TOPOLOGÍA SIN DOLOR[1]

SIDNEY A. MORRIS

Versión del August 19, 2010[2]

Traducciones de partes del libro (versión de octubre de 2007) al

Árabe (por la Sra. Alia Mari Al Nuaimat)

Chino (por el Dr. Fusheng Bai)

Persa (por el Dr. Asef Nazari Ganjehlou)

Ruso (por el Dr. Eldar Hajilarov)

Español (por el Dr. Guillermo Pineda-Villavicencio)

están ahora disponibles.

[2] Este libro está siendo actualizado y expandido continuamente; se anticipa que existirán alrededor de quince capítulos en total. Si usted descubriera algún error o deseara sugerir mejoras, por favor envíe un email a morris.sidney@gmail.com.

Contents

Comentarios del Traductor

Ésta es una traducción al español del libro "Topology without tears" del profesor Sidney Morris, versión de octubre de 2007.

El profesor Sidney Morris sin duda ha escrito un excelente texto sobre topología general, y de esta forma nos ha entregado una invaluable obra pedagógica, colmada de una exposición cautivante, ejemplos esclarecedores y ejercicios interesantes.

Cuando existieron varias posibles traducciones para un término determinado, el traductor agregó una nota de pie en la forma de "Nota del traductor" para aclarar esta ambivalencia. Las notas del traductor también introdujeron observaciones relevantes.

Si descubriera algún error en la versión en español de este libro, por favor envíe un email a work@guillermo.com.au

Guillermo Pineda-Villavicencio
Ballarat, August 19, 2010

Chapter 0

Introducción

La topología es una importante e interesante rama de las matemáticas, cuyo estudio no sólo introduce nuevos conceptos y teoremas sino que pone en contexto viejas nociones como la de función continua. Sin embargo, sólo decir esto no le daría la verdadera significación a la topología. La topología es tan importante que su influencia se evidencia en casi todas las otras ramas de la matemáticas. Por lo que su estudio es relevante para todos aquellos que aspiren a ser matemáticos, independientemente de que su especialización sea (actualmente o en el futuro) álgebra, análisis, teoría de categorías, teoría del caos, mecánica continua, dinámica, geometría, matemática industrial, biología matemática, economía matemática, matemática financiera, modelación matemática, física matemática, matemática de las comunicaciones, teoría de números, matemática numérica, investigación de operaciones o estadísticas. (La bibliografía sustancial al final de este libro basta para indicar que la topología ciertamente tiene relevancia en todas estas áreas, y en muchas más.) Nociones topológicas como compacidad, conexidad y densidad son tan básicas para los matemáticos de hoy como las nociones de conjunto y función lo eran para los matemáticos de la pasada centuria.

La topología tiene diferentes ramas—topología general (también conocida como topología conjuntista), topología algebraica, topología diferencial y álgebra topológica—siendo la primera, topología general, la puerta para el estudio de las otras. En este libro yo pretendo brindar una base sólida en topología general. Cualquiera que concienzudamente se estudie los primeros diez capítulos y resuelva al menos la mitad de los ejercicios tendrá ciertamente esa base.

Para el lector que no haya previamente estudiado una área axiomática de las matemáticas como álgebra abstracta, aprender a escribir demostraciones será difícil. Para asistirlo en ese empeño, frecuentemente en los capítulos iniciales, incluyo un comentario que no forma parte de la demostración, pero esboza el proceso de razonamiento que llevó a la misma.

Los comentarios son indicados de la manera siguiente:

Para arribar a la demostración, utilicé cierto proceso de razonamiento, el cual pudiera ser llamado “fase de descubrimiento” o “fase experimental”.

Sin embargo, el lector aprenderá que aunque la experimentación es muchas veces esencial, nada puede substituir una demostración formal.

El libro contiene muchos ejercicios. Solamente trabajando en un buen número de ejercicios, usted será capaz de dominar el curso. Yo no he proporcionado respuestas a los ejercicios, y no tengo intención de hacerlo. En mi opinión, hay suficientes ejemplos y demostraciones en el texto, lo que hace innecesario brindar soluciones a los ejercicios—de hecho es probablemente no deseable hacerlo. Muy frecuentemente incluyo conceptos nuevos en los ejercicios, pero los conceptos que considero fundamentales, en la mayoría de los casos, son introducidos nuevamente en el texto.

Los ejercicios de mayor dificultad son indicados con un *.

Los lectores de este libro pudieran desear comunicarse entre ellos para debatir dificultades, soluciones a ejercicios, comentarios sobre el libro y lecturas adicionales. Para hacer esto más fácil, he creado un grupo en Facebook llamado “Topology Without Tears readers”. Todos ustedes son bienvenidos para unirse al grupo, sólo deben enviarme un email a (morris.sidney@gmail.com) pidiéndolo.

Finalmente, debo mencionar que los avances matemáticos son entendidos mejor cuando se consideran en su contexto histórico. En su forma actual, este libro no aborda suficientemente el contexto histórico. Por el momento me tengo que conformar con notas sobre personalidades de la topología en el Apéndice 2—siendo estas notas extraídas en gran medida de *The MacTutor History of Mathematics Archive* [207]. Se anima al lector a visitar el sitio *The MacTutor History of Mathematics Archive* [207], y leer los artículos completos, así como también leer artículos sobre otras personalidades. Pero una buena comprensión de la historia raramente se obtiene leyendo de una sóla fuente.

Considerando el contexto histórico, todo lo que diré es que la mayoría de la topología descrita en este libro fue descubierta en la primera mitad del siglo veinte. Y se pudiera decir que el centro de gravedad en este período de descubrimiento fue Polonia. (Las fronteras se han movido considerablemente.) Sería justo decir que la Segunda Guerra Mundial cambió el centro de gravedad permanentemente. El lector debe consultar el Apéndice 2 para entender este críptico comentario.

0.1 Reconocimientos

Partes de versiones anteriores de este libro fueron usadas en la Universidad La Trobe, la Universidad de New England, la Universidad de Wollongong, la Universidad de Queensland, la Universidad de South Australia, el Colegio Urbano de New York, y la Universidad de Ballarat durante los últimos 30 años. Deseo agradecer a aquellos estudiantes que criticaron las versiones anteriores e identificaron errores. Agradecimientos especiales van a Deborah King y a Allison Plant por señalar numerosos errores y flaquezas en la presentación. Gracias también a otros colegas, como Carolyn McPhail, Ralph Kopperman, Karl Heinrich Hofmann, Rodney Nillsen, Peter Pleasants, Geoffrey Prince, Bevan Thompson y Ewan Barker, quiénes leyeron varias versiones y ofrecieron sugerencias para mejorar el texto. Gracias también a Jack Gray, cuyas excelentes notas de clases "Teoría de Conjuntos y Aritmética Transfinita"[1] en la Universidad de New South Wales, escritas en los años 70, influenciaron nuestro Apéndice sobre la Teoría de Conjuntos Infinitos.

En varias partes de este libro, especialmente en el Apéndice 2, existen notas históricas. Aquí aprovecho para reconocer dos fuentes maravillosas Bourbaki [30] y *The MacTutor History of Mathematics Archive* [207].

0.2 Lectores: Ubicaciones y Profesiones

Este libro ha sido usado por actuarios de seguros; químicos; cibernéticos; econométristas; economistas; ingenieros aeronáuticos, mecánicos, eléctricos, informáticos, espaciales y de telecomunicaciones; estudiantes de finanzas; matemáticos puros y aplicados; comerciantes; filósofos; físicos; psicólogos; desarrolladores de software; y estadísticos en Alemania, Argelia, Argentina, Australia, Austria, Bangladesh, Belarús, Bélgica, Belice, Bolivia, Brasil, Bulgaria, Cambodia, Camerún, Canadá, Chile, China, Colombia, Corea del Norte, Costa Rica, Croacia, Cuba, Dinamarca, Egipto, los Emiratos Árabes Unidos, Eslovenia, España, los Estados Unidos de América (EUA), Estonia, Etiopía, Fiji, Las Filipinas, Finlandia, Francia, Gana, Gaza, Grecia, Holanda, Hungría, India, Indonesia, Irán, Iraq, Islandia, Islas Mauricio, Israel, Italia, Jamaica, Japón, Kenia, Kuwait, Lituania, Luxemburgo, Malasia, Malta, México, Nicaragua, Nigeria, Noruega, Pakistán, Paraguay, Perú, Polonia, Portugal, Qatar, el Reino Unido, la República Checa, Rumania, Rusia, Serbia y Montenegro, Sierra Leona, Singapur, Sudáfrica, Sudán, Suecia, Suiza, Tailandia, Taiwán, Trinidad y Tobago, Túnez, Turquía, Uruguay, Ucrania, Uzbekistán, Venezuela y Vietnam.

El libro es referenciado en `http://www.econphd.net/notes.htm`, un sitio diseñando para

[1] *Nota del traductor:* Traducción de "Set Theory and Transfinite Arithmetic".

divulgar referencias útiles para cursos de las disciplinas fundamentales que enfrentan los graduados de Economía, y en el Atlas de Topología, un recurso en Topología http://at.yorku.ca/topología/educ.h

0.3 Cumplidos de los Lectores

- T. Lessley, EUA: "Encantador trabajo, bellamente escrito."
- E. Ferrer, Australia: "Sus notas son fantásticas."
- E. Yuan, Germany: "Realmente es un libro fantástico para principiantes en topología."
- S. Kumar, India: "Muy impresionado con el sencillo tratamiento del tema, el cual puede ser seguido fácilmente por no especialistas en matemáticas."
- Pawin Siriprapanukul, Tailandia: "Me estoy preparando para emprender estudios doctorales en Economía y encuentro su libro realmente útil para entender el complejo tema de topología."
- Hannes Reijner, Suecia: "Pienso que es excelente."
- G. Gray, EUA: "Maravilloso texto."
- Dipak Banik, India: "Bella nota."
- B. Pragoff Jr, EUA: "Explica la topología a un estudiante universitario muy bien."
- Tapas Kumar Bose, India: "Una colección excelente de información."
- Eszter Csernai, Hungría: "Soy un estudiante universitario de economía matemática... Estoy seguro que lo que le voy a decir lo ha escuchado varias veces, pero lo repetiré de todas maneras: ¡el libro es absolutamente brillante!."
- Christopher Roe, Australia: "Permítame primero agradecerle por escribir su libro "Topología Sin Dolor"[2]? Aunque es probablemente bastante básico para usted, leerlo me ha resultado una experiencia maravillosa."
- Jeanine Dorminey, EUA: "Actualmente estoy tomando un curso de topología, y estoy teniendo una inusual dificultad con la clase. Yo he estado leyendo la versión digital de su libro en línea y me ha ayudado mucho."

[2] *Nota del traductor:* Traducción de "Topology Without Tears".

- Tarek Fouda, EUA: "Yo estudio un curso avanzado de análisis matemático en el Instituto de Tecnología Stevens para obtener un título de Master en Ingeniería Financiera. Es la primera vez que me expongo a la asignatura de topología. Yo compré algunos libros, pero encuentro que su libro es el único que explica la materia de una manera tan interesante que yo desearía tenerlo conmigo todo el tiempo, para leerlo en el tren o en la escuela."

- Ahmad –Al-Omari, Malasia: "Yo soy un estudiante de doctorado en UKM. Mi área de investigación es topología general, y he encontrado su libro muy interesante."

- Jose Vieitez, Uruguay: "En este semestre yo estoy enseñando topología en la Facultad de Ciencias de Universidad de la República. Me gustaría tener una versión imprimible de su (muy buen) libro."

- Muhammad Y. Bello, Profesor de Matemáticas, Universidad Bayero, Nigeria: "Su libro digital 'Topología Sin Dolor' es un excelente recurso para cualquiera que esté aprendiendo topología. Yo enseño algunos cursos de análisis que asumen conocimientos básicos de topología. Desafortunadamente, algunos de mis estudiantes o no tienen tales conocimientos o los han olvidado. Después de leer su libro, observo que su libro sería una buena fuente para refrescar y/o proveer estos conocimientos a los estudiantes."

- Prof. Dr. Ljubomir R. Savic, Instituto de Mecánica y Teoría de las Estructuras, Universidad de Belgrado, Serbia: "Yo estoy aprendiendo topología y he encontrado su libro maravilloso. Mi especialidad es Mecánica Continua y Análisis Estructural."

- Pascal Lehmann, Alemania:" Tengo que imprimir su fantástico libro para escribir notas en el margen de las hojas."

- Profesor Luis J. Alias, Departamento de Matemática de la Universidad de Murcia, España: "Acabo de descubrir su excelente libro 'Topología Sin Dolor'. Durante este curso, yo enseñaré un curso de topología general (en realidad, comenzaré mi curso mañana por la mañana). Yo comencé a enseñar este curso el año pasado, y esencialmente me guié por el libro de Munkres 'Topología' (segunda edición), del cual cubrí los capítulos 2, 3, parte del 4, el 5, y parte del 9. He estado leyendo su libro y realmente lo he disfrutado. Me gusta muchísimo, especialmente la forma en la que usted introduce conceptos nuevos, y además los consejos y observaciones claves que da a los estudiantes."

- Daniel Nkemzi, Profesor, Departamento de Física, Universidad de Buea, Camerún: Después de muchos años de dificultades para comprender las nociones básicas de topología, sin éxito alguno, ¡me di por vencido! Entonces, recientemente encontré por casualidad su libro, un regalo de Dios, mientras navegaba por la Internet. Hojeando las páginas del libro me convencí que si no entiendo la asignatura usando este texto, ningún otro libro me podrá ayudar."

- Gabriele. E.M. Biella, MD PhD, Jefe de Investigaciones, Instituto de Bioimagen Molecular y Fisiología, Consejo Nacional de Investigación, Italia: "Soy una neurofisióloga y estoy tratando de obtener nuevas descripciones neurodinámicas de procesos sensoriales a través de un enfoque topológico. Estoy leyendo su maravilloso libro."

- Gabriele Luculli, Italia: "Soy sólo una estudiante joven, pero encuentro muy interesante la forma en que propone la asignatura de topología, especialmente la presencia de tantos ejercicios."

- K. Orr, USA: "Un libro excelente."

- Profesor Ahmed Ould, Colombia: "Permítame felicitarlo por la presentación, simplicidad y claridad del material."

- Paul Unstead, EUA: "Me gustan sus notas pues brindan muchos ejercicios concretos, y no asumen que el lector es un especialista en matemáticas."

- Alberto García Raboso, España: "Me gusta muchísimo."

- Guiseppe Curci, Director de Investigaciones en Física Teórica, Instituto Nacional de Física Teórica, Pisa: "Un agradable y esclarecedor libro sobre topología."

- M. Rinaldi, EUA: "Ésta es, por mucho, la más clara y mejor introducción a la topología que he visto... Cuando estudiaba sus notas los conceptos se me pegaban rápidamente, y sus ejemplos son fantásticos."

- Joaquin Poblete, Profesor de Economía, Universidad Católica de Chile: "He terminado de leer su libro, y realmente me gusta. Es muy claro y los ejemplos que brinda son muy reveladores."

- Alexander Liden, Suecia: "He estado disfrutando la lectura, a través de la computadora, de su libro pero me gustaría tener una copia imprimible."

- Francois Neville, EUA: "Soy un estudiante de un curso de ingeniería espacial en la Universidad de Maine, y nuestro profesor ha recomendado su libro para la asignatura de Topología con mucho entusiasmo."

- Hsin-Han Shen, EUA: "Estoy haciendo un doctorado en finanzas en la Universidad Estatal de Nueva York en Búfalo. Su libro de topología es muy detallado y ameno, lo cual es ideal para un primer curso de topología para un estudiante de doctorado cuya especialidad no es matemática, como es mi caso."
- Degin Cai, EUA: "Su libro es maravilloso."
- Eric Yuan, Darmstadt, Alemania: "Soy un estudiante de matemáticas en la Universidad Tecnológica de Darmstadt, y actualmente estoy estudiando topología, y nuestro profesor K.H. Hoffmann recomendó su libro 'Topología Sin Dolor' con mucho entusiasmo."
- Martin Vu, Universidad de Oxford: "Estoy haciendo una maestría en matemáticas aplicadas aquí en Oxford. Ahora me estoy acostumbrando a los conceptos abstractos en matemáticas, el título del libro 'Topología Sin Dolor' tiene una abstracción natural."
- Ahmet Erdem, Turquía: "Me gusta muchísimo."
- Wolfgang Moens, Bélgica:"Soy un estudiante de pre-grado en el Katholieke Universiteit Leuven. Me leí la mayoría de la primera parte del libro 'Topología Sin Dolor' en cuestión de horas. Antes de continuar, tengo que elogiarlo por la clara escritura y excelente estructura (¡las cuales de ninguna manera pasaron desapercibidas!)."
- Duncan Chen, EUA: "Usted debe de recibir correos electrónicos como éste frecuentemente, pero de todas formas me gustaría agradecerle por el libro 'Topología Sin Dolor'. Soy un desarrollador de software y disfruto leer matemáticas."
- Maghaisvarei Sellakumaran, Singapur: "Dentro de poco me voy a los EUA para hacer un doctorado en economía. Encuentro su libro sobre topología extremadamente bueno."
- Tom Hunt, EUA: "Gracias por poner este magnífico texto a disposición de todos en Internet."
- Fausto Saporito, Italia: "Estoy leyendo su ameno libro, y es el mejor que he visto sobre esta materia."
- Takayuki Osogami, EUA: "Comencé a leer su libro 'Topología Sin Dolor' en línea, y encuentro que es un material muy agradable para aprender topología y conceptos matemáticos en general."
- Roman Knöll, Alemania: "Gracias por permitirme leer su maravilloso libro. 'Topología Sin Dolor' me ayudó mucho, y recuperé de alguna manera mi interés en las matemáticas, el cual había perdido debido a clases no sistemáticas y memorizaciones superficiales."

