileşkesi sayılabilirdir.

İspat. Alıştırma. □

A1.1.16 Önerme. Eğer S ve T sayılabilir sonsuz kümeler ise $S \times T = \{\langle s, t\rangle : s \in S, t \in T\}$ çarpım kümesi sayılabilir bir kümedir.

İspat. $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ ve $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ olsun. Bu durumda

$$S \times T = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\langle s_i, t_1\rangle, \langle s_i, t_2\rangle, \ldots, \langle s_i, t_n\rangle, \ldots\}.$$

Bu yüzden $S \times T$ kümesi sayılabilir sonsuz kümelerin bir sayılabilir sonsuz birleşimidir ve böylece sayılabilir sonsuzdur. □

A1.1.17 Sonuç. Sayılabilir kümelerin her sonlu çarpımı sayılabilirdir. □

Sayılabilir kümeler üzerindeki gözlemlerimizin önemli bir uygulaması için artık hazırız.

A1.1.18 Lemma. Tüm pozitif rasyonel sayılar kümesi olan $\mathbb{Q}^{>0}$ sayılabilir sonsuzdur.

İspat. $i \in \mathbb{N}$ için paydası i olan bütün pozitif rasyonel sayılar kümesi S_i olsun. Bu durumda $S_i = \left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \ldots, \frac{n}{i}, \ldots\right\}$ ve $\mathbb{Q}^{>0} = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ olur. Her bir S_i sayılabilir sonsuz olduğundan Önerme A1.1.15, $\mathbb{Q}^{>0}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu gösterir. $\square$

Artık $\mathbb{Q}$ tüm rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu; yani $\mathbb{Q}$ kümesi ile (görünürde) çok daha küçük bir küme olan $\mathbb{N}$ tüm pozitif tam sayılar kümesi arasında bire-bir bir eşlemenin var olduğunu ispatlamak için hazırız.

A1.1.19 Teorem. Tüm rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzdur.

İspat. Açıkça tüm negatif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{<0}$ ile tüm pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$ eşgüçlüdür ve bu yüzden Önerme A1.1.10 ve Lemma A1.1.18 kullanılarak $\mathbb{Q}^{<0}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu elde ederiz.

Son olarak, $\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, $\mathbb{Q}^{<0}$ ve $\{0\}$ kümelerinin birleşimi olduğundan ve Önerme A1.1.15'den sayılabilir sonsuzdur. $\square$

A1.1.20 Sonuç. Rasyonel sayıların her alt kümesi sayılabilirdir.

İspat. Bu Teorem A1.1.19 ve Önerme A1.1.11'in bir sonucudur. $\square$

A1.1.21 Tanımlar. $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

olacak şekilde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tam sayıları ve bir n doğal sayısı varsa x gerçel sayısına bir **cebirsel sayı** denir. Cebirsel sayı olmayan bir gerçel sayıya **transandantal sayı** veya **aşkın sayı** denir.

A1.1.22 Örnek. Her rasyonel sayı bir cebirsel sayıdır.

İspat. $p, q \in \mathbb{Z}$ ve $q \neq 0$ için $x = \frac{p}{q}$ ise $qx - p = 0$ yazılabilir; yani $n = 1$, $a_0 = q$ ve $a_n = -p$ olmak üzere x bir cebirsel sayıdır. $\square$

A1.1.23 Örnek. $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel olmayan bir cebirsel sayıdır.

İspat. $x = \sqrt{2}$ irrasyonel iken $x^2 - 2 = 0$ denklemi sağlanır ve bu yüzden $\sqrt{2}$ cebirsel bir sayıdır. $\square$

A1.1.24 Uyarı. $\sqrt[4]{5} - \sqrt{3}$ sayısı $x^8 - 12x^6 + 44x^4 - 288x^2 + 16 = 0$ denklemini sağladığı için bir cebirsel sayısı olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. Aslında toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve karekökten, küp kökten,... çıkarma işlemlerinin sadece sonlu tanesi kullanılarak tam sayılar kümesinden elde edilebilen herhangi bir gerçel sayı cebirseldir. □

A1.1.25 Uyarı. Uyarı A1.1.24 göstermektedir ki aklımızdan geçirdiğimiz sayıların "çoğu" cebirsel sayılardır. Belirli bir sayının transandantal olduğunu göstermek son derece zor olabilir. Bu gibi bir gösterimin ilki 1844'de Liouville'in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000000100\ldots$$

sayısının transandantallığını ispatladığında gerçekleşti.

e sayısının transandantal olduğunu 1873'te Charles Hermite gösterdi.

1882'de Lindemann çemberi kareleme hakkındaki 2,000 yıllık soruya negatif cevap bularak π sayısının transandantal olduğunu ispatladı. (Soru: Sadece bir cetvel ve pergel kullanarak, 1 yarıçaplı bir çember ile aynı alana sahip bir kare çizmek mümkün müdür? Bu problemin tam bir izahı, e ve π sayılarının transandantal olduğunun ispatları Jones, Morris ve Pearson'nın [151] kitabında bulunmaktadır.) □

Şimdi bütün cebirsel sayılar kümesi $\mathcal{A}$'nın aynı zamanda sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlamak için devam edelim. Bu sonuç kendisinin bilfiil bir neticesi olan Teorem A1.1.19'dan çok daha güçlüdür.

A1.1.26 Teorem. Tüm cebirsel sayılar kümesi $\mathcal{A}$ sayılabilir sonsuzdur.

İspat. $a_0 \neq 0$ ve her bir $a_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ polinomunu göz önüne alalım ve **yüksekliğini** $k = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ olarak tanımlayalım.

Her bir pozitif k tam sayısı için A_k, yüksekliği k olan tüm polinomların tüm köklerinin kümesi olsun. Açık bir şekilde $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$'dir.

Bu nedenle, $\mathcal{A}$'nın sayılabilir sonsuz olduğunu göstermek için, Önerme A1.1.15 göz önüne alınarak her bir A_k'nın sonlu olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir f polinomu n dereceden bir polinom ise açık bir şekilde $n \leq k$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $|a_i| \leq k$'dır. Bu yüzden k yükseklikli tüm polinomların kümesi kesinlikle sonludur.

Dahası, n dereceden bir polinom en azından n köke sahiptir. Sonuç olarak k yükseklikli her polinom k kökten daha fazlasına sahip değildir. Dolayısıyla istenildiği gibi A_k kümesi sonludur. □

A1.1.27 Sonuç. Cebirsel sayıların her alt kümesi sayılabilirdir. □

Sonuç A1.1.27'in özel bir hali Sonuç A1.1.20'dir.

Şimdiye kadar sayılamaz kümelerin herhangi bir örneğini vermedik. Bunu yapmadan önce bazı dönüşümlerin bizi sayılabilir kümeler ailesinin dışına çıkarmayacağını görelim.

A1.1.28 Önerme. X ve Y kümeleri verilsin. f, X'den Y'ye bir dönüşüm olsun.

(i) Eğer X sayılabilir ve f sürjektif (yani örten dönüşüm) ise Y sayılabilirdir.

(ii) Eğer Y sayılabilir ve f injektif (yani bire-bir dönüşüm) ise X sayılabilirdir.

İspat. Alıştırma. □

A1.1.29 Önerme. S sayılabilir bir küme olsun. O zaman S'nin tüm sonlu alt kümelerinin kümesi de sayılabilirdir.

İspat. Alıştırma. $\square$

A1.1.30 Tanım. S herhangi bir küme olsun. S'nin tüm alt kümelerinin kümesine S'nin **kuvvet kümesi** denir ve $\mathcal{P}(S)$ ile gösterilir.