- Yuval Yatskan, EUA: "Le eché un vistazo al libro, y parece ser un trabajo maravilloso."
- N.S. Mavrogiannis, Grecia: "Es un muy buen trabajo."
- Semih Tumen, Turquía: "Sé que los doctorados en economía demandan el aprendizaje de bastante matemáticas, por lo que mientras revisaba los tópicos necesarios, encontré su libro extremadamente útil."
- Pyung Ho Kim, EUA: "Actualmente soy un estudiante de doctorado... Estoy aprendiendo geografía económica, y encuentro que su libro es excelente para aprender los conceptos básicos de topología."
- Javier Hernández, Turquía: "Estoy realmente agradecido a todos aquellos, que al igual que usted, dedican esfuerzos a compartir sus conocimientos con otros, sin pensar solamente en los beneficios que podrían tener al ocultar el candil debajo de la mesa y obtener dinero para que podamos detectar la luz."
- J. Chand, Australia: "Muchas gracias por producir 'Topología Sin Dolor'. Su libro es fantástico."
- Richard VandeVelde, EUA: "Dos años atrás lo contacté para obtener una copia imprimible de 'Topología Sin Dolor' para mi uso personal. En ese momento estuve enseñando un curso combinado de pre-grado y post-grado en topología. Le di a los estudiantes la dirección para acceder en línea al texto. Incluso cuando no seguí los temas en exactamente el mismo orden que usted presenta, uno de los mejores estudiantes de la clase indicó que yo debía presentar el libro como el único texto requerido para la clase. Pienso que es una recomendación muy agradable. Bueno, la historia se repite, y dos años más tarde estoy enseñando nuevamente el mismo curso a una audiencia similar. Por lo que me gustaría ser capaz de descargar una versión completa del texto."
- Profesor Sha Xin Wei, Facultad de Bellas Artes y Ciencia de la Computación, Universidad de Concordia, Canadá: "¡Cumplidos a su texto sobre topología!, el cual ha sido escrito de una manera muy cuidadosa y humana. Me gustaría adoptarlo para un curso que introduzca la belleza en matemáticas a ambiciosos intelectuales y artistas. Es siempre un placer encontrar trabajos como el suyo que trasmiten ideas sin compromiso alguno."
- Profesor Auxiliar Rehana Bari, Bangladesh: "Estoy enseñando topología en una maestría en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Dhaka, Bangladesh. ¿Pudiera tener una copia de su maravilloso libro 'Topología Sin Dolor' para mi uso personal?"

- Long Nguyen, USA "Nunca había visto un libro tan claro que tratase un tema tan difícil."
- Renato Orellana, Chile, "Felicitaciones por su maravilloso libro. Leí los primeros capítulos y los disfruté muchísimo. Pensé que la topología no estaba a mi alcance, pero ahora me declaro optimista."
- M.A.R. Khan, Karachi, Pakistán: "Gracias por acordarse del estudiante del Tercer Mundo."

0.4 El Autor

El autor es Sidney (Shmuel) Allen Morris, Jefe Académico de la Escuela Australiana de Tecnología y Administración (siglas en inglés ATMC, Australian Technical and Management College) y Profesor Emérito de la Universidad de Ballarat, Australia. Hasta abril del 2010. Él fue Profesor de informática y Decano de la Facultad de Postgrado de Tecnología de la Información y Ciencias Matemáticas de la Universidad de Ballarat. Él ha sido Profesor de matemáticas en la Universidad de Australia del Sur, la Universidad de Wollongong y la Universidad de Nueva Inglaterra. El profesor Morris también ha trabajado en la Universidad de Nueva Gales del Sur, la Universidad La Trobe, la Universidad de Adelaida, la Universidad de Tel Aviv, la Universidad de Tulane, y en el Colegio Universitario de Gales del Norte en Bangor.

El Profesor Morris ganó el premio Lester R. Ford de la Asociación Matemática de América y un premio por servicio distinguido de la Sociedad Australiana de Computación. Él ha servido como Editor en Jefe de la revista Práctica e Investigación en Tecnología de la Información, Editor del Boletín de la Sociedad Australiana de Matemáticas, Editor de la revista de Teoría de Grupos, y como Editor en Jefe de la Colección de Disertaciones Australianas de Matemáticas, una colección de libros publicados por la editorial de la Universidad de Cambridge.

El Profesor Morris ha publicado alrededor de 140 artículos de investigación en revistas internacionales, y cuatro libros

1. con Karl Heinrich Hofmann, "La Teoría Lie de los Grupos Pro-Lie Conexos: Una Teoría Estructural para Álgebras Pro-Lie, Grupos Pro-Lie y Grupos Compactos Localmente Conexos", Casa Editorial de la Sociedad Europea de Matemáticas, xv + 678 págs, ISBN 978-3-03719-032-6;
2. con Karl Heinrich Hofmann, "La Estructura de los Grupos Compactos: Un Libro Elemental para el Estudiante-Una Guía de Referencias para el Experto", Editorial de Gruyter, Edición Revisada y Aumentada, xviii + 858 págs, ISBN 978-3-11-019006-9 (ISBN10: 3-11-019006-0);

3. "La Dualidad de Pontryagin y la Estructura de los Grupos Abelianos Localmente Compactos", Editorial de la Universidad de Cambridge, 1977, 136 págs. (traducido al ruso y publicado por la Editorial Mir);

4. con Arthur Jones y Kenneth R. Pearson, "Álgebra Abstracta e Imposibilidades Famosas", Editorial Springer-Verlag, 1ra Ed. 1992, ISBN 0-387-97661-2, 2da. impresión corregida 1993, ISBN 3-540-97661-2.

El Profesor Morris es Miembro Honorario Vitalicio de la Sociedad Australiana de Matemáticas, donde sirvió como Vice-Presidente, y miembro de su Concejo por 20 años.

El Profesor Morris nació en Brisbane en 1947, se graduó de Licenciado en Ciencias (con honores) en la Universidad de Queensland, y un año más tarde, recibió un Doctorado en Filosofía de la Universidad de Flinders. En su carrera profesional él ha ocupado los siguientes cargos de dirección: Jefe de Departamento, Decano, Vice-Presidente de la Junta Académica, Vice-Presidente del Senado Académico, Vice-Decano, Vice-Rector, Vice-Presidente, y Jefe Académico.

Chapter 1

Espacios Topológicos

Introducción

El tenis, el fútbol, el béisbol y el hockey pudieran ser juegos emocionantes, pero para jugarlos se tiene primero que aprender (algunas de) las reglas del juego. Las matemáticas no son diferentes. Por lo que comenzamos con las reglas para la topología.

Este capítulo comienza con la definición de una topología, y continua mostrando algunos ejemplos sencillos: espacios topológicos finitos, espacios discretos, espacios indiscretos[1] y espacios con la topología cofinita[2].

La topología, al igual que otras ramas de las matemáticas, como la teoría de grupos, es una materia axiomática. Comenzamos con un conjunto de axiomas y luego usamos estos axiomas para demostrar proposiciones y teoremas. Es extremadamente importante que el lector desarrolle su habilidad para escribir demostraciones.

¿Por qué las demostraciones son importantes? Suponga que nuestra tarea es construir un edificio. Nosotros comenzaríamos con los cimientos. En nuestro caso éstos son los axiomas o definiciones—todo lo demás se construye sobre ellos. Cada teorema o proposición representa un nuevo nivel de conocimiento y tiene que estar fijado firmemente al nivel anterior. El nuevo nivel se fija al anterior a través de un demostración. Por lo que los teoremas y las proposiciones representan las nuevas alturas del conocimiento adquirido, mientras que las demostraciones son esenciales pues ellas son el cemento que fija los teoremas y proposiciones al nivel anterior. Sin demostraciones la estructura colapsaría.

[1] *Nota del traductor:* Traducción de “indiscrete spaces”.

[2] *Nota del traductor:* Traducción de “cofinite topology”, la cual también se conoce como “finite-closed topology”.

Entonces ¿qué es una demostración matemática?

Una demostración es un argumento irrefutable que comienza con la información inicial que ha sido suministrada, avanza a través de argumentos lógicos (previamente demostrados) y finaliza con lo que fue pedido demostrar.

Usted debe comenzar una demostración escribiendo toda la información que ha sido dada, y entonces escribir lo que se requiere demostrar. Si la información dada o lo que se requiere demostrar contiene términos técnicos, entonces debe escribir las definiciones de esos términos.

Cada demostración debe estar compuesta de oraciones completas. Cada una de estas oraciones debe ser una consecuencia de (i) lo que ha sido expuesto anteriormente o (ii) un teorema, una proposición o un lema previamente demostrado.

En este libro verá muchas demostraciones, pero note que las matemáticas no son un juego pasivo. Ellas son un juego participativo. La única forma de aprender a escribir demostraciones es tratando de escribirlas por sí mismo.

1.1 Topología

1.1.1 Definiciones. Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X se dice que es una **topología** sobre X si

(i) X y el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenecen a $\mathcal{T}$,

(ii) la unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$, y

(iii) la intersección de dos conjuntos cualesquiera de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

El par $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio topológico**.

1.1.2 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Entonces $\mathcal{T}_1$ es una topología sobre X, pues satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de las Definiciones 1.1.1. $\square$

1.1.3 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}.$$

Entonces $\mathcal{T}_2$ $\boxed{\text{no}}$ es una topología sobre X, porque la unión

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

de dos miembros de $\mathcal{T}_2$ no pertenece a $\mathcal{T}_2$; es decir, $\mathcal{T}_2$ no satisface la condición (ii) de las Definiciones 1.1.1. □

1.1.4 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\} .$$

Entonces $\mathcal{T}_3$ $\boxed{\text{no}}$ es una topología sobre X, pues la intersección

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$$

de dos conjuntos en $\mathcal{T}_3$ no pertenece a $\mathcal{T}_3$; es decir, $\mathcal{T}_3$ no satisface la condición (iii) de las Definiciones 1.1.1. □

1.1.5 Ejemplo. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números naturales (es decir, el conjunto de todos los enteros positivos), y denote por $\mathcal{T}_4$ la colección formada por $\mathbb{N}$, $\emptyset$, y todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{T}_4$ $\boxed{\text{no}}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$, pues la unión infinita

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

de elementos de $\mathcal{T}_4$ no pertenece a $\mathcal{T}_4$; es decir, $\mathcal{T}_4$ no cumple la propiedad (ii) de las Definiciones 1.1.1. □

1.1.6 Definiciones. Sean X cualquier conjunto no vacío, y $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{T}$ es llamada la **topología discreta** sobre el conjunto X. El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio discreto**.

Notemos que en las Definiciones 1.1.6 $\mathcal{T}$ satisface las condiciones de las Definiciones 1.1.1, y por lo tanto es ciertamente una topología.

Observe que el conjunto X en las Definiciones 1.1.6 puede ser $\boxed{\text{cualquier}}$ conjunto no vacío. Por lo que existe un número infinito de espacios discretos—uno por cada conjunto X.

1.1.7 Definiciones. Sean X un conjunto no vacío cualquiera y $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{T}$ es llamada la **topología indiscreta** y $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **espacio indiscreto**.

Una vez más tenemos que chequear que $\mathcal{T}$ satisface las condiciones de las Definiciones 1.1.1, y comprobar que es ciertamente una topología[3].

Observemos nuevamente que el conjunto X en las Definiciones 1.1.7 puede ser $\boxed{\text{cualquier}}$ conjunto no vacío. Por lo que existe un número infinito de espacios indiscretos—uno por cada conjunto X.

En la introducción de este capítulo discutimos la importancia de las demostraciones, y lo que involucra escribirlas. Nuestro primer contacto con una demostración es en el Ejemplo 1.1.8 y la Proposición 1.1.9. El estudiante debe estudiar estas demostraciones cuidadosamente.

[3] *Nota del traductor:* la topología indiscreta también se conoce como topología trivial o grosera.

1.1.8 Ejemplo. Si $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T}$ es una topología sobre X con $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ y $\{c\} \in \mathcal{T}$, demuestre que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Demostración.

Dado que $\mathcal{T}$ es una topología y que $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ y $\{c\} \in \mathcal{T}$, se nos pide demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta; es decir, tenemos que demostrar que (según las Definiciones 1.1.6) $\mathcal{T}$ contiene $\boxed{\text{todos}}$ los subconjuntos de X. Recuerde que $\mathcal{T}$ es una topología, y por lo tanto satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de las Definiciones 1.1.1.

Por lo que comenzaremos nuestra demostración anotando todos los subconjuntos de X.

El conjunto X tiene 3 elementos, lo que implica que X tiene 2^3 subconjuntos distintos. Ellos son: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$ y $S_8 = \{a, b, c\} = X$.

Se requiere demostrar que cada uno de estos conjuntos está en $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ es una topología, las Definiciones 1.1.1 (i) implican que X y $\emptyset$ están en $\mathcal{T}$; es decir, $S_1 \in \mathcal{T}$ y $S_8 \in \mathcal{T}$.

Es dado que $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ y $\{c\} \in \mathcal{T}$; es decir, $S_2 \in \mathcal{T}$, $S_3 \in \mathcal{T}$ y $S_4 \in \mathcal{T}$.

Para completar la demostración, necesitamos mostrar que $S_5 \in \mathcal{T}$, $S_6 \in \mathcal{T}$ y $S_7 \in \mathcal{T}$. Pero $S_5 = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$. Como $\{a\}$ y $\{b\}$ están en $\mathcal{T}$, las Definiciones 1.1.1 (ii) implican que su unión también está en $\mathcal{T}$; es decir, $S_5 = \{a, b\} \in \mathcal{T}$.

Igualmente, $S_6 = \{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$ y $S_7 = \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$. $\square$

En los comentarios introductorios de este capítulo observamos que las matemáticas no son un juego pasivo. Usted debe ser un participante activo. Por supuesto que su participación incluye la realización de algunos de los ejercicios. Pero más que eso se espera de usted. Usted tiene que $\boxed{\text{reflexionar}}$ sobre el material que se le ha presentado.

Una de sus tareas es mirar los resultados que demostramos y hacerse preguntas pertinentes. Por ejemplo, hemos demostrado que si cada uno de los conjuntos $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$ está en $\mathcal{T}$ y $X = \{a, b, c\}$, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta. Usted debe preguntarse si éste no es más que un ejemplo de un fenómeno más general; es decir, si $(X, \mathcal{T})$ es cualquier espacio topológico tal que

$\mathcal{T}$ contiene cada conjunto unitario[4], es $\mathcal{T}$ necesariamente la topología discreta? La respuesta es "sí", y ésto es demostrado en la Proposición 1.1.9.

1.1.9 Proposición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico tal que, para cada $x \in X$, el conjunto unitario $\{x\}$ pertenece a $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Demostración.

Este resultado es una generalización del Ejemplo 1.1.8. Consiguientemente, usted pudiera esperar que la demostración sea similar. Sin embargo, nosotros no podemos listar todos los subconjuntos de X como hicimos en el Ejemplo 1.1.8, porque X pudiera ser un conjunto infinito. No obstante, tenemos que demostrar que $\boxed{\text{cada}}$ subconjunto de X está en $\mathcal{T}$.

En este momento usted pudiera intentar demostrar el resultado para algunos casos especiales, por ejemplo pudiera considerar que X está compuesto de 4, 5 o incluso 100 elementos. Pero este enfoque está condenado al fracaso. Recuerde nuestros comentarios en este capítulo donde definimos una demostración matemática como un argumento irrefutable. Nosotros no podemos producir un argumento irrefutable si sólo consideramos unos pocos casos especiales, ni tampoco si consideramos un gran número de casos. El argumento irrefutable tiene que cubrir $\boxed{\text{todos}}$ los casos. Por lo que tenemos que considerar el caso general de un conjunto X arbitrario y no vacío. De alguna forma tenemos que demostrar que cada subconjunto de X está en $\mathcal{T}$.

Mirando nuevamente la demostración del Ejemplo 1.1.8, vemos que la clave es que cada subconjunto de X es una unión de conjuntos unitarios de X, y ya sabemos que todos los conjuntos unitarios están en $\mathcal{T}$. Este hecho también es cierto en el caso general.

Comenzamos la demostración anotando el hecho de que cada conjunto es una unión de sus subconjuntos unitarios. Sea S cualquier subconjunto de X. Entonces

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

[4] *Nota del traductor:* Traducción de "singleton set".