A1.1.31 Teorem. (Georg Cantor) Her S kümesi için $\mathcal{P}(S)$ kuvvet kümesi S ile eşgüçlü değildir; yani $\mathcal{P}(S) \not\sim S$'dir.

İspat. S ve $\mathcal{P}(S)$ arasında bire-bir eşleme olmadığını ispatlamalıyız. Biz ise bundan ziyade S'den $\mathcal{P}(S)$'ye herhangi bir örten fonksiyon olmadığını ispatlayacağız.

Varsayalım örten olan bir $f\colon S \to \mathcal{P}(S)$ fonksiyonu var olsun. Her bir $x \in S$ için $f(x) \subseteq S$ olduğunu söylemek ile $f(x) \in \mathcal{P}(S)$ olduğunu söylemek aynıdır.

$T = \{x : x \in S \text{ ve } x \notin f(x)\}$ olsun. Bu durumda $T \subseteq S$; yani $T \in \mathcal{P}(S)$'dir. Bu yüzden herhangi bir $y \in S$ için f, S'den $\mathcal{P}(S)$'ye örten dönüşüm olduğundan $T = f(y)$'dir. Şimdi $y \in T$ ya da $y \notin T$'dir.

Durum 1.

$$\begin{aligned} y \in T &\Rightarrow y \notin f(y) \quad (T\text{'nin tanımından}) \\ &\Rightarrow y \notin T\text{'dir.} \quad (f(y) = T \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

Bu yüzden Durum 1 imkansızdır.

Durum 2.

$$\begin{aligned} y \notin T &\Rightarrow y \in f(y) \quad (T\text{'nin tanımından}) \\ &\Rightarrow y \in T\text{'dir.} \quad (f(y) = T \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

Bu yüzden Durum 2 imkansızdır.

Her iki durum da imkansız olduğuna göre bir çelişki söz konusudur. Böylece varsayımımız yanlıştır ve S'den $\mathcal{P}(S)$'ye tanımlı herhangi bir örten fonksiyon yoktur. Dolayısıyla $\mathcal{P}(S)$ ile S eşgüçlü değildir. $\square$

A1.1.32 Lemma. S herhangi bir küme ise S kümesi ile $\mathcal{P}(S)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi eşgüçlüdür.

İspat. Her bir $x \in S$ için $f(x) = \{x\}$ olacak şekilde $f\colon S \to \mathcal{P}(S)$ dönüşümünü tanımlansın. f'nin S ve $f(S)$ kümeleri arasında bire-bir bir eşleme olduğu açıktır. Bu yüzden S kümesi ile $\mathcal{P}(S)$'nin alt kümesi $f(S)$ eşgüçlüdür. $\square$

A1.1.33 Önerme. S herhangi bir sonsuz küme ise $\mathcal{P}(S)$ sayılamaz bir kümedir.

İspat. S sonsuz olduğundan $\mathcal{P}(S)$ kümesi de sonsuzdur. Teorem A1.1.31'den $\mathcal{P}(S)$ ile S eşgüçlü değildir.

$\boxed{\text{Varsayalım}}$ $\mathcal{P}(S)$ sayılabilir sonsuz olsun. O halde Önerme A1.1.11, Lemma A1.1.32 ve Önerme A1.1.10'dan S sayılabilir sonsuzdur. Bu yüzden S ile $\mathcal{P}(S)$ eşgüçlüdürler ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\mathcal{P}(S)$ sayılamazdır. $\square$

Önerme A1.1.33 sayılamaz kümelerin varlığını göstermektedir. Ancak bununla birlikte kuşkucu bir kimse örneğin uydurma olduğunu düşünülebilir. Bu yüzden önemli ve bilinen kümelerin sayılamaz olduğunu gözlemleyerek bu bölümü sonuçlandıracağız.

A1.1.34 Lemma. $[1,2)$ yarı açık aralığındaki tüm gerçel sayılar kümesi sayılabilir değildir.

İspat. (Cantor'un köşegen yöntemi) $[1,2)$ aralığında ki tüm gerçel sayılar kümesinin listelenemeyeceğini göstereceğiz.

$L = \{r_1, r_2, \ldots r_n \ldots\}$, her biri $[1,2)$ kümesinin içinde bulunan gerçel sayıların herhangi listesi olsun. Bunların aşağıdaki şekilde ondalık açılımlarını yazalım:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1.r_{11}r_{12}\ldots r_{1n}\ldots \\ r_2 &= 1.r_{21}r_{22}\ldots r_{2n}\ldots \\ &\vdots \\ r_m &= 1.r_{m1}r_{m2}\ldots r_{mn}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{eğer } r_{nn} \neq 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{eğer } r_{nn} = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere a gerçel sayısı $1.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ olacak şekilde tanımlı olsun.

$a_n \neq r_{nn}$ olduğu açıktır ve bu yüzden her $n \in \mathbb{N}$ için $a \neq r_n$ olur. Böylece a, L listesinde hiçbir şekilde yer almaz. Dolaysıyla $[1,2)$ aralığındaki tüm gerçel sayılar kümesi bir liste olarak yazılamaz; yani bu küme sayılamazdır. □

A1.1.35 Teorem. Tüm gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ sayılamazdır.

İspat. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $\mathbb{R}$ sayılabilir olsun. Bu durumda Önerme A1.1.11'den $[1,2)$ aralığındaki tüm gerçel sayılar kümesi sayılabilirdir ki Lemma A1.1.34'den bir çelişkidir. Bu nedenle $\mathbb{R}$ sayılamazdır. □

A1.1.36 Sonuç. Tüm irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{I}$ sayılamazdır.

İspat. $\boxed{\text{Varsayalım}}$ $\mathbb{I}$ sayılabilir olsun. $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerinin birleşimi olup bu kümeler sayılabilir. O halde Önerme A1.1.15'den $\mathbb{R}$ sayılabilir olur ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $\mathbb{I}$ sayılamazdır. □

Sonuç A1.1.36'nın ispatına benzer bir ispat kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

A1.1.37 Sonuç. Tüm transandantal sayılar kümesi sayılamazdır. □

A1.2 Kardinal Sayılar

Bir önce ki bölümde sayılabilir sonsuzluğu ve sayılamazlığı tanımladık ve ne anlama geldiğini açıklamaksızın, sayılamaz kümelerin sayılabilir sonsuz kümelerden "daha büyük" olduğunu ileri sürdük. "Daha büyük" ile ne kastettiğimizi açıklamak için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duymaktayız. Açıklamalarımız Halmos'un [111] kitabına dayanmaktadır.

A1.2.1 Teorem. (Cantor-Schröder-Bernstein) S ve T kümeleri verilsin. Eğer S, T'nin bir alt kümesi ile eşgüçlü ve T, S'nin alt kümesi ile eşgüçlü ise S ile T eşgüçlüdür.

İspat. Genelliği bozmaksızın S ve T kümelerini ayrık kabul edebiliriz. $f : S \to T$ ve $g : T \to S$ bire-bir dönüşümler olsun. S'den T'ye bire-bir ve örten bir dönüşüm bulmamız gereklidir.

Bir s elemanını bir $f(s)$ elemanının **ebeveyni** ve $f(s)$'yi de s'nin **evladı** gibi düşünebiliriz. Benzer biçimde t, $g(t)$'nin ebeveyni ve $g(t)$ de t'nin evladıdır. Her bir $s \in S$ ebeveyni $f(s)$, $g(f(s))$, $f(g(f(s)))$ ve bu şekilde devam eden evlatların bir sonsuz dizisine sahiptir. Böyle bir dizideki her bir terimin dizide onu takip eden tüm terimlerin **atası** olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $s \in S$ olsun. Eğer mümkün olduğu kadar geriye gidip s'nin soyuna bakacak olursak aşağıdaki üç maddeden birinin olması gerektiğini görürüz:

(i) atalarının listesi sonludur ve liste S'nin hiç atası olmayan elemanında sona erer,
(ii) atalarının listesi sonludur ve liste T'nin hiç atası olmayan elemanında sona erer,
(iii) atalarının listesi sonsuzdur.

S_S, S'nin S'den türetilen elemanlarının kümesi olsun. Yani S_S, $S \setminus g(T)$'ye ek olarak onun S'deki tüm evlatlarının kümesi olsun. S_T öyle elemanların kümesi olsun ki T'den türetilsinler; yani S_T, $T \setminus f(S)$'nin S'deki evlatlarının kümesi olsun. S_∞ hiç ebeveyni olmayan atalar ile birlikte S'deki tüm elemanların kümesi olsun. Bu durumda S kümesi S_S, S_T ve S_∞ ayrık kümelerinin birleşimidir. Benzer şekilde T, benzer olarak tanımlanan T_T, T_S ve T_∞ kümelerinin ayrık birleşimidir.

Açıkça f'nin S_S'ye kısıtlaması S_S'den T_S'ye bire-bir ve örten fonksiyonudur.

Şimdi g^{-1}, T'den $g(T)$'ye tanımlı bire-bir ve örten g fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. g^{-1}'in S_T'ye kısıtlamasının S_T'den T_T'ye tanımlı bire-bir ve örten fonksiyon olduğu açıktır. Son olarak, f'nin S_∞ kümesine kısıtlaması S_∞'dan T_∞ üzerine bire-bir ve örten fonksiyondur.

$h : S \to T$ fonksiyonunu

$$h(s) = \begin{cases} f(s), & \text{eğer } s \in S_S \text{ ise} \\ g^{-1}(s), & \text{eğer } s \in S_T \text{ ise} \\ f(s), & \text{eğer } s \in S_\infty \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda h, S'den T'ye tanımlı bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Böylece S ile T eşgüçlüdür. $\square$

Bir sonraki görevimiz "kardinal sayı" ile ne ifade ettiğimizi tanımlamak olacaktır.

A1.2.2 Tanımlar. Bir kümeler sınıfı $\aleph$ aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde **kardinal sayı** olarak adlandırılır:

(i) S ve T kümeleri verilsin. Eğer S ve T, $\aleph$ içindeyse $S \sim T$ dir,

(ii) A ve B kümeleri verilsin. Eğer A, $\aleph$ içinde ve $B \sim A$ ise B, $\aleph$ içindedir.

Eğer $\aleph$ bir kardinal sayı ve A, $\aleph$ içinde bir küme ise card $\boldsymbol{A = \aleph}$ yazılır.

Tanımlar A1.2.2 ilk bakışta garip görünebilir. Bir kardinal sayı, kümeler sınıfı olarak tanımlanır. O yüzden birkaç özel duruma bakalım:

Eğer bir A kümesinin iki elemanı varsa card $A = 2$ yazarız; 2 kardinal sayısı $\{1,2\}$ kümesi ile eşgüçlü tüm kümelerin sınıfıdır. Yani 2 elemanlı tüm kümelerin sınıfıdır.

Eğer bir S kümesi sayılabilir sonsuz ise card $S = \aleph_0$ yazarız; bu durumda $\aleph_0$ kardinal sayısı $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü tüm kümelerin sınıfıdır.

S ve T kümeleri verilsin. S ile T'nin eşgüçlü olması için gerek ve yeter şart card $S =$ card T olmasıdır.

A1.2.3 Tanımlar. $\mathbb{R}$'nin kardinalitesi $\mathfrak{c}$ ile gösterilir; yani card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$'dir. $\mathbb{N}$'nin kardinalitesi $\boldsymbol{\aleph_0}$ ile gösterilir.

Tanımlar A1.2.3'de geçen $\mathfrak{c}$ sembolüne $\mathbb{R}$'nin "kontinuum" kardinalitesi de denir.

Şimdi de kardinal sayıların bir sıralamasını tanımlayalım.

A1.2.4 Tanımlar. m ve n kardinal sayılar olsun. Eğer card $S = m$ ve card $T = n$ olacak şekilde S ve T kümeleri var ve S kümesi ile T'nin bir alt kümesi eşgüçlü ise m kardinalinin n'den daha küçük ya da eşit olduğu söylenir; yani $\boldsymbol{m \le n}$'dir. İlaveten eğer $m \le n$ ve $m \ne n$ ise m, n'den kesin olarak küçüktür; yani $\boldsymbol{m < n}$'dir.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olduğundan ve card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ ve card $\mathbb{N} = \aleph_0$ olup $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ eşgüçlü olmadığından doğrudan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

A1.2.5 Önerme. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. □

Ayrıca herhangi S kümesi için biliyoruz ki, S kümesi ile $\mathcal{P}(S)$'nin bir alt kümesi eşgüçlüdür ancak S ile $\mathcal{P}(S)$ eşgüçlü değildir. Buradan hareketle bir sonraki sonucu çıkarırız.

A1.2.6 Teorem. Herhangi S kümesi için card $S <$ card $\mathcal{P}(S)$'dir. □

Aşağıdaki ise Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi 1.2.1'nin yeni ifadesidir.

A1.2.7 Teorem. m ve n kardinal sayılar olsun. Eğer $m \leq n$ ve $n \leq m$ ise $m = n$'dir. □

A1.2.8 Uyarı. Sonsuz sayıda sonsuz kardinal sayıları vardır. Bu aşağıdaki durumdan da açıkça anlaşılmaktadır:

$$(*) \qquad \aleph_0 = \text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots$$ □

Bir sonraki sonuç, Teorem A1.2.6'nın doğrudan bir çıkarımıdır.

A1.2.9 Sonuç. Hiçbir en büyük kardinal sayı yoktur. □

Sonlu bir S kümesi n elemana sahip ise S'nin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(S)$, 2^n elemana sahip olduğunu kaydederek aşağıdaki gösterimi tanıtmak doğaldır.

A1.2.10 Tanım. Eğer bir S kümesinin kardinalitesi $\aleph$ ise $\mathcal{P}(S)$'nin kardinalitesi $2^{\aleph}$ ile gösterilir.

Böylece yukarıdaki $(*)$ ifadesini tekrar aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$(**) \qquad \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots .$$

Bu kardinal sayı dizilimine baktığımızda, aşağıdakiler dâhil olmak üzere aklımıza bazı sorular gelmektedir:

(1) $\mathfrak{c}$ bu listedeki kardinal sayılarından herhangi birine eşit midir?

(2) $\aleph_0$ ve $2^{\aleph_0}$ arasında herhangi kardinal sayılar var mıdır?

Bu sorular, özellikle (2) kolaylıkla cevaplanamamaktadır. Aslında sorular küme kuramının aksiyomlarını dikkatlice gözden geçirmeyi gerektirmektedir. Ancak bu Ek bölümde küme kuramının aksiyomlarını ciddi bir şekilde tartışmak mümkün değildir. Buna rağmen yukarıdaki sorulara Ek bölümün ilerleyen kısımlarında değineceğiz.

Bu bölümü birkaç iyi bilinen kümenin kardinalitelerini belirleyerek sonuçlandıracağız.