Como se conoce que cada $\{x\}$ está en $\mathcal{T}$, las Definiciones 1.1.1 (ii) y la ecuación anterior implican que $S \in \mathcal{T}$. Como S es un conjunto arbitrario de X, tenemos que $\mathcal{T}$ la topología discreta. □

El hecho de que todo conjunto S es una unión de sus subconjuntos unitarios es un resultado que ocasionalmente usaremos en el libro en diferentes contextos. Note que esto se cumple incluso cuando $S = \emptyset$, pues podemos formar lo que se conoce como una **unión vacía**, y así obtenemos $\emptyset$ como resultado.

Ejercicios 1.1

1. Sea $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Determine cuáles de las siguientes colecciones de subconjuntos de X son una topología sobre X:

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$.

2. Sea $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. ¿Cuáles de las siguientes colecciones de subconjuntos de X son una topología sobre X? (Justifique sus respuestas.)

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$.

3. Si $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $\mathcal{T}$ es la topología discreta sobre X, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   (a) $X \in \mathcal{T}$; (b) $\{X\} \in \mathcal{T}$; (c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$; (d) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

   (e) $\emptyset \in X$; (f) $\{\emptyset\} \in X$; (g) $\{a\} \in \mathcal{T}$; (h) $a \in \mathcal{T}$;

   (i) $\emptyset \subseteq X$; (j) $\{a\} \in X$; (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$; (l) $a \in X$;

   (m) $X \subseteq \mathcal{T}$; (n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$; (o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$; (p) $a \subseteq \mathcal{T}$.

   [Consejo. Exactamente seis de las anteriores afirmaciones son verdaderas.]

4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera. Verifique que la intersección de cualquier número finito de miembros de $\mathcal{T}$ es un miembro de $\mathcal{T}$.

[Consejo. Para demostrar este resultado use "inducción matemática".]

5. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales. Demuestre que cada una de las siguientes colecciones of subconjuntos de $\mathbb{R}$ es una topología.

   (i) $\mathcal{T}_1$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $(-n, n)$, para cualquier entero positivo n;

   (ii) $\mathcal{T}_2$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $[-n, n]$, para cualquier entero positivo n;

   (iii) $\mathcal{T}_3$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $[n, \infty)$, para cualquier entero positivo n.

6. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los enteros positivos. Demuestre que cada una de los siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es una topología.

   (i) $\mathcal{T}_1$ está compuesta de $\mathbb{N}$, $\emptyset$, y todo conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, para cualquier entero positivo n. (Ésta es la llamada **topología del segmento inicial**[5].)

   (ii) $\mathcal{T}_2$ está compuesta de $\mathbb{N}$, $\emptyset$, y todo conjunto $\{n, n+1, \dots\}$, para cualquier entero positivo n. (Ésta es la llamada **topología del segmento final**[6].)

7. Liste todas las topologías posibles sobre los conjuntos siguientes :

   (i) $X = \{a, b\}$;

   (ii) $Y = \{a, b, c\}$.

8. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X. Si cada subconjunto infinito de X está en $\mathcal{T}$, demuestre que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

9.* Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales. Exactamente tres de las siguientes diez colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ son topologías. Identifíquelas y justifique su respuesta.

   (i) $\mathcal{T}_1$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo (a, b), para números reales cualesquiera a y b con $a < b$;

   (ii) $\mathcal{T}_2$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $(-r, r)$, para cualquier número real positivo r;

   (iii) $\mathcal{T}_3$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $(-r, r)$, para cualquier número racional positivo r;

[5] *Nota del traductor:* Traducción de "initial segment topology".
[6] *Nota del traductor:* Traducción de "final segment topology".

(iv) $\mathcal{T}_4$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $[-r, r]$, para cualquier número racional positivo r;

(v) $\mathcal{T}_5$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $(-r, r)$, para cualquier número irrational positivo r;

(vi) $\mathcal{T}_6$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $[-r, r]$, para cualquier número irrational positivo r;

(vii) $\mathcal{T}_7$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $[-r, r)$, para cualquier número real positivo r;

(viii) $\mathcal{T}_8$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, y todo intervalo $(-r, r]$, para cualquier número real positivo r;

(ix) $\mathcal{T}_9$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, todo intervalo $[-r, r]$, y todo intervalo $(-r, r)$, para cualquier número real positivo r;

(x) $\mathcal{T}_{10}$ está compuesta de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, todo intervalo $[-n, n]$, y todo intervalo $(-r, r)$, para cualquier número entero positivo n y cualquier número real positivo r.

1.2 Conjuntos Abiertos, Conjuntos Cerrados, y Conjuntos Abiertos y Cerrados

En vez de continuamente referirnos a "los miembros de $\mathcal{T}$", es más conveniente dar a tales conjuntos un nombre. Los llamaremos "conjuntos abiertos". También le daremos un nombre a los complementos de los conjuntos abiertos. Los llamaremos "conjuntos cerrados". Esta terminología no es ideal, pero se deriva de los llamados "intervalos abiertos" e "intervalos cerrados" de la recta numérica real. Este tema será nuevamente abordado en el Capítulo 2.

1.2.1 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ cualquier espacio topológico. Entonces los miembros de $\mathcal{T}$ son llamados **conjuntos abiertos**.

1.2.2 Proposición. Si $(X, \mathcal{T})$ es cualquier espacio topológico, entonces

(i) X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos,

(ii) la unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, y

(iii) la intersección de cualquier número finito de conjunto abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. Claramente (i) y (ii) son consecuencias triviales de la Definición 1.2.1 y las Definiciones 1.1.1 (i) y (ii). La condición (iii) se obtiene de la Definición 1.2.1 y los Ejercicios 1.1 #4. $\square$

Leyendo la Proposición 1.2.2, una pregunta debió haberles saltado a la mente: la unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, mientras que decimos que solamente intersecciones $\boxed{\text{finitas}}$ de conjuntos abiertos son abiertas. ¿Las intersecciones infinitas de conjuntos abiertos son siempre abiertas? El próximo ejemplo muestra que la respuesta es “no”.

1.2.3 Ejemplo. Sean $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números enteros positivos y $\mathcal{T}$ una colección compuesta de $\emptyset$ y cada subconjunto S de $\mathbb{N}$ tal que el complemento de S en $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\setminus S$, es un conjunto finito. Es fácil verificar que $\mathcal{T}$ satisface las Definiciones 1.1.1, y por lo tanto es un topología sobre $\mathbb{N}$. (En la sección próxima discutiremos esta topología más a fondo, la cual es llamada la topología cofinita.) Para cada número natural n, defina el conjunto S_n de la siguiente forma:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

Claramente cada S_n es un conjunto abierto en la topología $\mathcal{T}$, pues su complemento es un conjunto finito. Sin embargo,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\}. \tag{1}$$

Como el complemento de $\{1\}$ no es $\mathbb{N}$ ni un conjunto finito, $\{1\}$ no es un conjunto abierto. Por lo que (1) muestra que la intersección de los conjuntos abiertos S_n no es abierta. $\square$

Usted pudiera preguntarse: ¿cómo encontré el ejemplo presentado en el Ejemplo 1.2.3? ¡La respuesta no es atractiva! Fue usando el método de prueba y error.

Si consideramos, por ejemplo, la topología discreta, veremos que toda intersección de conjuntos abiertos es ciertamente abierta. Lo mismo es cierto para la topología indiscreta. Entonces lo que usted necesita hacer son algunas suposiciones educadas.

Recuerde que para demostrar que la intersección de conjuntos abiertos no es necesariamente abierta, ¡sólo necesita encontrar un contraejemplo!

1.2.4 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto S de X es un **conjunto cerrado** en $(X, \mathcal{T})$ si su complemento en X, es decir $X \setminus S$, es abierto en $(X, \mathcal{T})$.

En el Ejemplo 1.1.2, los conjuntos cerrados son

$$\emptyset, X, \{b, c, d, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, e, f\} \text{ y } \{a\}.$$

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio discreto, entonces es obvio que cada subconjunto de X es un conjunto cerrado. Sin embargo, en un espacio indiscreto, $(X, \mathcal{T})$, los únicos conjuntos cerrados son X y $\emptyset$.

1.2.5 Proposición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces

(i) $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados,

(ii) la intersección de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y

(iii) la unión de cualquier número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración. (i) sigue inmediatamente de la Proposición 1.2.2 (i) y la Definición 1.2.4, puesto que el complemento de X es $\emptyset$ y el complemento de $\emptyset$ es X.

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ conjuntos cerrados. Para demostrar que (iii) es cierto, necesitamos demostrar que $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ es un conjunto cerrado. Para ello es suficiente mostrar, por la Definición 1.2.4, que $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$ es un conjunto abierto.

Como $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son conjuntos cerrados, sus complementos $X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$, ..., $X \setminus S_n$ son conjuntos abiertos. Pero

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n)^7. \quad (1)$$

[7] *Nota de traductor:* Esta identidad es conocida como "Ley de De Morgan".

Como el miembro derecho de (1) es un intersección finita de conjuntos abiertos, él es un conjunto abierto. Por lo que el miembro izquierdo de (1) es un conjunto abierto. Por consiguiente, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ es un conjunto cerrado, y (iii) es verdadera.

La demostración de (ii) es similar a la de (iii). [Sin embargo, debe leer la advertencia en la demostración del Ejemplo 1.3.9.] $\square$

Advertencia. Los nombres "abierto" y "cerrado" frecuentemente llevan a novicios en el mundo de la topología a cometer errores. A pesar de los nombres, ¡algunos conjuntos abiertos son también conjuntos cerrados! Además, ¡algunos conjuntos no son abiertos ni cerrados! En efecto, si consideramos el ejemplo Ejemplo 1.1.2, vemos que

(i) el conjunto $\{a\}$ es tanto abierto como cerrado;

(ii) el conjunto $\{b, c\}$ no es abierto ni cerrado;

(iii) el conjunto $\{c, d\}$ es abierto pero no cerrado;

(iv) el conjunto $\{a, b, e, f\}$ es cerrado pero no abierto.

En un espacio discreto, cada conjunto es tanto abierto como cerrado, mientras que en un espacio indiscreto $(X, \mathcal{T})$, todos los subconjuntos de X, con la excepción de X y $\emptyset$, no son ni abiertos ni cerrados. $\square$

Para enfatizar el hecho de que un conjunto puede ser tanto abierto como cerrado, introducimos la definición siguiente.

1.2.6 Definición. Un subconjunto S de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **abierto y cerrado** si es tanto un conjunto abierto como un conjunto cerrado en $(X, \mathcal{T})$.

En cada espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, tanto X como $\emptyset$ son conjuntos abiertos y cerrados[8].

En un espacio discreto, todos los subconjuntos de X son abiertos y cerrados.

En un espacio indiscreto, los únicos conjuntos abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

[8] *Nota del traductor:* Actualmente, como traducción de "conjunto abierto y cerrado" al idioma inglés, la frase "clopen set" es generalmente aceptada.

Ejercicios 1.2

1. Liste todos los 64 subconjuntos del conjunto X en el Ejemplo 1.1.2. Escriba, al lado de cada conjunto, si es (i) abierto y cerrado; (ii) ni abierto ni cerrado; (iii) abierto pero no cerrado; (iv) cerrado pero no abierto.

2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con la propiedad de que cada subconjunto es cerrado. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio discreto.

3. Observe que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio discreto o indiscreto, entonces cada conjunto abierto es también un conjunto cerrado. Encuentre una topología $\mathcal{T}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ que no sea discreta o indiscreta pero tenga la propiedad de que cada conjunto abierto también sea cerrado.

4. Sea X un conjunto infinito. Si $\mathcal{T}$ es una topología sobre X tal que cada subconjunto infinito de X es cerrado, demuestre que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

5. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X con la propiedad de que el único subconjunto infinito de X que es abierto es el propio X. ¿Es $(X, \mathcal{T})$ necesariamente un espacio indiscreto?

6. (i) Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre un conjunto X tal que $\mathcal{T}$ consta precisamente de cuatro conjuntos; es decir, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$, donde A and B son conjuntos propios y no vacíos de X. [A es un **subconjunto propio** de X si $A \subseteq X$ y $A \neq X$, ésto se denota por $A \subset X$.] Muestre que A y B tienen que satisfacer exactamente una de las siguientes condiciones:

$$(a)\ B = X \setminus A; \qquad (b)\ A \subset B; \qquad (c)\ B \subset A.$$

[Consejo. Primeramente muestre que A y B tienen que satisfacer al menos una de las condiciones y luego que no pueden satisfacer más de una de ellas.]

   (ii) Usando (i) liste todas las topologías sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$ que constan de exactamente cuatro conjuntos.

1.3 La Topología Cofinita

Es usual definir una topología sobre un conjunto especificando cuales conjuntos son abiertos. Sin embargo, a veces es más natural describir la topología especificando cuales conjuntos son cerrados. La próxima definición brinda un ejemplo de este tipo.

1.3.1 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una topología $\mathcal{T}$ sobre X es llamada **topología cofinita** si los conjuntos cerrados de X son X y todos los subconjuntos finitos de X; es decir, los conjuntos abiertos son $\emptyset$ y todos los subconjuntos de X que tienen complemento finito.

Una vez más es necesario chequear que $\mathcal{T}$ en la Definición 1.3.1 es ciertamente una topología; es decir, que satisface cada una de las condiciones de las Definiciones 1.1.1.

Note que la Definición 1.3.1 no dice que cada topología que tenga a X y a los subconjuntos finitos de X como conjuntos cerrados es la topología cofinita. Éstos tienen que ser los $\boxed{\text{únicos}}$ conjuntos cerrados de la topología. [Por supuesto, en la topología discreta sobre cualquier conjunto X, el conjunto X y todos los subconjuntos finitos de X son ciertamente cerrados, pero también lo son todos los otros subconjuntos de X.]

En la topología cofinita todos los conjuntos finitos son cerrados. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que los subconjuntos infinitos no tienen que ser abiertos.

1.3.2 Ejemplo. Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de todos los números enteros positivos, entonces conjuntos como $\{1\}$, $\{5,6,7\}$, $\{2,4,6,8\}$ son finitos, y por consiguiente cerrados en la topología cofinita. Consecuentemente, sus complementos

$$\{2,3,4,5,\dots\},\ \{1,2,3,4,8,9,10,\dots\},\ \{1,3,5,7,9,10,11,\dots\}$$

son conjuntos abiertos en la topología cofinita. Por otro lado, el conjunto de los enteros positivos pares no es un conjunto cerrado puesto que no es finito, y por consiguiente su complemento, el conjunto de los enteros positivos impares, no es un conjunto abierto en la topología cofinita.

Por lo que, aunque todos los conjuntos finitos son cerrados, no todos los conjuntos infinitos son abiertos. $\square$

1.3.3 Ejemplo. Sea $\mathcal{T}$ la topología cofinita sobre un conjunto X. Si X tiene al menos 3 subconjuntos distintos que son abiertos y cerrados, demuestre que X es un conjunto finito.

Demostración.

Sabemos que $\mathcal{T}$ es la topología cofinita, y que existen al menos 3 subconjuntos distintos que son abiertos y cerrados.

Tenemos que demostrar que X es un conjunto finito.

Recuerde que si $\mathcal{T}$ es la topología cofinita, la familia de todos los conjuntos cerrados está formada por X y todos los subconjuntos finitos de X.

También recuerde que en cada espacio topológico existen al menos dos conjuntos abiertos y cerrados, X y $\emptyset$. (Vea el comentario que inmediatamente sigue la Definición 1.2.6.) Pero se nos informó que en el espacio $(X, \mathcal{T})$ existen al menos 3 subconjuntos distintos que son abiertos y cerrados. Ésto implica que existe un conjunto abierto y cerrado diferente de $\emptyset$ y X. ¡Por lo que tendremos que mirar cuidadosamente este otro conjunto!

Como nuestro espacio $(X, \mathcal{T})$ tiene 3 subconjuntos distintos que son abiertos y cerrados, sabemos que existe un conjunto abierto y cerrado S de X tal que $S \neq X$ y $S \neq \emptyset$. Como S es abierto en $(X, \mathcal{T})$, la Definición 1.2.4 implica que su complemento $X \setminus S$ es un conjunto cerrado.

Por lo tanto, S y $X \setminus S$ son cerrados en la topología cofinita $\mathcal{T}$. Por consiguiente, S y $X \setminus S$ son ambos finitos, pues los dos son distintos de X. Pero $X = S \cup (X \setminus S)$ y por lo tanto X es la unión de dos conjuntos finitos. De esta manera, X es un conjunto finito, como se requería. $\square$

Ahora conocemos tres topologías distintas que podemos definir sobre cualquier conjunto infinito—y existen muchas más. Las tres que conocemos son la topología discreta, la topología indiscreta, y la topología cofinita. Por lo que tenemos que ser cuidadosos cuando especifiquemos la topología sobre un conjunto.

Por ejemplo, el conjunto $\{n : n \geq 10\}$ es abierto en la topología cofinita sobre el conjunto de los números naturales, pero no es abierto en la topología indiscreta. El conjunto de los números naturales impares es abierto en la topología discreta sobre el conjunto de los números naturales, pero no es abierto en la topología cofinita.

Ahora damos algunas definiciones que probablemente usted ya conozca.