A1.2.11 Lemma. $a < b$ olmak üzere a ve b gerçel sayıları verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;

(i) $[0,1] \sim [a,b]$;

(ii) $(0,1) \sim (a,b)$;

(iii) $(0,1) \sim (1,\infty)$;

(iv) $(-\infty,-1) \sim (-2,-1)$;

(v) $(1,\infty) \sim (1,2)$;

(vi) $\mathbb{R} \sim (-2,2)$;

(vii) $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

Taslak İspat. $f(x) = a+b\,x$ fonksiyonunun $[0,1]$ kapalı aralığından $[a,b]$ kapalı aralığına tanımlı bire-bir bir dönüşüm olduğu dikkate alınarak (i) ispatlanır. (ii) ve (iii) benzer şekilde uygun fonksiyonlar bulunarak ispatlanır. (ii) ve (iii) kullanılarak (iv) ispatlanır. (iv) yardımıyla (v) ifadesi ispatlanır. $\mathbb{R}$ kümesinin $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$ ve $(1,\infty)$ ayrık kümelerinin birleşimi olduğu gözlemlenerek ve (iv), (v) yardımlarıyla (vi) ifadesinin doğruluğu ispatlanır. Son olarak (ii) ve (vi) yardımıyla (vii) ispatlanır. $\square$.

A1.2.12 Önerme. $a < b$ olmak üzere a ve b gerçel sayıları verilsin. Eğer S, $(a,b) \subseteq S$ olacak şekilde, $\mathbb{R}$'nin herhangi alt kümesi ise card $S = \mathfrak{c}$'dir. Özellikle card $(a,b) =$ card $[a,b] = \mathfrak{c}$'dir.

İspat. Lemma A1.2.11 kullanılarak

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card } (a,b) \leq \text{card } [a,b] \leq \text{card } \mathbb{R}$$

olduğu görülür. Bu nedenle card $(a,b) =$ card $[a,b] =$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$'dir. $\square$.

A1.2.13 Önerme. Eğer $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde ki noktaların kümesi ise bu durumda card $(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}$'dir.

Taslak İspat. Önerme A1.2.12 yardımıyla $\mathbb{R}$ ile $[0,1)$ yarı-açık aralığı eşgüçlüdür ve $[0,1) \times [0,1) \sim [0,1)$ olduğunu ispatlamanın yeterli olduğu kolayca görülmektedir.

$f(x)$, $\langle x, 0 \rangle$ noktası olacak şekilde $f : [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f, $[0,1)$'den $[0,1) \times [0,1)$'e bire-bir bir eşlemedir ve böylece $\mathfrak{c} =$ card $[0,1) \leq$ card $[0,1) \times [0,1)$ olur.

Cantor-Schröder-Bernstein Teorem A.2.1'den $[0,1)$'den $[0,1) \times [0,1)$ içine bire-bir bir g fonksiyonu bulmak yeterlidir.

$$g(\langle 0.a_1a_2 \ldots a_n \ldots, 0.b_1b_2 \ldots b_n \ldots, \rangle) = 0.a_1b_1a_2b_2 \ldots a_nb_n \ldots$$

tanımlansın. Açıkça g iyi tanımlıdır ($[0,1)$ içindeki her bir gerçel sayı 99. . . 9. . . ile bitmeyen tek bir ondalık gösterime sahip olduğu için) ve bire-birdir, bu da ispatı tamamlar. $\square$

A1.3 Kardinal Aritmetik

Kardinal sayıların toplamının bir tanımı ile başlayacağız. Elbette kardinal sayılar sonlu iken bu tanım sonlu sayıların toplamı olarak kabul edilmelidir.

A1.3.1 Tanım. α ve β herhangi kardinal sayılar olsun. card $A = \alpha$ ve card $B = \beta$ olacak şekilde A ve B ayrık kümelerini alalım. Bu durumda **α ve β kardinal sayılarının toplamı $\alpha + \beta$** ile gösterilir ve card $(A \cup B)$'ye eşittir.

A1.3.2 Uyarı. Yukarıdaki tanımın anlamlı olduğunu ve özellikle A ve B kümelerinin seçimine bağlı olmadığını söylemeden önce A_1 ve B_1 ayrık kümeler ve ayrıca card $A =$ card A_1 ve card $B =$ card B_1 iken A ve B ayrık kümeler ise $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$ olduğunun; yani card $(A \cup B) =$ card $(A_1 \cup B_1)$ olduğunun doğrulanması gerekir. Bunu göstermek oldukça basittir ve bu yüzden bir alıştırma olarak bırakılmıştır. □

A1.3.3 Önerme. Herhangi α, β ve γ kardinal sayıları için:

(i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(ii) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

(iii) $\alpha + 0 = \alpha$;

(iv) Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$'dir.

İspat. Alıştırma □

A1.3.4 Önerme.

(i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(iv) Herhangi bir sonlu n kardinal sayısı için $n + \aleph_0 = \aleph_0$ ve $n + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$'dir.

İspat.

(i) $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$ listesi, $\mathbb{N}$ ile negatif tam sayıların kümesinin; yani iki sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi olan sayılabilir sonsuz bir kümeyi göstermektedir.

(ii) $[-2, -1] \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olduğuna dikkat edilirse card $[-2, -1] +$ card $\mathbb{N} \leq$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ olduğu görülür. Böylece $\mathfrak{c} =$ card $[-2, -1] \leq$ card $([-2, -1] \cup \mathbb{N}) =$ card $[-2, -1] +$ card $\mathbb{N} = \mathfrak{c} + \aleph_0 \leq \mathfrak{c}$'dır.

(iii) $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \text{card}\,((0,1) \cup (1,2)) \leq \text{card}\,\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ olduğuna dikkat edilirse istenen sonuç açıkça görülür.

(iv) $\aleph_0 \leq n + \aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ve $\mathfrak{c} \leq n + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ göz önüne alınırsa istenen sonuçlar elde edilir. □

Bundan sonra kardinal sayıların çarpımını tanımlayacağız.

A1.3.5 Tanım. α ve β herhangi birer kardinal sayı olsun. card $A = \alpha$ ve card $B = \beta$ olacak şekilde A ve B ayrık kümelerini alalım. **α ve β kardinal sayılarının çarpımı $\alpha\beta$** ile gösterilir ve card $(A \times B)$'ye eşittir.

Kardinal sayıların toplanmasında olduğu gibi Tanım A1.3.5'deki $\alpha\beta$'nın A ve B kümelerinin seçiminden bağımsız olduğunu kontrol etmek gereklidir.

A1.3.6 Önerme. Herhangi α, β ve γ kardinal sayıları için

(i) $\alpha\beta = \beta\alpha$;

(ii) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;

(iii) $1.\alpha = \alpha$;

(iv) $0.\alpha = 0$;

(v) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

(vi) Herhangi bir sonlu n kardinali için $n\alpha = \alpha + \alpha + \ldots \alpha$ (n-adet terim);

(v1i) Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$'dir.

İspat. Alıştırma □

A1.3.7 Önerme.

(i) $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{c}\,\aleph_0 = \mathfrak{c}$;

(iv) Herhangi bir sonlu n kardinali için, $n\,\aleph_0 = \aleph_0$ ve $n\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$'dir.

Taslak İspat. Önerme A1.2.13'den (ii) sağlanırken Önerme A1.1.16'den de (i) sağlanır. (iii)'nin doğruluğunu görmek için $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.1 \leq \mathfrak{c}\aleph_0 \leq \mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ ifadesini inceleyiniz. Ayrıca (iv)'nin ispatı doğrudan tamamlanır. $\square$

Kardinal sayıların aritmetiğindeki bir sonraki adım, kardinal sayıların kuvvetini tanımlamaktır; yani α ve β kardinal sayılar iken α^β ifadesini tanımlanmak istiyoruz.

A1.3.8 Tanımlar. α ve β herhangi birer kardinal sayı olsun. card $A = \alpha$ ve card $B = \beta$ olacak şekilde A ve B kümelerini alalım. B'den A'ya tanımlı tüm f fonksiyonlarının kümesi $\boldsymbol{A^B}$ ile gösterilir. İlaveten $\boldsymbol{\alpha^\beta}$, card A^B olarak tanımlanır.

Bir kez daha tanımın anlamlı olduğunu; yani α^β, A ve B kümelerinin seçimine bağlı olmadığını kontrol etmeliyiz. Ayrıca n ve m sonlu kardinal sayıları için A, n elemanlı bir küme ve B, m elemanlı bir küme iken B'den A'ya tam olarak n^m farklı fonksiyonun bulunup bulunmadığını da kontrol etmeliyiz.

Ayrıca bir bağlantıya daha değinmemiz gerekmektedir: Eğer α bir kardinal sayı ve A, card $A = \alpha$ olacak şekilde bir küme ise 2^α'nın farklı iki tanımı vardır. Yukarıdaki tanım A'dan iki noktalı $\{0,1\}$ kümesine giden tüm fonksiyonların kümesinin kardinalitesi olarak 2^α'yı açıklar. Diğer yandan Tanım A1.2.10, 2^α'yı card $(\mathcal{P}(A))$ olarak tanımlar. $\{0,1\}^A$'dan $\mathcal{P}(A)$ üzerine bir-bir bir θ bulmak yeterlidir. $f \in \{0,1\}^A$ olsun. O halde $f\colon A \to \{0,1\}$'dır. $\theta(f) = f^{-1}(1)$ tanımlansın. θ'nın bire-bir ve örten olduğunun doğrulanması bir alıştırma olarak bırakılmıştır.

A1.3.9 Önerme. Herhangi α, β ve γ kardinal sayıları için:

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$;

(ii) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$;

(iii) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{(\beta\gamma)}$;

(iv) $\alpha \leq \beta$ ise $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$ sağlanır;

(v) $\alpha \leq \beta$ ise $\gamma^\alpha \leq \gamma^\beta$ sağlanır.

İspat. Alıştırma $\square$

Tanım A1.2.10'dan sonra üç soru sormuştuk. Artık bu sorulardan ikincisini cevaplayabiliriz.

A1.3.10 Lemma. ${\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

İspat. card $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = {\aleph_0}^{\aleph_0}$ ve card $(0,1) = \mathfrak{c}$ olduğu bilinmektedir. $f(0.a_1a_2\dots a_n\dots) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\rangle$ ile verilen $f\colon (0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonu bire-bir olduğundan $\mathfrak{c} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0}$ sağlanır.

Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi A1.2.1 yardımıyla, ispatı tamamlamak üzere $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'den $(0,1)$'e giden bir bire-bir g dönüşümü bulmak yeterlidir.

Eğer $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\rangle$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin bir elemanı ise bu durumda her bir $a_i \in \mathbb{N}$'dir ve böylece herhangi bir $M_i \in \mathbb{N}$ için $a_i = \dots a_{in}\, a_{i(n-1)}\, \dots\, a_{i2}\, a_{i1}$ ve her $n > M_i$ için $a_{in} = 0$ yazabiliriz. [Örneğin $187 = \dots 0\,0 \dots 0\,1\,8\,7$'dir ve bu yüzden eğer $a_i = 187$ ise $n > M_i = 3$ için $a_{i1} = 7$, $a_{i2} = 8$, a_{i3}=1 ve $a_{in} = 0$'dir.] Öyleyse g dönüşümünü

$$g(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\rangle) = 0.a_{11}a_{12}a_{21}a_{13}a_{22}a_{31}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{16}\dots.$$

olarak tanımlayalım. (Bunu Lemma A1.1.13'nın ispatı ile karşılaştırınız.)

g fonksiyonunun bire-bir olduğu açıktır ve bu ispatı tamamlar. $\square$

Şimdi ilk olarak Georg Cantor tarafından ispatlanan güzel bir sonuç ifade edelim.

A1.3.11 Teorem. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

İspat. İlk olarak Lemma A1.3.10'dan $2^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ olduğuna dikkat edelim. O halde $\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$ olduğunu doğrulamak zorundayız. Bunu yapmak için $[0,1)$ kümesinden $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kümesine bir f bire-bir dönüşümünü bulmak yeterlidir.

$[0,1)$'in her bir x elemanı her bir x_i, 0 ya da 1'e eşit olmak üzere $x = 0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$ şeklinde bir ikilik gösterime sahiptir. İkilik sayı sisteminde

$$1/4 = 0.0100\ldots0\cdots = 0.0011\ldots1\ldots$$

örneğinde olduğu gibi 1'lerin dizisi ile biten gösterimler hariç ikilik gösterim tektir. Tüm bu gibi durumlarda 1'lerin dizisi yerine sıfırların dizisi ile gösterimi seçmemiz kaydıyla $[0,1)$'deki sayıların temsili tektir. $x \in [0,1)$ elemanını $n \in \mathbb{N}$ için $f(x)(n) = x_n$ ile verilen $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ fonksiyonuna dönüştüren $f\colon [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonunu tanımlayalım. f'nin bire-bir olduğunu göstermek için $[0,1)$ içinde $x \neq y$ olacak şekilde herhangi x ve y alalım. Bu durumda herhangi $m \in \mathbb{N}$ için $x_m \neq y_m$ olur. Bu yüzden $f(x)(m) = x_m \neq y_m = f(y)(m)$'dir. Böylece $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ve $f(y)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ fonksiyonları eşit değildir. x ve y, $[0,1)$'in keyfi (farklı) elemanları olduğundan istenildiği gibi f bire-bir bir fonksiyondur. $\square$

A1.3.12 Sonuç. Eğer α, $2 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$ olacak şekilde bir kardinal sayı ise $\alpha^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$'dir.

İspat. $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \alpha^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ sağlandığına dikkat ediniz. $\square$

Kaynakça

[1] Colin C. Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. Freeman and Co., New York, 1994.

[2] J. Frank Adams. *Lectures on Lie Groups*. University of Chicago PressPress, Chicago, 1969.

[3] J. Frank Adams. *Algebraic topology: a student's guide*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1972.

[4] G.N. Afanasiev. *Topological effects in quantum mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1999.

[5] M.A. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Springer, New York, 2002.

[6] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[7] *Algebraic and Geometric Topology*. http://www.maths.warwick.ac.uk/agt, 2001– . a refereed electronic journal.

[8] Charilaos N. Aneziris. *The mystery of knots: computer programming for knot tabulation*. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, N.J., 1999.

[9] A.V. Arhangel'skii, editor. *General Topology II*. Springer-Verlag, Berlin etc., 1995.

[10] A.V. Arhangel'skii, editor. *General Topology III*. Springer-Verlag, Berlin etc., 1995.

[11] A.V. Arkhangel'skiǐ. *Fundamentals of general topology: problems and exercises*. Kluwer, Boston, 1984.

[12] A.V. Arkhangel'skiǐ. *Topological function spaces*. Kluwer, Boston, 1992.

[13] A.V. Arkhangel'skiĭ and L.S. Pontryagin, editors. *General Topology I*. Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.

[14] D.L. Armacost. *The structure of locally compact abelian groups*. M. Dekker, New York, 1981.

[15] M.A. Armstrong. *Basic topology*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[16] V.I. Arnold and B.A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*. Springer, New York, 1999.

[17] Emil Artin. *Introduction to algebraic topology*. C.E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1969.