1.3.4 Definiciones. Sea f una función de un conjunto X en un conjunto Y.

(i) La función f se llama **inyectiva** si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, para $x_1, x_2 \in X$;

(ii) La función f se llama **sobreyectiva** si para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(iii) La función f se llama **biyectiva** si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

1.3.5 Definiciones. Sea f una función de un conjunto X en un conjunto Y. La función f **tiene una inversa** si existe una función g de Y en X tal que $g(f(x)) = x$, para toda $x \in X$ y $f(g(y)) = y$, para toda $y \in Y$. La función g se llama **función inversa** de f.

La demostración de la proposición siguiente es dejada como ejercicio al estudiante.

1.3.6 Proposición. Sea f una función de un conjunto X en un conjunto Y.

(i) La función f tiene una inversa si, y sólo si, f es biyectiva.

(ii) Sean g_1 y g_2 funciones de Y en X. Si g_1 y g_2 son ambas funciones inversas de f, entonces $g_1 = g_2$; es decir, $g_1(y) = g_2(y)$, para toda $y \in Y$.

(iii) Sea g una función de Y en X. Entonces g es una función inversa de f si, y sólo si, f es una función inversa de g.

Advertencia. Es un error bastante común de los estudiantes pensar que una función es inyectiva si "transforma un punto en otro punto".

Todas las funciones transforman un punto en otro punto. Ciertamente ésto es parte de la definición de una función.

Una función inyectiva es una función que transforma puntos diferentes en puntos diferentes.

$\square$

Ahora tratamos una noción muy importante que usted pudiera no conocer.

1.3.7 Definición. Sea f una función de un conjunto X en un conjunto Y. Si S es cualquier subconjunto de Y, entonces el conjunto $f^{-1}(S)$ es definido por

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ and } f(x) \in S\}.$$

El subconjunto $f^{-1}(S)$ of X se llama la **imagen inversa** de S.

Note que una función inversa de $f\colon X \to Y$ existe si, y sólo si, f es biyectiva. Pero la imagen inversa de cualquier subconjunto de Y existe incluso si f no es inyectiva ni sobreyectiva. El próximo ejemplo demuestra ésto.

1.3.8 Ejemplo. Sea f una función del conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, en el mismo, dada por $f(z) = |z|$, para cada $z \in \mathbb{Z}$.

La función f no es inyectiva, pues $f(1) = f(-1)$.

No es tampoco sobreyectiva, pues no existe $z \in \mathbb{Z}$, tal que $f(z) = -1$. Por lo que f no es biyectiva. Por consiguiente, por la Proposición 1.3.6 (i), f no tiene función inversa. Sin embargo las imágenes inversas ciertamente existen. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1,2,3\}) &= \{-1,-2,-3,1,2,3\} \\ f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\}) &= \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}. \end{aligned}$$ □

Concluimos esta sección con un ejemplo interesante.

1.3.9 Ejemplo. Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico y X un conjunto no vacío. Además, sea f una función de X en Y. Ponga $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$. Demuestre que $\mathcal{T}_1$ es una topología sobre X.

Demostración.

Nuestra tarea es mostrar que la colección de conjuntos, $\mathcal{T}_1$, es una topología sobre X; es decir, tenemos que mostrar que $\mathcal{T}_1$ satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de las Definiciones 1.1.1.

$$X \in \mathcal{T}_1 \quad \text{pues} \quad X = f^{-1}(Y) \quad \text{y} \quad Y \in \mathcal{T}.$$
$$\emptyset \in \mathcal{T}_1 \quad \text{pues} \quad \emptyset = f^{-1}(\emptyset) \quad \text{y} \quad \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}_1$ posee la propiedad (i) de las Definiciones 1.1.1.

Para verificar la condición (ii) de las Definiciones 1.1.1, defina $\{A_j : j \in J\}$ como una colección de miembros de $\mathcal{T}_1$, para algún conjunto J de índices. Tenemos que demostrar que $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$. Como $A_j \in \mathcal{T}_1$, la definición de $\mathcal{T}_1$ implica que $A_j = f^{-1}(B_j)$, donde $B_j \in \mathcal{T}$. Además $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$. [Vea los Ejercicios 1.3 # 1.]

Como $B_j \in \mathcal{T}$, para todo $j \in J$, tenemos $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$, pues $\mathcal{T}$ es una topología sobre Y. Por lo tanto, por la definición de $\mathcal{T}_1$, $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \in \mathcal{T}_1$; es decir, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$.

Por consiguiente, $\mathcal{T}_1$ posee la propiedad (ii) de las Definiciones 1.1.1.

[**Advertencia.** Se le recuerda que no todos los conjuntos son numerables. (Vea el Apéndice para comentarios sobre conjuntos numerables.) Por lo que no sería suficiente, en el argumento anterior, asumir que los conjuntos $A_1, A_2 \dots, A_n, \dots$ están en $\mathcal{T}_1$ y mostrar que la unión $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ está en $\mathcal{T}_1$. Ésto demostraría solamente que la unión de un número $\boxed{\text{numerable}}$ de conjuntos en $\mathcal{T}_1$ está en $\mathcal{T}_1$, pero no demostraría que $\mathcal{T}_1$ posee la propiedad (ii) de las Definiciones 1.1.1– esta propiedad requiere que $\boxed{\text{todas}}$ las uniones, numerables o no numerables, de conjuntos de $\mathcal{T}_1$ estén en $\mathcal{T}_1$.]

Finalmente, sean A_1 y A_2 dos conjuntos en $\mathcal{T}_1$. Tenemos que mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$.

Como $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$ y$A_2 = f^{-1}(B_2)$, donde $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$.

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2). \qquad \text{[Vea los Ejercicios 1.3 \#1.]}$$

Como $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$, tenemos que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$. Por consiguiente, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$, y hemos demostrado que $\mathcal{T}_1$ también posee la propiedad (iii) de las Definiciones 1.1.1.

Por lo que $\mathcal{T}_1$ es ciertamente una topología sobre X. $\square$

Ejercicios 1.3

1. Sea f una función de un conjunto X en un conjunto Y. Entonces en el Ejemplo 1.3.9 usamos que
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \tag{1}$$
y
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \tag{2}$$
para cualesquiera subconjuntos B_j de Y, y cualquier conjunto J de índices.

   (a) Demuestre que (1) es verdadero.
   [Consejo. Comience la demostración seleccionando un elemento arbitrario x del conjunto de la parte izquierda y muestre que x pertenece al conjunto de la parte derecha. Luego haga lo contrario.]

   (b) Demuestre que (2) es verdadero.

   (c) Encuentre conjuntos (concretos) A_1, A_2, X y Y, y una función $f\colon X \to Y$ tal que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$, donde $A_1 \subseteq X$ y $A_2 \subseteq X$.

2. Es la topología $\mathcal{T}$ descrita en los Ejercicios 1.1 #6 (ii) la topología cofinita? (Justifique su respuesta.)

3. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama T_1-espacio si cada conjunto unitario $\{x\}$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. Muestre que exactamente dos de los siguientes nueve espacios topológicos son T_1-espacios. (Justifique su respuesta.)

   (i) un espacio discreto;

   (ii) un espacio indiscreto con al menos dos elementos;

   (iii) un conjunto infinito con la topología cofinita;

   (iv) Ejemplo 1.1.2;

   (v) Ejercicios 1.1 #5 (i);

   (vi) Ejercicios 1.1 #5 (ii);

   (vii) Ejercicios 1.1 #5 (iii);

   (viii) Ejercicios 1.1 #6 (i);

(ix) Ejercicios 1.1 #6 (ii).

4. Sea $\mathcal{T}$ la topología cofinita sobre un conjunto X. Si $\mathcal{T}$ es además la topología discreta, demuestre que el conjunto X es finito.

5. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama un T_0-espacio si para cada par de elementos distintos a, b en X, o existe un conjunto abierto que contiene a y no b, o existe un conjunto abierto que contiene b y no a.

   (i) Demuestre que todo T_1-espacio es un T_0-espacio.

   (ii) ¿Cuáles de los incisos (i)–(vi) en el Ejercicio 3 anterior son T_0-espacios? (Justifique su respuesta.)

   (iii) Defina una topología $\mathcal{T}$ sobre el conjunto $X = \{0, 1\}$ tal que $(X, \mathcal{T})$ sea un T_0-espacio pero no un T_1-espacio. [El espacio topológico que se obtiene se llama **espacio Sierpinski**.]

   (iv) Demuestre que cada uno de los espacios topológicos descritos en los Ejercicios 1.1 #6 es un T_0-espacio. (Observe que en el Ejercicio 3 anterior vimos que ninguno es un T_1-espacio.)

6. Sea X un conjunto infinito cualquiera. La **topología numerable-cerrada** se define como la topología que tiene como sus conjuntos cerrados al conjunto X y a todos los subconjuntos numerables de X. Demuestre que ésta es ciertamente un topología sobre X.

7. Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías sobre un conjunto X. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

   (i) Si $\mathcal{T}_3$ es definida por $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{T}_3$ no es necesariamente una topología sobre X. (Justifique su respuesta, encontrando un ejemplo concreto.)

   (ii) Si $\mathcal{T}_4$ es definida por $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{T}_4$ es una topología sobre X. (La topología $\mathcal{T}_4$ se llama **intersección** de las topologías $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$.)

   (iii) Si $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(X, \mathcal{T}_2)$ son T_1-espacios, entonces $(X, \mathcal{T}_4)$ es también un T_1-espacio.

   (iv) Si $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(X, \mathcal{T}_2)$ son T_0-espacios, entonces $(X, \mathcal{T}_4)$ no es necesariamente un T_0-espacio. (Justifique su respuesta encontrando un ejemplo concreto.)

(v) Si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$ son topologías sobre un conjunto X, entonces $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ es un topología sobre X.

(vi) Si para cada $i \in I$, para algún conjunto I de índices, cada $\mathcal{T}_i$ es una topología sobre el conjunto X, entonces $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ es un topología sobre X.

1.4 Postdata

En este capítulo introducimos la fundamental noción de espacio topológico. Como ejemplos, vimos varios espacios topológicos finitos[9], así como también espacios discretos, espacios indiscretos y espacios con la topología cofinita. Ninguno de éstos constituye un ejemplo particularmente importante en los que respecta a aplicaciones. Sin embargo, en los Ejercicios 4.3 #8, se hace notar que todo espacio topológico infinito "contiene" un espacio topológico infinito con una de las siguientes cinco topologías: la topología indiscreta, la topología discreta, la topología cofinita, la topología del segmento inicial, o la topología del segmento final de los Ejercicios 1.1 #6. En el próximo capítulo describiremos la muy importante topología euclidiana.

En nuestro caminos nos encontramos con los términos "conjunto abierto" y "conjunto cerrado", y fuimos advertidos que estos nombres pueden ser engañosos. Un conjunto puede ser tanto abierto como cerrado, ni abierto ni cerrado, abierto pero no cerrado, o cerrado pero no abierto. Es importante recordar que no podemos demostrar que un conjunto es abierto mostrando que no es cerrado.

Además de las definiciones de topología, espacio topológico, conjunto abierto, y conjunto cerrado, el tema más significativo cubierto fue la escritura de demostraciones.

En los comentarios iniciales de este capítulo, señalamos la importancia de aprender a escribir demostraciones. En el Ejemplo 1.1.8, la Proposición 1.1.9, y el Ejemplo 1.3.3, hemos visto como "examinar" una demostración. Es esencial que el estudiante desarrolle sus propias habilidades para escribir demostraciones. Buenos ejercicios para lograr este objetivo incluyen los Ejercicios 1.1 #8, los Ejercicios 1.2 #2,4, y los Ejercicios 1.3 #1,4.

Algunos estudiantes se confunden por la noción de topología, pues involucra "conjuntos de conjuntos". Para chequear su comprensión, haga los Ejercicios 1.1 #3.

[9] Para nosotros un **espacio topológico finito** es un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ donde el conjunto X es finito.

Los ejercicios incluyeron las nociones de T_0-espacio y T_1-espacio, los cuáles serán introducidos formalmente más adelante. Éstos son conocidos como **propiedades de separación**.

Finalmente enfatizamos la importancia de las imágenes inversas. Éstas son tratadas en el Ejemplo 1.3.9 y en los Ejercicios 1.3 #1. Nuestra definición de función continua dependerá de la noción de imagen inversa.

Chapter 2

La Topología Euclidiana

Introducción

En una película o una novela usualmente existen varios protagonistas alrededor de los cuales la trama se desarrolla. En la trama de la topología, la topología Euclidiana sobre el conjunto de los números reales es uno de los protagonistas. Ciertamente, es un ejemplo tan importante que frecuentemente recurriremos a él para futuros análisis e inspiración.

Denote por $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales. En el Capítulo 1 vimos tres topologías que pueden ser definidas sobre cualquier conjunto: la topología discreta, la topología indiscreta y la topología cofinita. Por lo que ya conocemos tres topologías que podemos definir sobre el conjunto $\mathbb{R}$. Otras seis topologías sobre $\mathbb{R}$ fueron definidas en los Ejercicios 1.1 #5 y #9. En este capítulo describiremos una topología sobre $\mathbb{R}$ que es mucho más importante e interesante, la topología Euclidiana.

El análisis de la topología Euclidiana nos guiará a la noción de "base de una topología". En el estudio de álgebra lineal aprendimos que cada espacio vectorial tiene una base, y que cada vector es una combinación lineal de los miembros de la base. Igualmente, en un espacio topológico cada conjunto abierto puede ser expresado como una unión de miembros de una base del espacio. Ciertamente, un conjunto es abierto si, y sólo si, es una unión de miembros de la base.

2.1 La Topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$

2.1.1 Definición. Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ se llama abierto en la **topología Euclidiana sobre** $\mathbb{R}$ si tiene la propiedad siguiente:

$(*)$ Por cada $x \in S$, existen a, b en $\mathbb{R}$, con $a < b$, tal que $x \in (a, b) \subseteq S$.

Notación. Siempre que nos refiramos al espacio topológico $\mathbb{R}$ sin especificar la topología, asumiremos $\mathbb{R}$ con la topología Euclidiana.

2.1.2 Observaciones. (i) La "topología Euclidiana" $\mathcal{T}$ es una topología.

Demostración.

Tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ satisface las condiciones (i), (ii), y (iii) de las Definiciones 1.1.1.

Conocemos que un conjunto está en $\mathcal{T}$ si, y sólo si, tiene la propiedad $(*)$.

Primeramente, mostramos que $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Si ponemos $a = x - 1$ y $b = x + 1$, entonces $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$; es decir, $\mathbb{R}$ tiene la propiedad $(*)$ y por lo tanto, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. En segundo lugar, $\emptyset \in \mathcal{T}$ pues $\emptyset$ tiene la propiedad $(*)$ por defecto.

Sea $\{A_j : j \in J\}$ una familia de miembros de $\mathcal{T}$, para algún conjunto J de índices. Entonces tenemos que mostrar que $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$; es decir, tenemos que mostrar que $\bigcup_{j\in J} A_j$ tiene la propiedad $*$. Sea $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. Entonces $x \in A_k$, para algún $k \in J$. Como $A_k \in \mathcal{T}$, existen a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subseteq A_k$. Como $k \in J$, $A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$ y por lo tanto $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$. Por consiguiente, $\bigcup_{j\in J} A_j$ tiene la propiedad $(*)$, y de esta forma está en $\mathcal{T}$, como era requerido.

Finalmente, tome A_1 y A_2 en $\mathcal{T}$. Tenemos que mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Sea $y \in A_1 \cap A_2$, entonces $y \in A_1$. Como $A_1 \in \mathcal{T}$, existen a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $y \in (a, b) \subseteq A_1$. Además $y \in A_2 \in \mathcal{T}$. Por lo que existen c y d en $\mathbb{R}$ con $c < d$ tal que $y \in (c, d) \subseteq A_2$. Sea e el mayor de a y c, y f el menor de b y d. Se puede chequear fácilmente que $e < y < f$, y por lo tanto $y \in (e, f)$. Como $(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_1$ and $(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_2$, deducimos que $y \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$. Por consiguiente, $A_1 \cap A_2$ tiene la propiedad $(*)$, implicando que está en $\mathcal{T}$.

Consecuentemente, $\mathcal{T}$ es ciertamente una topología sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Ahora procedemos a describir los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. En particular, veremos que todos los intervalos abiertos son en efecto conjuntos abiertos en esta topología y que todos los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.

(ii) Sean $r, s \in \mathbb{R}$ con $r < s$. En la topología Euclidiana $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$, el intervalo abierto (r, s) ciertamente pertenece a $\mathcal{T}$, siendo por lo tanto un conjunto abierto.

Demostración.

Sabemos que (r, s) es un intervalo abierto, y tenemos que mostrar que (r, s) es abierto en la topología Euclidiana; es decir, tenemos que mostrar que (r, s) tiene la propiedad $(*)$ de la la Definición 2.1.1.

Por lo que comenzaremos tomando $x \in (r, s)$, y queremos encontrar a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$.

Sea $x \in (r, s)$. Escoja $a = r$ y $b = s$. Entonces claramente

$$x \in (a, b) \subseteq (r, s).$$

Por lo que, (r, s) es un conjunto abierto en la topología Euclidiana. $\square$

(iii) Los intervalos abiertos (r, ∞) and $(-\infty, r)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, para cada número real r.