[18] C.E. Aull and R. Lowen, editors. *Handbook of the history of general topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 1997.

[19] Wojciech Banaszczyk. *Additive subgroups of topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1991.

[20] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:332–334, 1992.

[21] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. *Chaos: A Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[22] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. *Additive subgroups of topological vector spaces*. Imperial College Press, London, 2003.

[23] Stephen Barr. *Experiments in topology*. Dover Publications, New York, 1989.

[24] Gerald Alan Beer. *Topologies on closed and convex sets*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1993.

[25] Martin P. Bendsoe. *Optimization of structural topology*. Springer, Berlin, New York, 1995.

[26] Martin P. Bendsoe. *Topology, optimization: theory, methods and applications*. Springer, Berlin, New York, 2003.

[27] A. S. Besicovitch. On linear sets of points of fractal dimension. *Math. Annalen*, 101:161–193, 1929.

[28] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. *Selected topics in infinite-dimensional topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

[29] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. *Jour. Math (Liouville)*, (9) 7:345–379, 1928.

[30] Donald W. Blackett. *Elementary topology; a combinatorial and algebraic approach*. Academic Press, New York, 1967.

[31] Robert L. Blair. The hewitt-pondiczery-marczewski theorem on the density character of a product space. *Archiv der Mathematik*, 23:422–424, 1972.

[32] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray, editors. *Chemical topology : introduction and fundamental*. Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

[33] Armand Borel. *Seminars on transformation groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[34] Karol Borsuk. *Collected Papers/ Karol Borsuk*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983.

[35] Nicolas Bourbaki. *General topology v.1 & v.2*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[36] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale, Chap. 1-4 and Chap. 5-10*. Hermann, Paris, 1971 and 1974.

[37] Nicolas Bourbaki. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1987.

[38] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*. Springer, New York, 1997.

[39] R. Brown, P.J. Higgins, and Sidney A. Morris. Countable products and sums of lines and circles: their closed subgroups, quotients and duality properties. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 78:19–32, 1975.

[40] Robert F. Brown. *The Lefschetz fixed point theorem*. Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[41] Ronald Brown. *Elements of modern topology*. McGraw Hill, New York, 1968.

[42] Ronald Brown. *Topology : a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid*. Halstead Press, New York, 1988.

[43] Georg Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, by Georg Cantor; tr., and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain*. The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1915.

[44] Stephen C. Carlson. *Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course*. Wiley, New York, 2001.

[45] H. Cartan. Théorie des filtres. *C. R. Acad. Paris*, 205:595–598, 1937.

[46] H. Cartan. Filtres et ultrafiltres. *C. R. Acad. Paris*, 205:777–779, 1937.

[47] H. Cartan and R. Godement. Th'eorie de la dualit'e et analyse harmonique dans les groupes ab'eliens localement compacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup*, 64:79–99, 1947.

[48] J. Scott Carter. *How surfaces intersect in space : an introduction to topology*. World Scientific Publishers, Singapore ; River Edge, N.J., 1995.

[49] Eduard Čech. *Topological spaces*. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966.

[50] Eduard Čech. *Point sets*. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1969.

[51] Graciela Chichilnisky. *Topology and markets*. American Mathematical society, Providence, R.I., 1999.

[52] Gustave Choquet. *Topology*. Academic Press, New York, 1966.

[53] Gustave Choquet. *Lectures on analysis*. W.A. Benjamin, New York, 1969.

[54] Daniel E. Cohen. *Combinatorial group theory: a topological approach*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989.

[55] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *The theory of ultrafilters*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[56] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Continuous pseudometrics*. M. Dekker, New York, 1975.

[57] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Chain conditions in topology*. Cambridge University Press, Cambridge, England; New York, 1982.

[58] James P. Corbett. *Topological principles in cartography*. US Department of Commerce, Washington, D.C., 1980.

[59] J.-M. Cordier. *Shape theory: categorical methods of approximation*. Halstead Press, Chichester, England; New York, 1989.

[60] Jane Cronin. *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[61] R.J. Daverman and R.B. Sher, editors. *Handbook of geometric topology*. Elsevier, Amsterdam; New York, 2002.

[62] H. de Vries. *Compact spaces and compactifications: an algebraic approach*. Van Gorcum, Assen, 1962.

[63] J.V. Deshpande. *Introduction to topology*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, New York, etc., 1988.

[64] Robert L. Devaney. *Chaos, fractals and dynamics: computer experiments in mathematics*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.

[65] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.

[66] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition*. Westview Press, Boulder, Colorado, 2003.

[67] Tammo tom Dieck. *Topologie*. de Gruyter, Berlin, 2000.

[68] Egbert Dierker. *Topological methods in Walrasian economics*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[69] Joe Diestel and Angela Spalsbury. *The Joys of Haar Measure*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.

[70] Jean Alexandre Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Birkhauser, Boston, 1989.

[71] Dikran N. Dikranjan. *Categorical structure of closure operators with applications to topology, algebra and discrete mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995.

[72] Dikran N. Dikranjan, Ivan R. Prodanov, and Luchezar N. Stoyanov. *Topological Groups: Characters, Dualities, and Minimal Topologies*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1990.

[73] Mircea V. Diudea and L. Jantschi. *Molecular topology*. Nova Science Publishers, Huntington, N.Y., 2001.

[74] C.T.J. Dodson. *Category bundles and spacetime topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1988.

[75] C.T.J. Dodson. *A user's guide to algebraic topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1997.

[76] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology*. Springer, Berlin, 1995.

[77] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[78] Alan Dunn. *Sarkovskii's Theorem–Part 1*, http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-091Spring--2005/A335FB2E-7381--49D4--B60C--7CBD2F349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.

[79] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2001.

[80] Gerald A. Edgar. *Measure, topology and fractal geometry*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[81] R.E. Edwards. *Curves and topological questions*. Australian National University, Canberra, Australia, 1969.

[82] Robert E. Edwards. *Functional analysis: theory and applications*. Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1965.

[83] James Eels. *Singularities of smooth maps*. Gordon and Breach, New York, 1967.

[84] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

[85] Murray Eisenberg. *Topology*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[86] Patrik Eklund. *Categorical fuzzy topology*. Abo Akademi, Abo, 1986.

[87] Glenn Elert. *The Chaos Hypertextbook*, http://hypertextbook.com/chaos/, 2003.

[88] Ryszard Engelking. *General topology*. PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[89] Ryszard Engelking. *Dimension theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York, 1978.

[90] *Eric W. Weinstein*. http://mathworld.wolfram.com/AxiomofChoice.html, Accessed, January 2011. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[91] William W. Fairchild and Cassius Ionescu Tulceac. *Topology*. W.B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1971.

[92] K.J. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Wiley, Chichester, New York, 1990.

[93] Erica Flapan. *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality*. Cambridge University Press, cambridge; New York, 2000.

[94] Graham Flegg. *From geometry to topology*. Dover Publications, Mineola, N.Y., 2001.

[95] D.H. Fremlin. *Consequences of Martin's Axioms*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1984.

[96] Peter Freyd. *Abelian categories: An introduction to the theory of functors*. Harper & Rowe, New York, 1964.

[97] Robert Froman. *Rubber bands, baseballs and doughnuts; a book about topology. Illustrated by Harvey Weiss*. Crowell, New York, 1972.

[98] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. *Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[99] David Gale. The game of hex and the brouwer fixed-point theorem. *Amer. Math. Monthly*, 86:818–827, 1979.

[100] David B. Gauld. *Differential topology: an introduction*. M. Dekker, New York, 1982.