Demostración.

Primeramente, mostraremos que (r, ∞) es un conjunto abierto; es decir, que tiene la propiedad $(*)$.

Para mostrar esto, tomamos $x \in (r, \infty)$ y buscamos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \in (a, b) \subseteq (r, \infty).$$

Sea $x \in (r, \infty)$. Ponga $a = r$ y $b = x + 1$. Entonces $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$ y por lo tanto $(r, \infty) \in \mathcal{T}$.

Un argumento similar muestra que $(-\infty, r)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. $\square$

(iv) Es importante notar que mientras cada intervalo abierto es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, lo contrario es falso. No todos los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ son intervalos. Por ejemplo, el conjunto $(1,3) \cup (5,6)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, pero no es un intervalo abierto. Incluso el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. $\square$

(v) Para cada c y d en $\mathbb{R}$ con $c < d$, el intervalo cerrado $[c,d]$ no es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Demostración.

Tenemos que mostrar que $[c,d]$ no posee la propiedad $(*)$.

Para hacer esto, es suficiente encontrar un x para el cual no existan a, b que tengan la propiedad $(*)$.

Claramente, c y d son puntos especiales en el intervalo $[c,d]$. Por lo que escogeremos $x = c$ y mostraremos que no existen a, b con la propiedad requerida.

Aquí usamos el método de demostración llamado **demostración por contradicción**. Suponemos que existen a y b con la propiedad requerida y mostramos que esto lleva a una contradicción, es decir, algo que es falso. Consecuentemente, ¡la suposición es falsa! Por lo que, no existen tales a y b, y obtenemos que $[c,d]$ no posee la propiedad $(*)$, y como consecuencia, no es conjunto abierto.

Observe que $c \in [c,d]$. Suponga que existen a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $c \in (a,b) \subseteq [c,d]$. Entonces, $c \in (a,b)$ implica que $a < c < b$, y por lo tanto, $a < \frac{c+a}{2} < c < b$. Como consecuencia, $\frac{c+a}{2} \in (a,b)$ y $\frac{c+a}{2} \notin [c,d]$. Por consiguiente, $(a,b) \not\subseteq [c,d]$, lo cual es una contradicción. Por lo que no existen a y b tal que $c \in (a,b) \subseteq [c,d]$. De este modo, $[c,d]$ no posse la propiedad $(*)$, y por lo tanto $[c,d] \notin \mathcal{T}$. $\square$

(vi) Por cada a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo cerrado $[a,b]$ es un conjunto cerrado en la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Para ver que $[a,b]$ es cerrado, solamente tenemos que observar que, como su complemento $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es la unión de dos conjuntos abiertos, $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es un conjunto abierto. $\square$

(vii) Cada conjunto unitario $\{a\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

Demostración. El complemento de $\{a\}$ es la unión de los dos conjuntos abiertos $(-\infty, a)$ and (a, ∞), por lo que es un conjunto abierto. Como resultado, $\{a\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, como se requería.

[En la terminología de los Ejercicios 1.3 #3, esto nos dice que $\mathbb{R}$ es un T_1-espacio.] $\square$

(viii) Note que podíamos haber incluido (vii) en (vi) simplemente reemplazando "$a < b$" por "$a \leq b$". El conjunto unitario $\{a\}$ no es más que el caso degenerado del intervalo cerrado $[a, b]$. $\square$

(ix) El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Demostración. El complemento de $\mathbb{Z}$ es la unión $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$ de subconjuntos abiertos $(n, n+1)$ de $\mathbb{R}$, por lo que es abierto en $\mathbb{R}$. Por consiguiente, $\mathbb{Z}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. $\square$

(x) El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales no es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ ni es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Demostración.

Mostraremos que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto abierto demostrando que éste no posee la propiedad $(*)$.

Para hacer esto, basta con mostrar que $\mathbb{Q}$ no contiene <u>ningún</u> intervalo (a, b) con $a < b$.

$\boxed{\text{Suponga}}$ que $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$, donde a y b están en $\mathbb{R}$ con $a < b$. Entre cualesquiera dos números reales distintos existe un número irracional. (¿Puede probarlo?) Por consiguiente, existe $c \in (a, b)$ tal que $c \notin \mathbb{Q}$. Esto contradice el hecho de que $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. Como resultado, $\mathbb{Q}$ no contiene ningún intervalo (a, b), por lo que no es un conjunto abierto.

Para probar que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto cerrado basta con demostrar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es un conjunto abierto. Usando el hecho de que entre cualesquiera dos números reales distintos existe un número racional, vemos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no contiene ningún intervalo (a, b) con $a < b$. Por lo que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es abierto en $\mathbb{R}$, y por consecuencia $\mathbb{Q}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$. $\square$

(xi) En el Capítulo 3 demostraremos que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$ son los triviales, es decir, $\mathbb{R}$ y $\emptyset$. □

Ejercicios 2.1

1. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ entonces ni $[a, b)$ ni $(a, b]$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. También muestre que ninguno de los dos es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

2. Demuestre que los conjuntos $[a, \infty)$ y $(-\infty, a]$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$.

3. Muestre, a través de un ejemplo, que la unión de un número infinito de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ no es necesariamente un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

4. Demuestre cada una de las afirmaciones siguientes.

   (i) El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros no es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

   (ii) El conjunto S de todos los números primos es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, pero no es subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

   (iii) El conjunto $\mathbb{P}$ de todos los números irracionales no es subconjunto cerrado ni es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

5. Si F es un subconjunto finito y no vacío de $\mathbb{R}$, muestre que F es cerrado en $\mathbb{R}$, pero no es abierto en $\mathbb{R}$.

6. Si F es un subconjunto numerable y no vacío de $\mathbb{R}$, demuestre que F no es un conjunto abierto.

7. (i) Sea $S = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Demuestre que el conjunto S es cerrado en la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

   (ii) ¿Es el conjunto $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$ cerrado en $\mathbb{R}$?

   (iii) ¿Es el conjunto $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, n\sqrt{2}, \ldots\}$ cerrado en $\mathbb{R}$?

8. (i) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto S de X se llama **F_σ-conjunto** si es la unión de un número numerable de conjuntos cerrados. Demuestre que todos los intervalos abiertos (a, b) y todos los intervalos cerrados $[a, b]$ son F_σ-conjuntos en $\mathbb{R}$.

   (ii) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto T de X se llama **G_δ-conjunto** si es la intersección de un número numerable de conjuntos abiertos. Demuestre que todos los intervalos abiertos (a, b) y todos los intervalos cerrados $[a, b]$ son G_δ-conjuntos en $\mathbb{R}$.

   (iii) Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales es un un F_σ-conjunto en $\mathbb{R}$. (En los Ejercicios 6.5#3 demostraremos que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ-conjunto en $\mathbb{R}$.)

   (iv) Verifique que el complemento de un F_σ-conjunto es un G_δ-conjunto y que el complemento de un G_δ-conjunto es un F_σ-conjunto.

2.2 Base de una Topología

Las Observaciones 2.1.2 nos permiten describir la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$ de una manera más conveniente. Para hacerlo, debemos introducir la noción de base de una topología.

2.2.1 Proposición. Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es abierto si, y sólo si, es la unión de intervalos abiertos.

Demostración.

Tenemos que demostrar que S es abierto si, y sólo si, es la unión de intervalos abiertos; es decir, tenemos que mostrar que

(i) si S es una unión de intervalos abiertos, entonces S es un conjunto abierto, y

(ii) si S es un conjunto abierto, entonces S es la unión de intervalos abiertos.

Asuma que S es una unión de intervalos abiertos; es decir, existen intervalos abiertos (a_j, b_j), donde j pertenece a algún conjunto J de índices, tal que $S = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$. Por las Observaciones 2.1.2 (ii), cada intervalo abierto (a_j, b_j) es un conjunto abierto. Por lo que S es una unión de conjuntos abiertos, y por consecuencia S es un conjunto abierto.

Por otro lado, asuma que S es abierto en $\mathbb{R}$. Entonces para cada $x \in S$, existe un intervalo $I_x = (a, b)$ con $a < b$ tal que $x \in I_x \subseteq S$. Ahora demostremos que $S = \bigcup_{x\in S} I_x$.

Tenemos que demostrar que los dos conjuntos S y $\bigcup_{x\in S} I_x$ son iguales.

Mostremos que estos conjuntos son iguales demostrando que

(i) si $y \in S$, entonces $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, y

(ii) si $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$, entonces $z \in S$.

[Note que (i) es equivalente a la expresión $S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$, mientras que (ii) es equivalente a $\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$.]

Primeramente tome $y \in S$. Entonces $y \in I_y$. Por lo que $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, como se requería. En segundo lugar, tome $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$. Entonces $z \in I_t$, para algún $t \in S$. Como cada $I_x \subseteq S$, vemos que $I_t \subseteq S$, y por lo tanto $z \in S$. Consecuentemente, $S = \bigcup_{x\in S} I_x$, y tenemos que S es una unión de intervalos abiertos, como se requería. $\square$

La proposición anterior nos dice que para describir la topología de $\mathbb{R}$ basta decir que todos los intervalos (a, b) son conjuntos abiertos, y que todos los otros conjuntos abiertos son una unión de estos conjuntos abiertos. Ésto nos lleva a la definición siguiente.

2.2.2 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos de X se llama **base** de una topología $\mathcal{T}$ si cada conjunto abierto es una unión de miembros de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X entonces un subconjunto U de X está en $\mathcal{T}$ si, y sólo si, es una unión de miembros de $\mathcal{B}$. Por lo que $\mathcal{B}$ "genera" la topología $\mathcal{T}$ en el sentido siguiente: si se nos informa cuáles conjuntos son miembros de $\mathcal{B}$ entonces podemos determinar los miembros de $\mathcal{T}$—ellos son todos los conjuntos que son uniones de miembros de $\mathcal{B}$.

2.2.3 Ejemplo. Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$, por la Proposición 2.2.1. $\square$

2.2.4 Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio discreto y $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos unitarios de X; es decir, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Entonces, por la Proposición 1.1.9, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$. $\square$

2.2.5 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Entonces $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ es una base de $\mathcal{T}_1$, pues $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$ y cada miembro de $\mathcal{T}_1$ puede ser expresado como una unión de miembros de $\mathcal{B}$. (Observe que $\emptyset$ es una unión vacía de miembros de $\mathcal{B}$.)

Note que $\mathcal{T}_1$ es una base de sí misma. $\square$

2.2.6 Observación. Observe que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico entonces $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$. Por lo que, por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos de X es una base de la topología discreta sobre X.

Vemos, por consiguiente, que pueden existir muchas bases diferentes para la misma topología. En efecto, si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X y $\mathcal{B}_1$ es una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_1$ es también una base de $\mathcal{T}$. [Verifique esto.]$\square$

Como indicamos anteriormente, la noción de "base de una topología" nos permite definir topologías. Sin embargo, el ejemplo siguiente muestra que tenemos que ser cuidadosos.

2.2.7 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Entonces $\mathcal{B}$ no es una base de <u>ninguna</u> topología sobre X. Para ver esto, $\boxed{\text{suponga}}$ que $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{T}$ está formada por todas las uniones de conjuntos en $\mathcal{B}$; es decir,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

(Una vez más usamos el hecho de que $\emptyset$ es una unión vacía de miembros de $\mathcal{B}$, y por lo tanto $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

Sin embargo, $\mathcal{T}$no es una topología, pues el conjunto $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ no está en $\mathcal{T}$, y por lo tanto $\mathcal{T}$ no posee la propiedad (iii) de las Definiciones 1.1.1. Esto es una contradicción, implicando que nuestra suposición es falsa. De este modo, $\mathcal{B}$ <u>no</u> es una base de ninguna topología sobre X. $\square$

Consecuentemente, el ejemplo anterior nos lleva a preguntar: si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X, ¿bajo qué condiciones $\mathcal{B}$ es una base de una topología? Esta pregunta es respondida por la Proposición 2.2.8.

2.2.8 Proposición. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de una topología sobre X si, y sólo si, $\mathcal{B}$ tiene las propiedades siguientes:

(a) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, y

(b) para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, el conjunto $B_1 \cap B_2$ es una unión de miembros de $\mathcal{B}$.

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T}$ tiene que tener las propiedades (i), (ii), y (iii) de las Definiciones 1.1.1. En particular, X tiene que ser conjunto abierto, y la intersección de cualesquiera dos conjuntos abiertos tiene que ser un conjunto abierto. Como los conjuntos abiertos son justamente las uniones de miembros de $\mathcal{B}$, esto implica que (a) y (b) son verdaderos.

Por otro lado, asuma que $\mathcal{B}$ tiene las propiedades (a) y (b), y sea $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos de X que son uniones de miembros de $\mathcal{B}$. Mostraremos que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X. (Si es así, entonces $\mathcal{B}$ es evidentemente una base de esta topología $\mathcal{T}$ y la proposición es verdadera.)

Por (a), $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ y así $X \in \mathcal{T}$. Note que $\emptyset$ es una unión vacía de miembros de $\mathcal{B}$, y por lo tanto $\emptyset \in \mathcal{T}$. Por lo que vemos que $\mathcal{T}$ posee la propiedad (i) de las Definiciones 1.1.1.

Ahora sea $\{T_j\}$ una familia de miembros de $\mathcal{T}$. Entonces cada T_j es una unión de miembros de $\mathcal{B}$. Consiguientemente, la unión de todos los T_j es también una unión de miembros de $\mathcal{B}$, y por lo tanto está en $\mathcal{T}$. Por consecuencia, $\mathcal{T}$ también satisface la condición (ii) de las Definiciones 1.1.1.

Finalmente, tome C y D en $\mathcal{T}$. Necesitamos verificar que $C \cap D \in \mathcal{T}$. Pero $C = \bigcup_{k \in K} B_k$, para algún conjunto K de índices y algunos conjuntos $B_k \in \mathcal{B}$. Además, $D = \bigcup_{j \in J} B_j$, para algún conjunto J de índices y algunos $B_j \in \mathcal{B}$. Por lo tanto,

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{k \in K,\, j \in J} (B_k \cap B_j).$$

¡Debe verificar que las dos expresiones de $C \cap D$ son ciertamente iguales!

En el caso finito ésto involucra expresiones como

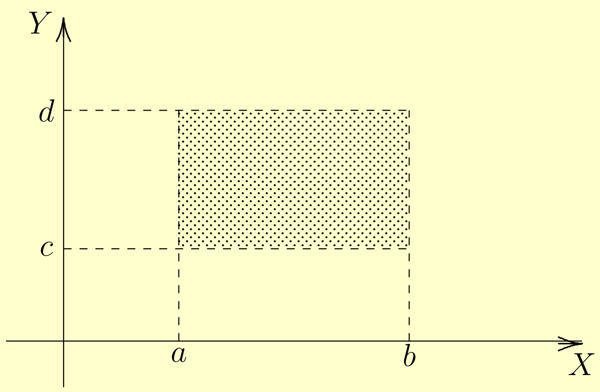
$$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4).$$

Debido a nuestra suposición (b), cada $B_k \cap B_j$ es una unión de miembros de $\mathcal{B}$, y por lo tanto $C \cap D$ es una unión de miembros de $\mathcal{B}$. Consiguientemente $C \cap D \in \mathcal{T}$. Como consecuencia, $\mathcal{T}$ tiene la propiedad (iii) de la Definición 1.1.1. De este modo, $\mathcal{T}$ es ciertamente una topología, y $\mathcal{B}$ es una base de esta topología, como se requería. $\square$

La Proposición 2.2.8 es un resultado bastante útil. Ésta nos permite definir topologías escribiendo simplemente una base, lo cual frecuentemente es más fácil que tratar de describir todos los conjuntos abiertos.

Ahora usaremos esta proposición para definir una topología sobre el plano. Esta topología se conoce como la "topología Euclidiana".

2.2.9 Ejemplo. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos "rectángulos abiertos" $\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b,\ c < y < d\}$ en el plano que tienen cada lado paralelo al eje X o al eje Y.



Entonces $\mathcal{B}$ es una base de una topología sobre el plano, la llamada *topología Euclidiana.*

Cada vez que usemos el símbolo $\mathbb{R}^2$ nos referimos al plano, y si nos referimos a $\mathbb{R}^2$ como espacio topológico sin mencionar explícitamente la topología subyacente, se debe entender que es el plano con la topología Euclidiana.

Para ver que $\mathcal{B}$ es ciertamente una base de una topología, observe que (i) el plano es la unión de todos los rectángulos abiertos, y (ii) la intersección de cualesquiera dos rectángulos es un rectángulo. [Por "rectángulo" se debe entender uno con lados paralelos a los ejes.] Por lo que las condiciones de la Proposición 2.2.8 se cumplen, y consiguientemente $\mathcal{B}$ es una base de una topología. $\square$

2.2.10 Observación. Generalizando el Ejemplo 2.2.9 vemos como definir una topología sobre

$$\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots , x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots,\ n\}, \quad \text{para cada entero } n > 2.$$

Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los subconjuntos $\{\langle x_1, x_2, \dots , x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots , n\}$ of $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes. Esta colección $\mathcal{B}$ es una base de la **topología Euclidiana** sobre $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ejercicios 2.2

1. En este ejercicio usted demostrará que el disco $\{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, y luego que cada disco abierto en el plano es un conjunto abierto.