[101] *General Topology Front for the Mathematics ArXiv*. http://front.math.ucdavis.edu/math.gn, 1992–. Los Alamos National Laboratory e-Print archive.

[102] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *A compendium of continuous lattices*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[103] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *Continuous lattices and domains*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[104] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of continuous functions*. Springer-Verlag, New York, 1976.

[105] Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. Wiley-Interscience, New York, 2002.

[106] John Ginsburg and Bill Sands. Minimal infinite topological spaces. *Amer. Math. Monthly*, 86:574–576, 1979.

[107] Norman J. Girardot. *Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun)*. University of California Press, Berkeley, California, 1983.

[108] H. Brian Griffiths. *Surfaces*. Cambridge University Press, London; New York, 1976.

[109] Jonathan L. Gross. *Topological graph theory*. Wiley, New York, 1987.

[110] A. Grothendieck. *Topological vector spaces*. Gordon and Breach, New York, 1973.

[111] Paul Halmos. *Naive set theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.

[112] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[113] Felix Hausdorff. Dimension und außeres maß. *Math. Annalen*, 79:157–159, 1919.

[114] Felix Hausdorff. *Set Theory (translated from the original German)*. Chelsea, New York, 1962.

[115] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914)*. Chelsea, New York, 1965.

[116] Horst Herrlich. *Axiom of Choice*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

[117] Horst Herrlich and Hans-E. Porst, editors. *Category theory at work*. Heldermann-Verlag, Berlin, 1991.

[118] Edwin Hewitt. A remark on density characters. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52: 641–643, 1946.

[119] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[120] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis II: structure and analysis for compact groups, analysis on locally compact abelian groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[121] P.J. Higgins. *An introduction to topological groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[122] Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann, and Jimmie D. Lawson. *Lie groups, convex cones and semigroups*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[123] Peter John Hilton. *Homology theory: an introduction to algebraic topology*. Cambridge University Press, London, 1967.

[124] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications*. W. de Gruyter, New York, 1998.

[125] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition*. Elsevier, Oxford, UK, 2004.

[126] John Gilbert Hocking and Gail S. Young. *Topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1961.

[127] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups*. European Mathematical Society Publishing House, Tracts in Mathematics 2, Zurich, Switzerland, 2007.

[128] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert*. de Gruyter, Studies in Mathematics 25, Berlin, third edition, 2013.

[129] Karl Heinrich Hofmann. Finite dimensional submodules of g-modules for a compact group. *Proc. cambridge Philos. Soc.*, 65:47–52, 1969.

[130] Karl Heinrich Hofmann and Paul S. Mostert. *Elements of compact semigroups*. C.E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.

[131] *Hopf Topology Archive*. http://hopf.math.purdue.edu, 1996–. Purdue University Hopf Archive of Topology preprints.

[132] Juan Horváth. *Topological vector spaces and distributions*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[133] Paul Howard. *Consequences of the Axiom of Choice Project Homepage*, http://www.math.purdue.edu/~hrubin/JeanRubin/Papers/conseq.html, 1998 –.

[134] Paul Howard and Jean Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. Mathematical Surveys and Monographs 59; American Mathematical Society, Providence, R.I., 1988.

[135] Norman R. Howes. *Modern analysis and topology*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[136] S.T. Hu. *Introduction to general topology*. Holden-Day, San Francisco, 1966.

[137] S.T. Hu. *Differentiable manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[138] Sze-Tsen Hu. *Elements of general topology*. Holden-Day, San Francisco, 1964.

[139] Sze-Tsen Hu. *Homology theory; a first course in algebraic topology*. Holden-Day, San Francisco, 1966.

[140] Witold Hurewicz and Witold Wallman. *Dimension theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

[141] Taqdir Husain. *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces*. Clarendon Press, Oxford, 1965.

[142] Taqdir Husain. *Introduction to topological groups*. W.B. Saunders, Philadelphia, 1966.

[143] Taqdir Husain. *Topology and maps*. Plenum Press, New York, 1977.

[144] Miroslav Husek and Jan Van Mill. *Recent progress in general topology*. North-Holland, Amsterdam; New York, 1992.

[145] J.R. Isbell. *Uniform spaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[146] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:865, 1992.

[147] I.M. James. *General topology and homotopy theory*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[148] I.M. James. *Handbook of algebraic topology*. Elsevier, Amsterdam; New York, 1995.

[149] I.M. James. *Topologies and uniformities*. Springer, London; New York, 1999.

[150] I.M. James. *History of topology*. Elsevier, Amsterdam; New York, 1999.

[151] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. *Abstract algebra and famous impossibilities*. Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

[152] V. Kannan. *Ordinal invariants in topology*. American mathematical society, Providence, R.I., 1981.

[153] Christian Kassel. *Quantum groups*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[154] Louis H. Kauffman and Randy A. Baadhio. *Quantum topology*. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, 1993.

[155] John L. Kelley. *General topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[156] S.M. Khaleelulla. *Counterexamples in topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1982.

[157] Wan-hui Kim and Robert Tien-wen Chien. *Topological analysis and synthesis of communication networks*. Columbia University Press, New York, 1962.

[158] Bruce R. King. *Applications of graph theory and topology in inorganic cluster and coordination chemistry*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[159] T. Yung Kong and Azriel Rosenfeld. *Topological algorithms for digital image processing*. Elsevier, Amsterdam; New York, 1996.

[160] Gottfried Köthe. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1983.

[161] Kenneth Kunen. *Set theory*. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[162] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[163] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to set theory and topology*. Pergamonn Press, New York, 1961.

[164] A. G. Kurosh. *Theory of Groups: Volume 1*. AMS Chelsea Publishing, New York, 1956; Reprinted 1960.

[165] H.A. Lauwerier. *Fractals: endlessly repeated geometrical figures*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.

[166] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Springer, New York, 2000.

[167] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York, 2002.

[168] H. Leptin. Zur dualit´ atstheorie projectiver limites abelscher gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 19:264–268, 1955.

[169] Seymour Lipschutz. *Schaum's outline of general topology*. McGraw Hill, 1968.

[170] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo. *Fuzzy topology*. World Scientific Publishers, River Edge, N.J., 1997.

[171] Charles Livingston. *Knot theory*. The Mathematical association of America, 1993.

[172] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.

[173] Saunders Maclane. *Categories for the working mathematician, second edition*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[174] Benoit B. Mandelbrot. *Science*.

[175] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman, New York, 1983.

[176] Mark Mandelkern. A short proof of the tietze-urysohn extension theorem. *Arch. Math.*, 60:364–366, 1993.

[177] Edward Marczewski. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques. *Fundamenta Math.*, 34:137–143, 1947.

[178] Per Martin-Löf. *100 years of Zermelo's axiom of choice: What was the problem with it?, in Logicism, Intuitionism, and Formalism: What Has Become of Them?, Sten Lindström, Erik Palmgren, Krister Segerberg, and Viggo Stoltenberg-Hansen editors*. Springer, London, 2009.

[179] R.D. Mauldin, editor. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*. Birkhäuser, Boston, 1981.

[180] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645–647, 1974.

[181] George McCarty. *Topology; an introduction with application to topological groups*. McGraw Hill, New York, 1967.

[182] Robert A. McCoy and Ibulu Ntantu. *Topological properties of spaces of continuous functions*. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1988.

[183] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, New York, 1998.

[184] Richard E. Merrifield and Howard E. Simmons. *Topological methods in chemistry*. Wiley, New York, 1989.

[185] Emil G. Milewski. *The topology problem solver: a complete solution guide to any textbook*. Research and Education Association, Piscataway, N.J., 1994.

[186] M. Mimura and Hirosi Toda. *Topology of Lie groups*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[187] Edward E. Moise. *Introductory problem courses in analysis and topology*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[188] Mikhail I. Monastyrskaei. *Topology of gauge fields and condensed matter*. Plenum Press, New York, 1993.

[189] Deane Montgomery and Leo Zippin. *Topological transformation groups*. Interscience Publishers, New York, 1955.

[190] E.H. Moore and H.L. Smith. A general theory of limits. *American Journal of Mathematics*, 44:102–121, 1922.

[191] Robert L. Moore. *Foundations of point set topology*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[192] Giuseppe Morandi. *The role of topology in classical and quantum physics*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1992.

[193] K. Morita and J. Nagata, editors. *Topics in general topology*. North Holland, Amsterdam, 1989.

[194] Sidney A. Morris. *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1977.

[195] Sidney A. Morris. Are finite topological spaces worthy of study. *Austral. Math. Soc. Gazette*, 11:31–32, 1984.

[196] Sidney A. Morris. An elementary proof that the Hilbert cube is compact. *Amer. Math. Monthly*, 91:563–564, 1984.

[197] Jan Mycielski. A system of axioms of set theory for the rationalists. *Notices Ameri. Math. Soc.*, 53 (2):209, 2006.

[198] Gregory L. Naber. *Topological methods in Euclidean spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1980.

[199] Gregory L. Naber. *Topology, geometry and gauge fields: foundations*. Springer, New York, 1997.

[200] Keio Nagami. *Dimension theory*. Academic Press, New York, 1970.

[201] Jun-iti Nagata. *Modern dimension theory*. Interscience Publishers, New York, 1965.

[202] Jun-iti Nagata. *Modern general topology*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985.

[203] M.A. Naimark. *Normed Rings*. P. Noordhoff, 1959.

[204] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. A. Hilger, Bristol, England; New York, 1990.

[205] H. Nakano. *Topology and linear topological spaces*. Maruzen Co., Tokyo, 1951.

[206] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. *Topological vector spaces*. M. Dekker, New York, 1985.

[207] Charles Nash. *Topology and geometry for physicists*. Academic Press, London, New York, 1983.

[208] M.H.A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points*. Greenwood Press, Westport, Conn., 1985.

[209] A.L. Onishchik. *Topology of transitive transformation groups*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.

[210] John C. Oxtoby. *Measure and category; a survey of the analogies between topological and measure spaces*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[211] A.R. Pears. *Dimension Theory of general spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1975.

[212] Anthony L. Peressini. *Ordered topological vector spaces*. Harper and Row, New York, 1967.

[213] C.G.C. Pitts. *Introduction to metric spaces*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

[214] Henri Poincarè. *Science and method; translated and republished*. Dover Press, New York, 2003.

[215] E.S. Pondiczery. Power problems in abstract spaces. *Duke Math. J.*, 11: 835–837, 1944.

[216] L.S. Pontryagin. *Topological Groups*. Princeton University Press, Princeton, 1946.

[217] Ian R. Porteous. *Topological geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1981.

[218] Bodo von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[219] D.A. Raikov. Harmonic analysis on commutative groups with haar measure and the theory of characters (russian with english abstract). *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 14:1–86, 1945.

[220] George M. Reed. *Surveys in general topology*. Academic Press, New york, 1980.

[221] G.M. Reed, A.W. Roscoe, and R.F. Wachter. *Topology and category theory in computer science*. Oxford University Press, Oxford, England, 1991.

[222] Renzo L. Ricca. *An introduction to the geometry and topology of fluid flows*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 2001.

[223] David S. Richeson. *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2008.

[224] A.P. Robertson and Wendy Robertson. *Topological vector spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.

[225] D.W. Roeder. Category theory applied to pontryagin duality. *Pacific J. Math.*, 52:519–527, 1974.

[226] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[227] Herman Rubin and Jean E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North Holland, 1963.

[228] Herman Rubin and Jean E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice II*. North Holland/Elsevier, 1985.

[229] Mary Ellen Rudin. *Lectures on set theoretic topology*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[230] Walter Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967.

[231] Hans Sagan. *Space-filling curves*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[232] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukranian Mat. Z.*, 16:61–71, 1964.

[233] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. *Word problems II, Stud. Logic Found. Math.*, 995:373–394, 1980.

[234] M. Signore and F. Melchiorri. *Topological defects in cosmology*. World Scientific Publishers, Singapore, 1998.

[235] George E. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis*. McGraw Hill, New York, 1963.

[236] I.M. Singer. *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Springer-Verlag, New York, 1967.

[237] Christopher G. Small. *The statistical theory of shape*. Springer, New York, 1996.

[238] Alexei Sossinsky. *Knots: mathematics with a twist*. Harvard University Press, 2002.

[239] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1966.

[240] John R. Stallings. *Lectures on polyhedral topology*. Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India, 1967.

[241] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. *Counterexamples in topology*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[242] N.E. Steenrod. *Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 191968.

[243] N.E. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.

[244] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group topology*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[245] Markus Stroppel. *Locally compact groups*. European Mathematical Society Publishers, Zurich, 2006.

[246] *The MacTutor History of Mathematics Archive*. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/, 2001–.

[247] Wolfgang Thron. *Topological structures*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[248] *Topology*. http://www.elsevier.com/locate/top, 1962–. A hard-copy refereed research journal in topology and geometry.

[249] *Topology and its Applications*. http://www.elsevier.nl/locate/topol, 1971–. A hard-copy refereed research journal in topology.

[250] *Topology Atlas*. http://at.yorku.ca/topology, 1995–. Topology related resources.

[251] *Topology Proceedings*. http://topology.auburn.edu/tp/, 1977–. A hard-copy refereed research journal.

[252] E.R. van kampen. Locally bicompact abelian groups and their character groups. *Ann. of Math.*, (2) 36:448–463, 1935.

[253] J. van Mill. *The infinite-dimensional topology*. North Holland, Amsterdam, Oxford, Tokyo, 1988.

[254] J. van Mill. *The infinite-dimensional topology of function spaces*. Elsevier, Amsterdam, New York, 2001.

[255] Jan van Mill and George M. Reed. *Open problems in topology*. North-Holland, Amsterdam, 1990.

[256] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. *Amer. Math. Monthly*, 101:353–355, 1994.

[257] Steven Vickers. *Topology via logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[258] A.V. Vologodskii. *Topology and physics of circular DNA*. CRC Press, Boca Raton, 1992.

[259] John von Neumann. Almost periodic functions in a group i. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36:445–492, 1934.

[260] Rudolf Výborný. The weierstrass theorem on polynomial approximation. *Mathematica Bohemica*, 130:161–166, 2005.

[261] Russell C. Walker. *The Stone-Cech compactification*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[262] C.T.C. Wall. *A geometric introduction to topology*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[263] A.D. Wallace. *Differential topology; first steps*. W.A. Benjamin, New York, 1968.

[264] H. Wallmani. Lattices and topological spaces. *Ann. of Math.*, 39:112–126, 1938.

[265] Evert Wattel. *The compactness operator in set theory and topology*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.

[266] Jeffrey R. Weeks. *The shape of space*. Marcel Dekker, New York, 2002.

[267] A. Weil. *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann & Cie., Paris, 1951.

[268] Hermann Weyl and F. Peter. Die vollst. 1927.

[269] Stuart G. Whittington, De Witt Sumners, and Timothy Lodge, editors. *Topology and geometry in polymer science*. Springer, New York, 1998.

[270] R.L. Wilder. *Topology of manifolds*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.

[271] Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[272] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82:985–992, 1975.

Dizin