   (i) Sea $\langle a, b\rangle$ cualquier punto en el disco $D = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$. Ponga $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sea $R_{\langle a,b\rangle}$ el rectángulo abierto con vertices en los puntos $\langle a \pm \frac{1-r}{8}\, ,\, b \pm \frac{1-r}{8}\rangle$. Verifique que $R_{\langle a,b\rangle} \subset D$.

   (ii) Usando (i) muestre que
   $$D = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D} R_{\langle a,b\rangle}.$$

   (iii) Deduzca de (ii) que D es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.

   (iv) Muestre que todo disco $\{\langle x, y\rangle : (x - a)^2 + (y - b)^2 < c^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

2. En este ejercicio usted mostrará que la colección de todos los discos abiertos en $\mathbb{R}^2$ es una base de una topología sobre $\mathbb{R}^2$. [Más adelante veremos que ésta es es precisamente la topología Euclidiana.]

(i) Sea D_1 and D_2 dos discos abiertos cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Si $\langle a, b\rangle$ es cualquier punto en $D_1 \cap D_2$, muestre que existe un disco abierto $D_{\langle a,b\rangle}$ con centro $\langle a, b\rangle$ tal que $D_{\langle a,b\rangle} \subset D_1 \cap D_2$.

[Consejo: dibuje una figura y use un método similar al del Ejercicio 1 (i).]

(ii) Muestre que

$$D_1 \cap D_2 = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D_1 \cap D_2} D_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) Usando (ii) y la Proposición 2.2.8, demuestre que la colección de todos los discos abiertos en $\mathbb{R}^2$ es una base de una topología sobre $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) en $\mathbb{R}$ con $a < b$, y a y b números racionales. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. [Compare esto con la Proposición 2.2.1 y el Ejemplo 2.2.3 donde a y b no eran necesariamente racionales.]

   [Consejo: No use la Proposición 2.2.8, pues ésto mostraría solamente que $\mathcal{B}$ es una base de alguna topología, no necesariamente una base de la topología Euclidiana.]

4. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que satisface el **segundo axioma de numerabilidad** si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{B}$ esta formada de solamente un número numerable de conjuntos.

   (i) Usando el Ejercicio 3 anterior muestre que $\mathbb{R}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

   (ii) Demuestre que la topología discreta sobre un conjunto no numerable no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

   [Consejo. No es suficiente mostrar que una base en particular es no numerable. Tiene que mostrar que $\boxed{\text{toda}}$ base de esta topología es no numerable.]

   (iii) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, para cada entero positivo n.

   (iv) Sea $(X, \mathcal{T})$ el conjunto de todos los enteros con la topología cofinita. ¿El espacio $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad?

5. Demuestre las afirmaciones siguientes.

   (i) Sean m y c números reales, con $m \neq 0$. Entonces la recta $L = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Sea $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario dado por $\mathbb{S}^1 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces $\mathbb{S}^1$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera unitaria n-dimensional dada por

$$\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Entonces $\mathbb{S}^n$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iv) Sea B^n la bola cerrada, unitaria y n-dimensional dada por

$$B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Entonces B^n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

(v) La curva $C = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

6. Sean $\mathcal{B}_1$ una base de una topología $\mathcal{T}_1$ sobre un conjunto X y $\mathcal{B}_2$ una base de una topología $\mathcal{T}_2$ sobre un conjunto Y. El conjunto $X \times Y$ está formado por todos los pares ordenados $\langle x, y\rangle$, $x \in X$ y $y \in Y$. Sea $\mathcal{B}$ la colección de subconjuntos de $X \times Y$ que está formada por todos los conjuntos $B_1 \times B_2$ donde $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $B_2 \in \mathcal{B}_2$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de una topología sobre $X \times Y$. La topología definida de esta manera es llamada **topología producto** sobre $X \times Y$.
[Consejo. Vea el Ejemplo 2.2.9.]

7. Usando el Ejercicio 3 anterior y los Ejercicios 2.1 #8, demuestre que todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es un F_σ-conjunto y un G_δ-conjunto.

2.3 Base de una Topología Dada

La Proposición 2.2.8 nos mostró bajo qué condiciones una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto X es una base de alguna topología sobre X. Sin embargo, a veces se nos da una topología $\mathcal{T}$ sobre X y queremos conocer si $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$. Para verificar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, podríamos simplemente aplicar la Definición 2.2.2 y mostrar que cada miembro de $\mathcal{T}$ es una unión de miembros de $\mathcal{B}$. Sin embargo, la Proposición 2.3.2 nos brinda un método alternativo.

Pero primero presentamos un ejemplo que muestra que no es lo mismo decir que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una base de alguna topología, que decir que $\mathcal{B}$ es una base de una topología dada.

2.3.1 Ejemplo. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los intervalos semi-abiertos de la forma $(a, b]$, $a < b$, donde $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de una topología sobre $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{R}$ es la unión de todos los miembros de $\mathcal{B}$ y la intersección de cualesquiera dos intervalos semi-abiertos es un intervalo semi-abierto.

Sin embargo, la topología $\mathcal{T}_1$ que tiene a $\mathcal{B}$ como su base, no es la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. Podemos ver ésto observando que $(a, b]$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_1$, mientras $(a, b]$ no es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ con la topología Euclidiana. (Vea los Ejercicios 2.1 #1.) Por lo que $\mathcal{B}$ es una base de alguna topología, pero no es una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. □

2.3.2 Proposición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos de X es una base de $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada elemento x que pertenece un conjunto abierto U cualquiera, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración.

Tenemos que demostrar
(i) si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ y $x \in U \in \mathcal{T}$, entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$,

y

(ii) si para cada $U \in \mathcal{T}$ y cada $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.

Asuma que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ y que $x \in U \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, el conjunto abierto U es una unión de miembros de $\mathcal{B}$; es decir, $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, donde $B_j \in \mathcal{B}$, para cada j en algún conjunto J de índices. Pero $x \in U$ implica que $x \in B_j$ para algún $j \in J$. Por lo que $x \in B_j \subseteq U$, como se requería.

Por otro lado, asuma que para cada $U \in \mathcal{T}$ y cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$. Tenemos que demostrar que todo conjunto abierto es una unión de miembros de $\mathcal{B}$. Denote por V un conjunto abierto cualquiera. Entonces para cada $x \in V$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq V$. Claramente $V = \bigcup_{x \in V} B_x$. (¡Muéstrelo!) Como consecuencia, V es una unión de miembros de $\mathcal{B}$. □

2.3.3 Proposición. Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X. Entonces un subconjunto U de X es abierto si, y sólo si, para cada $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración. Sea U subconjunto cualquiera de X. Asuma que para cada $x \in U$, existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Claramente $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Por lo que U es una unión de conjuntos abiertos y por lo tanto es abierto, como se requería. La expresión inversa se sigue de la Proposición 2.3.2. □

Observe que la propiedad de una base descrita en la Proposición 2.3.3 es precisamente lo que usamos para definir la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. Nosotros dijimos que un subconjunto U de $\mathbb{R}$ es abierto si, y sólo si, para cada $x \in U$, existen a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$, tal que $x \in (a, b) \subseteq U$.

Advertencia. Asegúrese de que entiende la diferencia entre la Proposición 2.2.8 y la Proposición 2.3.2. La Proposición 2.2.8 da condiciones para que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto X sea una base de alguna topología sobre X. Sin embargo, la Proposición 2.3.2 da condiciones para que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ sea una base de la topología dada $\mathcal{T}$.

Hemos visto que una topología puede tener muchas bases diferentes. La próxima proposición nos dice cuando dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ sobre el mismo conjunto X definen la misma topología.

2.3.4 Proposición. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, respectivamente, sobre un conjunto no vacío X. Entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ si, y sólo si,

(i) para cada $B \in \mathcal{B}_1$ y cada $x \in B$, existe un $B' \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B' \subseteq B$, y

(ii) para cada $B \in \mathcal{B}_2$ y cada $x \in B$, existe un $B' \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

Demostración.

Tenemos que mostrar que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de la misma topología si, y sólo si, (i) y (ii) son verdaderos.

Primeramente asumimos que ellas son bases de la misma topología, es decir, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, y mostramos que las condiciones (i) y (ii) se cumplen.

Luego asumimos que (i) y (ii) se cumplen y mostramos que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Primeramente, asuma que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entonces (i) y (ii) son consecuencias inmediatas de la Proposición 2.3.2.

Por otro lado, asuma que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ satisfacen las condiciones (i) y (ii). Por la Proposición 2.3.2, (i) implica que cada $B \in \mathcal{B}_1$ es abierto en $(X, \mathcal{T}_2)$; es decir, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Como todo miembro de $\mathcal{T}_1$ es una unión de miembros de $\mathcal{T}_2$, tenemos que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Igualmente (ii) implica $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Por lo que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, como se requería. $\square$

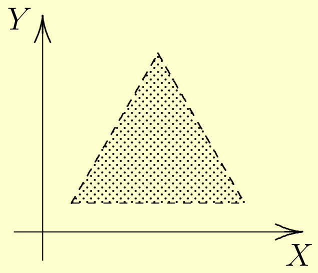
2.3.5 Ejemplo. Muestre que el conjunto $\mathcal{B}$ de todos los "triángulos equiláteros abiertos" con base paralela al eje X-axis es una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$. (Cuando hablamos de "triángulo abierto" se debe entender que los bordes no están incluidos.)

Esbozo de la Demostración. (Aquí damos solamente un argumento gráfico. Se deja al estudiante la escritura de una demostración detallada.)

Tenemos que mostrar que $\mathcal{B}$ es una base de la topología Euclidiana.

Aplicaremos la Proposición 2.3.4, pero primero necesitamos mostrar que $\mathcal{B}$ es una base de alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$.

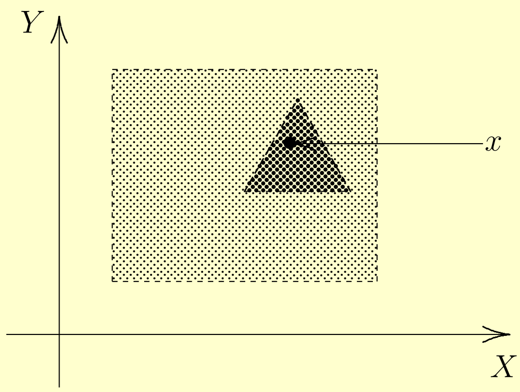
Para hacer esto mostramos que $\mathcal{B}$ satisface las condiciones de la Proposición 2.2.8.



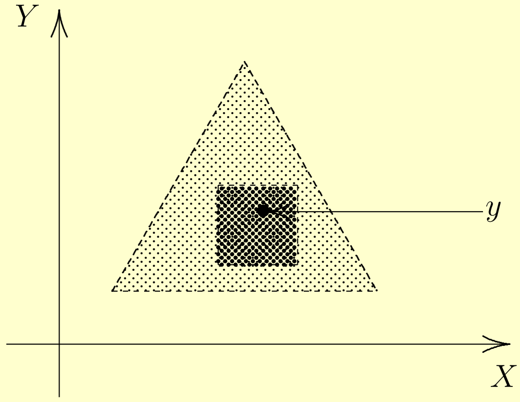
La primera cosa que observamos es que $\mathcal{B}$ es una base de alguna topología porque satisface las condiciones de la Proposición 2.2.8. (Para ver que $\mathcal{B}$ satisface la Proposición 2.2.8, observe que $\mathbb{R}^2$ es igual a la unión de todos los triángulos equiláteros abiertos con base paralela al eje X, y que la intersección de dos triángulos de ese tipo es otro triángulo de ese tipo.)

Ahora mostraremos que las condiciones (i) y (ii) de la Proposición 2.3.4 se cumplen.

Primeramente verificamos la condición (i). Sean R un rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes y x cualquier punto en R. Tenemos que mostrar que existe un triángulo cuadrilátero abierto T con base paralela al eje X tal que $x \in T \subseteq R$. Gráficamente ésto es fácil de ver.



Finalmente verificamos la condición (ii) de la Proposición 2.3.4. Sea T' un triángulo cuadrilátero abierto con base paralela al eje X y sea y un punto cualquiera en T'. Entonces existe un rectángulo abierto R' tal que $y \in R' \subseteq T'$. Gráficamente, ésto es nuevamente fácil de ver.



Por lo que las condiciones de la Proposición 2.3.4 se cumplen. Consecuentemente $\mathcal{B}$ es ciertamente una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$. $\square$

En el Ejemplo 2.2.9 definimos una base de la topología Euclidiana, la colección de todos "rectángulos abiertos" (con lados paralelos a los ejes). El Ejemplo 2.3.5 muestra que "rectángulos abiertos" pueden ser reemplazados por "triángulos equiláteros abiertos" (con base paralela al eje X) sin cambiar la topología. En los Ejercicios 2.3 #1 vemos que las condiciones anteriores en paréntesis pueden ser suprimidas sin cambiar la topología. Además los "rectángulos abiertos" pueden ser reemplazados por "discos abiertos"[1].

Ejercicios 2.3

1. Determine si o no cada una de las colecciones es una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$:

   (i) la colección de todos cuadrados "abiertos" con lados paralelos a los ejes;

   (ii) la colección de todos los discos "abiertos";

   (iii) la colección de todos los cuadrados "abiertos";

   (iv) la colección de todos los rectángulos "abiertos";

[1]De hecho, muchos libros describen la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$ en términos de los discos abiertos.

(v) la colección de todos los triángulos "abiertos".

2. (i) Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto no vacío X. Si $\mathcal{B}_1$ es una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$, demuestre que $\mathcal{B}_1$ es también una base de $\mathcal{T}$.

   (ii) Deduzca de (i) que existe un número no numerable de bases distintas de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

3. Sea $\mathcal{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Como se vio en el Ejemplo 2.3.1, $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{T}$ no es la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. No obstante, muestre que cada intervalo (a,b) es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

4.* Sea $C[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales sobre $[0,1]$.

   (i) Muestre que la colección $\mathcal{M}$, donde $\mathcal{M} = \{M(f,\varepsilon) : f \in C[0,1]$ y ε es un número real positivo$\}$ and $M(f,\varepsilon) = \left\{g : g \in C[0,1] \text{ y } \int_0^1 |f-g| < \varepsilon\right\}$, es una base de una topología $\mathcal{T}_1$ sobre $C[0,1]$.

   (ii) Muestre que la colección $\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U} = \{U(f,\varepsilon) : f \in C[0,1]$ y ε es un número real positivo$\}$ y $U(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[0,1]$ y $\sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon\}$, es una base de una topología $\mathcal{T}_2$ sobre $C[0,1]$.

   (iii) Demuestre que $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una colección no vacía $\mathcal{S}$ de subconjuntos abiertos de X se llama **subbase** de $\mathcal{T}$ si la colección de todas las intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$ forma una base de $\mathcal{T}$.

   (i) Demuestre que la colección de todos los intervalos abiertos de la forma (a,∞) o $(-\infty,b)$ es una subbase de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

   (ii) Demuestre que $\mathcal{S} = \{\{a\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$ es una subbase de la topología $\mathcal{T}_1$ del Ejemplo 1.1.2.

6. Sea $\mathcal{S}$ una subbase de una topología $\mathcal{T}$ sobre el conjunto $\mathbb{R}$. (Vea el Ejercicio 5 anterior.) Si todos los intervalos cerrados $[a,b]$, con $a < b$, están en $\mathcal{S}$, demuestre que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

7. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ la colección de todos los conjuntos $X \setminus \{x\}$, $x \in X$. Demuestre que $\mathcal{S}$ es una subbase de la topología cofinita sobre X.

8. Sean X cualquier conjunto infinito y $\mathcal{T}$ la topología discreta sobre X. Encuentre una subbase $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{S}$ no contenga ningún conjunto unitario.

9. Sea $\mathcal{S}$ la colección de todas las líneas rectas en el plano $\mathbb{R}^2$. Si $\mathcal{S}$ es una subbase de una topología $\mathcal{T}$ sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es la topología?

10. Sea $\mathcal{S}$ la colección de todas las líneas rectas en el plano que son paralelas al eje X. Si $\mathcal{S}$ es una subbase de una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}^2$, describa los conjuntos abiertos en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

11. Sea $\mathcal{S}$ la colección de todos los círculos en el plano. Si $\mathcal{S}$ es una subbase de una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}^2$, describa los conjuntos abiertos en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

12. Sea $\mathcal{S}$ la colección de todos los círculos en el plano que tienen sus centros sobre el eje X. Si $\mathcal{S}$ es una subbase de una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}^2$, describa los conjuntos abiertos en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

2.4 Postdata

En este capítulo hemos definido un espacio topológico muy importante—$\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales con la topología Euclidiana, y dedicamos cierto tiempo a analizarla. Observamos que, en esta topología, los intervalos abiertos son ciertamente conjuntos abiertos (y los intervalos cerrados son conjuntos cerrados). Sin embargo, no todos los conjuntos abiertos son intervalos abiertos. No obstante, todo conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es una unión de intervalos abiertos. Ésto nos llevó a introducir la noción de "base de una topología" y establecer que la colección de todos los intervalos abiertos es una base de la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

En la introducción al Capítulo 1 describimos una demostración matemática como un argumento irrefutable y subrayamos la importancia de escribir demostraciones. En este capítulo fuimos introducidos al método de demostración por contradicción en las Observaciones 2.1.2 (v), y vimos otro ejemplo de este método en el Ejemplo 2.2.7. La demostración de condiciones "necesarias y suficientes", es decir, condiciones "si, y sólo si", fue explicada en la Proposición 2.2.1, con ejemplos adicionales en las Proposiciones 2.2.8, 2.3.2, 2.3.3, y 2.3.4.

Bases de topologías son de por sí un tópico significativo. Vimos, por ejemplo, que la colección de todos los conjuntos unitarios es una base de la topología discreta. La Proposición 2.2.8 dio condiciones necesarias y suficientes para que una colección de subconjuntos de un conjunto X sea una base de alguna topología sobre X. Ésto fue contrastado con la Proposición 2.3.2, la cual dio condiciones necesarias y suficientes para que una colección de subconjuntos de X sea una base de una topología dada sobre X. Vimos que dos colecciones diferentes $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ pueden ser bases de la misma topología; condiciones necesarias y suficientes para ésto fueron dadas por la Proposición 2.3.4.

Definimos la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$, para cualquier entero positivo n. Vimos que la familia de todos los discos abiertos es una base de $\mathbb{R}^2$, como también lo es la familia de todos los cuadrados abiertos, o la familia de todos los rectángulos abiertos.

Los ejercicios introdujeron tres ideas interesantes. Los Ejercicios 2.1 #8 cubrieron las nociones de F_σ-conjunto y G_δ-conjunto, las que son importantes en teoría de medidas. Los Ejercicios 2.3 #4 introdujeron el espacio de funciones continuas de valores reales. Tales espacios son llamados espacios funcionales, los cuales son los objetos centrales de estudio en análisis funcional. Análisis funcional es una mezcla de análisis (clásico) y topología, y fue, por algún tiempo, llamado análisis moderno, cf. Simmons [197]. Finalmente, los Ejercicios 2.3 #5–12 trataron la noción de subbase.

Chapter 3

Puntos Límites

Introducción

Sobre la recta de los números reales encontramos una noción de “proximidad”. Por ejemplo cada punto en la secuencia $.1, .01, .001, .0001, .00001, \ldots$ está más cercano al 0 que el punto anterior. En efecto, de cierta forma, el 0 es un punto límite de esta secuencia. Por lo que el intervalo $(0, 1]$ no es cerrado, pues éste no contiene el punto límite 0. En un espacio topológico general no tenemos una “función de distancia”, por lo que debemos proceder de una manera diferente. Definiremos la noción de punto límite sin recurrir a distancias. Con nuestra nueva definición de punto límite, el punto 0 será de todos modos un punto límite de $(0, 1]$. La introducción de la noción de punto límite nos ayudará a comprender mejor la noción de conjunto cerrado.

Otro concepto topológico bastante importante será introducido en este capítulo: el de conexidad. Considere el espacio topológico $\mathbb{R}$. Aunque los conjuntos $[0, 1] \cup [2, 3]$ y $[4, 6]$ pudieran ser descritos como que tienen longitud 2, es claro que ellos son diferentes tipos de conjuntos… el primero está formado por dos partes disjuntas y el segundo por sólo una parte. La diferencia entre los dos es “topológica” y será explicada usando la noción de conexidad.

3.1 Puntos Límites y Clausura

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, es usual referirse a los elementos del conjunto X como **puntos.**

3.1.1 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Un punto $x \in X$ se llama **punto límite** (o **punto de acumulación** o **punto de contacto**) de A si todo conjunto abierto U que contiene x contiene un punto de A diferente de x.

3.1.2 Ejemplo. Considere el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, con el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$, la topología $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$, y el subconjunto $A = \{a, b, c\}$. Entonces b, d, y e son puntos límites de A, pero a y c no son puntos límites de A.

Demostración.

El punto a es un punto límite de A si, y sólo si, todo conjunto abierto que contiene a contiene otro punto del conjunto A.

Por lo que para demostrar que a $\boxed{\text{no}}$ es un punto límite de A, es suficiente encontrar un conjunto abierto que contiene a pero no contiene otro punto de A.

El conjunto $\{a\}$ es abierto y no contiene otro punto de A. Por lo que a no es un punto límite de A.

El conjunto $\{c, d\}$ es un conjunto abierto que contiene c pero no otro punto de A. Por lo que c no es un punto límite de A.

Para mostrar que b es un punto límite de A, tenemos que mostrar que todo conjunto abierto que contiene b contiene un punto de A distinto de b.

Mostraremos que éste es el caso escribiendo $\boxed{\text{todos}}$ los conjuntos abiertos que contienen b, y verificando que cada uno de ellos contiene otro punto de A distinto de b.

Los únicos conjuntos abiertos que contienen b son X y $\{b, c, d, e\}$, y ambos contienen otro elemento de A, en este caso c. Por lo que b es un punto límite de A.

El punto d es un punto límite de A, aún cuando d no está en A. Ésto es así pues todo conjunto abierto que contiene d contiene un punto de A. Igualmente, e es un punto límite de A aún cuando no está en A. $\square$

3.1.3 Ejemplo. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio discreto y A un subconjunto de X. Entonces A no tiene puntos límites, puesto que para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto abierto que no contiene un punto de A diferente de x. $\square$

3.1.4 Ejemplo. Considere el subconjunto $A = [a, b)$ de $\mathbb{R}$. Entonces es fácil verificar que cada elemento en $[a, b)$ es un punto límite de A. El punto b es también un punto límite de A. $\square$

3.1.5 Ejemplo. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio indiscreto y A un subconjunto de X con al menos dos elementos. Entonces es fácil ver que cada punto de X es un punto límite de A. (¿Por qué insistimos en que A tenga al menos dos puntos?) $\square$

La próxima proposición nos brinda un criterio útil para probar si un conjunto es cerrado o no.

3.1.6 Proposición. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$ si, y sólo si, A contiene todos sus puntos límites.

Demostración.

Tenemos que demostrar que A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$ si, y sólo si, A contiene todos sus puntos límites; es decir, tenemos que mostrar que

(i) si A es un conjunto cerrado, entonces A contiene todos sus puntos límites, y

(ii) si A contiene todos sus puntos límites, entonces A es un conjunto cerrado.

Asuma que A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. $\boxed{\text{Suponga}}$ que p es un punto límite de A que pertenece a $X \setminus A$. Entonces $X \setminus A$ es un conjunto abierto que contiene el punto límite p de A. Por lo tanto

$X \setminus A$ contiene un elemento de A. Ésto es claramente falso, y como consecuencia, tenemos una contradicción a nuestra suposición. Por consiguiente, todo punto límite de A tiene que pertenecer a A.

Por otro lado, asuma que A contiene todos sus puntos límites. Para cada $z \in X \setminus A$, nuestra suposición implica que existe un conjunto abierto $U_z \ni z$ tal que $U_z \cap A = \emptyset$; es decir, $U_z \subseteq X \setminus A$. Por lo tanto $X \setminus A = \bigcup_{z \in X \setminus A} U_z$. (¡Verifique ésto!) Como consecuencia, $X \setminus A$ es una unión de conjuntos abiertos, y por lo tanto es abierto. Consecuentemente, su complemento, A, es cerrado.□

3.1.7 Ejemplo. Como aplicaciones de la Proposición 3.1.6 tenemos las siguientes:

(i) el conjunto $[a, b)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, pues b es un punto límite y $b \notin [a, b)$;

(ii) el conjunto $[a, b]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, pues todos los puntos límites de $[a, b]$ (es decir, todos los elementos de $[a, b]$) están en $[a, b]$;

(iii) (a, b) no es subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, pues no contiene el punto límite a;

(iv) $[a, \infty)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. □

3.1.8 Proposición. Sean A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y A' el conjunto de todos los puntos límites de A. Entonces $A \cup A'$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Por la Proposición 3.1.6 es suficiente mostrar que el conjunto $A \cup A'$ contiene todos $\boxed{\text{sus}}$ puntos límites, o equivalentemente, que ningún elemento de $X \setminus (A \cup A')$ es un punto límite de $A \cup A'$.

Sea $p \in X \setminus (A \cup A')$. Como $p \notin A'$, existe un conjunto abierto U que contiene p tal que $U \cap A = \{p\}$ o $\emptyset$. Pero $p \notin A$, por lo que $U \cap A = \emptyset$. También afirmamos que $U \cap A' = \emptyset$. Porque si $x \in U$ entonces, como U es un conjunto abierto y $U \cap A = \emptyset$, $x \notin A'$. Por lo tanto $U \cap A' = \emptyset$. Es decir, $U \cap (A \cup A') = \emptyset$, y $p \in U$. Ésto implica que p no es punto límite de $A \cup A'$, como consecuencia $A \cup A'$ es un conjunto cerrado. □

3.1.9 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces el conjunto $A \cup A'$ que consiste de A y todos sus puntos límites se llama **clausura de A** y se denota por $\overline{A}$.

3.1.10 Observación. De la Proposición 3.1.8 se puede ver claramente que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado. Por la Proposición 3.1.6 y los Ejercicios 3.1 #5 (i), cada conjunto cerrado que contiene A tiene también que contener al conjunto A'. Por lo que $A \cup A' = \overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene al conjunto A. Ésto implica que $\overline{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contiene A. $\square$

3.1.11 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Muestre que $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$, y $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

Demostración.

Para encontrar la clausura de un conjunto específico, tenemos que encontrar todos los conjuntos cerrados que contienen ese conjunto y entonces seleccionar el menor. Por lo tanto comenzamos anotando todos los conjuntos cerrados—éstos son simplemente los complementos de todos los conjuntos abiertos.

Los conjuntos cerrados son $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ y $\{a\}$. Por lo que el menor conjunto cerrado que contiene $\{b\}$ es $\{b, e\}$; es decir, $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. Igualmente, $\overline{\{a, c\}} = X$, y $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. $\square$

3.1.12 Ejemplo. Sea $\mathbb{Q}$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ que consiste de todos los números racionales. Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Demostración. $\boxed{\text{Suponga}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. Entonces existe un $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Como $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ es abierto en $\mathbb{R}$, existen a, b con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Pero en todo intervalo (a, b) existe un número racional q; es decir, $q \in (a, b)$. Por lo tanto $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, lo que implica que $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ésto es una contradicción, pues $q \in \mathbb{Q}$. Como consecuencia $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\square$

3.1.13 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces A se llama **denso** en X si $\overline{A} = X$.

Ahora podemos enunciar nuevamente el Ejemplo 3.1.12 de la siguiente manera: $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Note que en el Ejemplo 3.1.11 vimos que $\{a, c\}$ es denso en X.

3.1.14 Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio discreto. Entonces todo subconjunto de X es cerrado (pues su complemento es abierto). Por lo tanto el único subconjunto denso de X es el mismo X, pues cada subconjunto de X es su propia clausura. $\square$

3.1.15 Proposición. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces A es denso en X si, y sólo si, todo subconjunto abierto y no vacío de X interseca A no trivialmente (es decir, si $U \in \mathcal{T}$ and $U \neq \emptyset$ entonces $A \cap U \neq \emptyset$.)

Demostración. Asuma, primeramente que todo subconjunto abierto y no vacío interseca A no trivialmente. Si $A = X$, entonces claramente A es denso en X. Si $A \neq X$, sea $x \in X \setminus A$. Si $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Por lo que x es un punto límite de A. Como x es un punto arbitrario en $X \setminus A$, todo punto de $X \setminus A$ es un punto límite de A. Por consiguiente $A' \supseteq X \setminus A$ y entonces, por la Definición 3.1.9, $\overline{A} = A' \cup A = X$; es decir, A es denso en X.

Por otro lado, asuma que A es denso en X. Sea U cualquier subconjunto abierto y no vacío de X. $\boxed{\text{Suponga}}$ que $U \cap A = \emptyset$. Entonces si $x \in U$, $x \notin A$ y x <u>no</u> es un punto límite de A, pues U es un conjunto abierto que contiene x y no contiene ningún elemento de A. Ésto es una contradicción pues, como A es denso en X, todo elemento de $X \setminus A$ es un punto límite de A. Consiguientemente nuestra suposición es falsa y $U \cap A \neq \emptyset$, como se requería. $\square$

Ejercicios 3.1

1. (a) En el Ejemplo 1.1.2, encuentre todos los puntos límites de los conjuntos siguientes:

   (i) $\{a\}$,

   (ii) $\{b, c\}$,

   (iii) $\{a, c, d\}$,

   (iv) $\{b, d, e, f\}$.

   (b) Luego, encuentre la clausura de cada uno de los conjuntos anteriores.

   (c) Ahora encuentre la clausura de cada uno de los conjuntos anteriores usando el método del Ejemplo 3.1.11.

2. Sea $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ el conjunto de los enteros con la topología cofinita. Liste el conjunto de puntos límites de los conjuntos siguientes:

   (i) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,

   (ii) El conjunto, E, que consiste de todos los enteros pares.

3. Encuentre todos los puntos límites del intervalo abierto (a, b) en $\mathbb{R}$, donde $a < b$.

4. (a) ¿Cuál es la clausura en $\mathbb{R}$ de cada uno de los conjuntos siguientes?

   (i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$,

   (ii) el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros,

   (iii) el conjunto $\mathbb{P}$ de todos los números irracionales.

   (b) Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a \in \overline{S}$ si, y sólo si, para cada entero positivo n, existe un $x_n \in S$ tal que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$.

5. Sean S y T subconjuntos no vacíos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ con $S \subseteq T$.

   (i) Si p es un punto límite del conjunto S, verifique que p es también un punto límite del conjunto T.

   (ii) Deduzca de (i) que $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

   (iii) Muestre que si S es denso en X, entonces T es denso en X.

(iv) Usando (iii) muestre que $\mathbb{R}$ tiene un número innumerable de subconjuntos densos y distintos.

(v)* Nuevamente usando (iii), demuestre que $\mathbb{R}$ tiene un número innumerable de subconjuntos densos y distintos, y $2^{\mathfrak{c}}$ (para una definición de $\mathfrak{c}$, vea la Definición A1.2.3 del Apéndice 1) subconjuntos densos, innumerables y distintos.

3.2 Vecindades

3.2.1 Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, N un subconjunto de X y p un punto en N. Entonces N es una **vecindad** del punto p si existe un conjunto abierto U tal que $p \in U \subseteq N$.

3.2.2 Ejemplo. El intervalo cerrado $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ es una vecindad del punto $\frac{1}{2}$, pues $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$. $\square$

3.2.3 Ejemplo. El intervalo $(0, 1]$ en $\mathbb{R}$ es una vecindad del punto $\frac{1}{4}$, pues $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, 1]$. Pero $(0, 1]$ no es una vecindad del punto 1. (¡Demuéstrelo!.) $\square$

3.2.4 Ejemplo. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico cualquiera y $U \in \mathcal{T}$, entonces de la Definición 3.2.1, se obtiene que U es una vecindad de todo punto $p \in U$. Por lo tanto, por ejemplo, todo intervalo abierto (a, b) en $\mathbb{R}$ es una vecindad de cada punto contenido en él. $\square$

3.2.5 Ejemplo. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y N una vecindad de un punto p. Si S es un subconjunto cualquiera de X tal que $N \subseteq S$, entonces S es una vecindad de p. $\square$

La próxima proposición se puede verificar fácilmente, por lo que su demostración es dejada al lector.

3.2.6 Proposición. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Un punto $x \in X$ es a punto límite de A si, y sólo si, toda vecindad de x contiene un punto de A diferente de x. $\square$

Como un conjunto es cerrado si, y sólo si, éste contiene todos sus puntos límites, podemos deducir lo siguiente:

3.2.7 Corolario. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces el conjunto A es cerrado si, y sólo si, para cada $x \in X \setminus A$ existe un vecindad N de x tal que $N \subseteq X \setminus A$. $\square$

3.2.8 Corolario. Sea U un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces $U \in \mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada $x \in U$ existe una vecindad N de x tal que $N \subseteq U$. $\square$

El próximo corolario se deduce inmediatamente del Corolario 3.2.8

3.2.9 Corolario. Sea U un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces $U \in \mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada $x \in U$ existe un $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V \subseteq U$. $\square$

El Corolario 3.2.9 nos permite verificar si un conjunto es abierto o no. Este corolario plantea que un conjunto U es abierto si, y sólo si, para cada uno de sus puntos, podemos encontrar un conjunto abierto que está contenido en U.

Ejercicios 3.2

1. Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Demuestre que A es denso en X si, y sólo si, toda vecindad de cada punto en $X \setminus A$ interseca A no trivialmente.

2. (i) Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Demuestre cuidadosamente que
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$
(ii) Construya un ejemplo en el cual
$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestre que $\mathcal{T}$ es la topología cofinita sobre X si, y sólo si, (i) $(X, \mathcal{T})$ es un T_1-espacio, y (ii) cada subconjunto infinito de X es denso en X.

4. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice **separable** si tiene un subconjunto denso que es numerable. Determine cuáles de los siguientes espacios son separables:

   (i) el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología usual;

   (ii) un conjunto numerable con la topología discreta;

   (iii) un conjunto numerable con la topología cofinita;

   (iv) $(X, \mathcal{T})$ donde X es finito;

   (v) $(X, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es finito;

   (vi) un conjunto innumerable con la topología discreta;

   (vii) un conjunto innumerable con la topología cofinita;

   (viii) un espacio $(X, \mathcal{T})$ que satisface el segundo axioma de numerabilidad.

5. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera y A cualquier subconjunto de X. El más grande conjunto abierto contenido en A es llamado el **interior de** A y es denotado por $\mathrm{Int}(A)$. [Éste es la unión de todos los conjuntos abiertos en X contenidos completamente en A.]

   (i) Demuestre que en $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}([0,1]) = (0,1)$.

   (ii) Demuestre que en $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}((3,4)) = (3,4)$.

   (iii) Muestre que si A es abierto en $(X, \mathcal{T})$ entonces $\mathrm{Int}(A) = A$.

   (iv) Verifique que en $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(\{3\}) = \emptyset$.

   (v) Muestre que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio indiscreto entonces, para todos los subconjuntos propios A de X, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

(vi) Muestre que para cada subconjunto numerable A de $\mathbb{R}$, $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$.

6. Muestre que si A es cualquier subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, entonces $\operatorname{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. (Vea el Ejercicio 5 anterior para la definición de Int.)

7. Usando el Ejercicio 6 anterior, verifique que A es denso en $(X, \mathcal{T})$ si, y sólo si, $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \emptyset$.

8. Usando la definición de Int en el Ejercicio 5 anterior, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para subconjuntos arbitrarios A_1 y A_2 de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$

   (i) $\operatorname{Int}(A_1 \cap A_2) = \operatorname{Int}(A_1) \cap \operatorname{Int}(A_2)$,

   (ii) $\operatorname{Int}(A_1 \cup A_2) = \operatorname{Int}(A_1) \cup \operatorname{Int}(A_2)$,

   (iii) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

   (Si alguna de sus respuestas es "verdadera", tiene que escribir una demostración. Si su respuesta es "falsa", tiene que dar un contraejemplo concreto.)

9.* Sea S un subconjunto denso de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Demuestre que para cada subconjunto abierto U de X, $\overline{S \cap U} = \overline{U}$.

10. Sean S y T subconjuntos densos de un espacio $(X, \mathcal{T})$. Si T es además abierto, deduzca del Ejercicio 9 anterior que $S \cap T$ es denso en X.

11. Sea $\mathcal{B} = \{[a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

   (i) $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}_1$ sobre $\mathbb{R}$. (El espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ es llamado **recta de Sorgenfrey**.)

   (ii) Si $\mathcal{T}$ es la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$.

   (iii) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $[a, b)$ es un conjunto abierto y cerrado en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$.

   (iv) La recta de Sorgenfrey es un espacio separable.

   (v)* La recta de Sorgenfrey no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

3.3 Conexidad

3.3.1 Observación. Ahora damos algunas definiciones y resultados que el lector probablemente conozca. Sea S cualquier conjunto de números reales. Si existe un elemento b en S tal que $x \leq b$, para todo $x \in S$, entonces b es **el elemento mayor** de S. Igualmente, si S contiene un elemento a tal que $a \leq x$, para todo $x \in S$, entonces a es **el elemento menor** de S. Un conjunto S de números reales es **acotado superiormente** si existe un número real c tal que $x \leq c$, para todo $x \in S$, y c es una **cota superior** de S. Análogamente, los términos "**acotado inferiormente**" y "**cota inferior**" son definidos. Un conjunto acotado superiormente y acotado inferiormente se dice que es **acotado.** □

La menor cota superior, conocida también como el **supremo** de S, y denotado por $\sup(S)$, pudiera o no pertenecer al conjunto S. En efecto, el supremo de S es un elemento de S si, y sólo si, S tiene un elemento mayor. Por ejemplo, el supremo del intervalo abierto $S = (1, 2)$ es 2 pero $2 \notin (1, 2)$, mientras que el supremo de $[3, 4]$ es 4 que yace en $[3, 4]$ y 4 es el elemento mayor de $[3, 4]$. Cualquier conjunto S de números reales que es acotado inferiormente tiene una **mayor cota inferior**, la cual también se llama **ínfimo** y se denota por $\inf(S)$.

Axioma del Supremo: Sea S un conjunto no vacío de números reales. Si S es acotado superiormente, entonces S tiene un supremo. □

3.3.2 Lema. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente, y sea p el supremo de S. Si S es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $p \in S$.

Demostración. $\boxed{\text{Suponga}}$ $p \in \mathbb{R} \setminus S$. Como $\mathbb{R} \setminus S$ es abierto, existen números reales a y b con $a < b$ tal que $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Como p es la $\boxed{\text{menor}}$ cota superior de S y $a < p$, es evidente que existe un $x \in S$ tal que $a < x$. Además $x < p < b$, y por lo tanto $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Pero ésto es una contradicción, pues $x \in S$. Por consiguiente, nuestra suposición es falsa y $p \in S$. □

3.3.3 Proposición. Sea T un subconjunto abierto y cerrado de $\mathbb{R}$. Entonces $T = \mathbb{R}$ o $T = \emptyset$.

Demostración. $\boxed{\text{Suponga}}$ que $T \neq \mathbb{R}$ y $T \neq \emptyset$. Entonces existe un elemento $x \in T$ y un elemento $z \in \mathbb{R} \setminus T$. Sin pérdida de generalidad, asuma $x < z$. Tome $S = T \cap [x, z]$. Entonces S, siendo la intersección de dos conjuntos cerrados, es cerrado. S es también acotado superiormente, puesto que z es evidentemente un cota superior. Sea p el supremo de S. Por el Lema 3.3.2, $p \in S$. Puesto que $p \in [x, z]$, $p \leq z$. Como $z \in \mathbb{R} \setminus S$, $p \neq z$ y por lo tanto $p < z$.

Ahora T es también un conjunto abierto y $p \in T$. Por lo que existen a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $p \in (a, b) \subseteq T$. Sea t tal que $p < t < \min(b, z)$, donde $\min(b, z)$ denota al menor de b y z. Por consecuencia $t \in T$ y $t \in [p, z]$. Consiguientemente, $t \in T \cap [x, z] = S$. Ésto es una contradicción, pues $t > p$ y p es el supremo de S. Como resultado, nuestra suposición es falsa, y por lo tanto $T = \mathbb{R}$ o $T = \emptyset$. □

3.3.4 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces $(X, \mathcal{T})$ es **conexo** si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X son X y $\emptyset$.

Por lo que enunciando la Proposición 3.3.3 nuevamente, obtenemos:

3.3.5 Proposición. El espacio topológico $\mathbb{R}$ es conexo. □

3.3.6 Ejemplo. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio discreto cualquiera con más de un elemento, entonces $(X, \mathcal{T})$ no es conexo, puesto que cada conjunto unitario is abierto y cerrado. □

3.3.7 Ejemplo. Si $(X, \mathcal{T})$ un espacio indiscreto cualquiera, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo, pues los únicos conjuntos abiertos y cerrados son X y $\emptyset$. (En efecto, los únicos conjuntos abiertos son X y $\emptyset$.) □

3.3.8 Ejemplo. Si $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

entonces $(X, \mathcal{T})$ no es conexo pues $\{b, c, d, e\}$ es un subconjunto abierto y cerrado. □

3.3.9 Observación. De la Definición 3.3.4 se sigue que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ no es conexo (es decir, éste es **disconexo**) si, y sólo si, existen conjuntos abiertos no vacíos A y B tal que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$.[1] (Vea los Ejercicios 3.3 #3.)

Concluimos está sección señalando que $\mathbb{R}^2$ (y ciertamente, $\mathbb{R}^n$, para cada $n \geq 1$) es un espacio conexo. Sin embargo, la demostración es dejada para el Capítulo 5.

Conexidad es una propiedad muy importante acerca de la cual tendremos mucho más que decir.

Ejercicios 3.3

1. Sean S un conjunto de números reales y $T = \{x : -x \in S\}$.

   (a) Demuestre que el número real a es el ínfimo de S si, and sólo si $-a$ es el supremo de T.

   (b) Usando (a) y el Axioma del Supremo demuestre que todo conjunto no vacío de números reales que es acotado inferiormente tiene un ínfimo.

2. Para cada uno de los siguientes conjuntos de números reales encuentre el mayor elemento y el supremo, si éstos existen.

   (i) $S = \mathbb{R}$.

   (ii) $S = \mathbb{Z} =$ el conjunto de todos los enteros.

   (iii) $S = [9, 10)$.

   (iv) $S =$ el conjunto de todos los números reales de la forma $1 - \frac{3}{n^2}$, donde n es un entero positivo.

   (v) $S = (-\infty, 3]$.

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ no es conexo si, y sólo si, éste tiene subconjuntos A y B que son disjuntos, no vacíos, propios y abiertos, tal que $A \cup B = X$.

4. ¿Es el espacio $(X, \mathcal{T})$ del Ejemplo 1.1.2 conexo?

[1] La mayoría de los libros usa esta propiedad para definir conexidad.

5. Sea $(X, \mathcal{T})$ cualquier conjunto infinito con la topología cofinita. ¿Es $(X, \mathcal{T})$ conexo?

6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un conjunto infinito con la topología numerable cerrada. ¿Es $(X, \mathcal{T})$ conexo?

7. Cuáles de los espacios topológicos de los Ejercicios 1.1 #9 son conexos?

3.4 Postdata

En este capítulo introducimos la noción de punto límite y mostramos que un conjunto es cerrado si, y sólo si, éste contiene todos sus puntos límites. Entonces la Proposición 3.1.8 nos dice que cualquier conjunto A tiene un menor conjunto cerrado $\overline{A}$ que lo contiene. Este conjunto $\overline{A}$ es llamado la clausura de A.

Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es denso en X si $\overline{A} = X$. Vimos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y que el conjunto $\mathbb{P}$ de todos los números irracionales es también denso en $\mathbb{R}$. Introducidos la noción de vecindad de un punto y la noción de espacio topológico conexo. Demostramos un resultado importante: $\mathbb{R}$ es conexo. Como dijimos anteriormente, más delante tendremos mucho más que decir acerca de conexidad.

En los ejercicios introducimos la noción de interior de un conjunto, la cual es complementaria a la de clausura de un conjunto.

Chapter 4

Homeomorfismos

Introducción

En cada rama de las matemáticas resulta esencial reconocer cuando dos estructuras son equivalentes. Por ejemplo, dos conjuntos son equivalentes, en teoría de conjuntos, si existe una función biyectiva biyectiva que transforma un conjunto en el otro. Dos grupos son equivalentes (o isomorfos) si existe un homomorfismo de uno al otro que es inyectivo y sobreyectivo. Dos espacios topológicos son equivalentes (o homeomorfos), si existe un homeomorfismo de uno sobre el otro.

4.1 Subespacios

4.1.1 Definición. Sea Y un subconjunto no vacío de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. La colección $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ de subconjuntos de Y es una topología sobre Y llamada la **topología del subespacio** (o la **topología relativa** o la **topología inducida** o la **topología inducida sobre Y por $\mathcal{T}$**). El espacio topológico $(Y, \mathcal{T}_Y)$ se llama un **subespacio** de $(X, \mathcal{T})$.

Por supuesto, el lector debe chequear que $\mathcal{T}_Y$ es ciertamente una topología sobre Y.

4.1.2 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\},$$

y $Y = \{b, c, e\}$. Entonces la topología del subespacio sobre Y es

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}. \qquad \square$$

4.1.3 Ejemplo. Sean $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

y $Y = \{a, d, e\}$. Entonces la topología inducida sobre Y es

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}. \qquad \square$$

4.1.4 Ejemplo. Sean $\mathcal{B}$ una base de la topología $\mathcal{T}$ sobre X y Y un subconjunto de X. Entonces no es difícil mostrar que la colección $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de la topología del subespacio $\mathcal{T}_Y$ sobre Y. [Ejercicio: Verifique ésto.]

Consideremos ahora el subconjunto $(1, 2)$ de $\mathbb{R}$. Una base de la topología inducida sobre $(1, 2)$ es la colección $\{(a, b) \cap (1, 2) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$; es decir, $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ 1 \leq a < b \leq 2\}$ es una base de la topología inducida sobre $(1, 2)$. $\square$

4.1.5 Ejemplo. Considere el subconjunto $[1, 2]$ de $\mathbb{R}$. Una base de la topología del subespacio $\mathcal{T}$ sobre $[1, 2]$ es

$$\{(a, b) \cap [1, 2] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\};$$

es decir,

$$\{(a, b) : 1 \leq a < b \leq 2\} \cup \{[1, b) : 1 < b \leq 2\} \cup \{(a, 2] : 1 \leq a < 2\} \cup \{[1, 2]\}$$

es una base de $\mathcal{T}$.

Pero aquí vemos que están ocurriendo algunas cosas sorprendentes; p.ej. $[1, 1\frac{1}{2})$ `no` es de por sí un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, pero $[1, 1\frac{1}{2}) = (0, 1\frac{1}{2}) \cap [1, 2]$, es un conjunto abierto en el subespacio $[1, 2]$.

Además, $(1, 2]$ y $[1, 2]$ no son abiertos en $\mathbb{R}$ pero son abiertos en $[1, 2]$.

Por lo que siempre que hablemos de que un conjunto es abierto, tenemos que explicar claramente en qué espacio o en qué topología el conjunto es abierto. $\square$

4.1.6 Ejemplo. Sea $\mathbb{Z}$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los enteros. Demuestre que la topología inducida sobre $\mathbb{Z}$ por la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$ es la topología discreta.

Demostración.

> Para demostrar que la topología inducida, $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$, sobre $\mathbb{Z}$ es la discreta, es suficiente, por la Proposición 1.1.9, mostrar que todo conjunto unitario en $\mathbb{Z}$ es abierto en $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$; es decir, si $n \in \mathbb{Z}$ entonces $\{n\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$.

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{Z}$. Pero $(n-1, n+1)$ es abierto en $\mathbb{R}$, por lo tanto $\{n\}$ es abierto en la topología inducida sobre $\mathbb{Z}$. Como consecuencia, todo conjunto unitario en $\mathbb{Z}$ es abierto en la topología inducida sobre $\mathbb{Z}$. Consiguientemente, la topología inducida es discreta. $\square$

Notación. Siempre que nos refiramos a

$\mathbb{Q}$ = el conjunto de todos los números racionales,

$\mathbb{Z}$ = el conjunto de todos los enteros,

$\mathbb{N}$ = el conjunto de todos los enteros positivos,

$\mathbb{P}$ = el conjunto de todos los números irracionales,

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), o $[a, \infty)$

como espacios topológicos sin explícitamente decir cuál es la topología, nos referimos a la topología inducida como un subespacio de $\mathbb{R}$. (A veces nos referiremos a la topología inducida sobre estos conjuntos como la "**topología usual**".)

Ejercicios 4.1

1. Sean $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$. Liste los miembros de las topologías inducidas $\mathcal{T}_Y$ sobre $Y = \{a, c, e\}$ y $\mathcal{T}_Z$ sobre $Z = \{b, c, d, e\}$.

2. Describa la topología inducida sobre el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos por la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

3. Escriba una base de la topología usual sobre cada uno de los siguientes conjuntos:

   (i) $[a, b)$, donde $a < b$;

   (ii) $(a, b]$, donde $a < b$;

   (iii) $(-\infty, a]$;

   (iv) $(-\infty, a)$;

   (v) (a, ∞);

   (vi) $[a, \infty)$.

   [Consejo: Vea los Ejemplos 4.1.4 y 4.1.5.]

4. Sean $A \subseteq B \subseteq X$ y X con la topología $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{T}_B$ la topología del subespacio sobre B. Además, sean $\mathcal{T}_1$ la topología inducida sobre A por $\mathcal{T}$, y $\mathcal{T}_2$ la topología inducida sobre A por $\mathcal{T}_B$. Demuestre que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. (Por lo que un subespacio de un subespacio es un subespacio.)

5. Sea $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un subespacio de un espacio $(X, \mathcal{T})$. Muestre que un subconjunto Z de Y es cerrado en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ si, y sólo si, $Z = A \cap Y$, donde A es un subconjunto cerrado de $(X, \mathcal{T})$.

6. Muestre que todo subespacio de un espacio discreto es discreto.

7. Muestre que todo subespacio de un espacio indiscreto es indiscreto.

8. Muestre que el subespacio $[0, 1] \cup [3, 4]$ de $\mathbb{R}$ tiene al menos 4 subconjuntos abiertos y cerrados. ¿Cuántos subconjuntos abiertos y cerrados tiene exactamente?

9. ¿Es cierto que todo subespacio de un espacio conexo es conexo?

10. Sea $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un subespacio de $(X, \mathcal{T})$. Muestre que $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ si, y sólo si, $Y \in \mathcal{T}$.

    [Consejo: Recuerde que $Y \in \mathcal{T}_Y$.]

11. Sean A y B espacios conexos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, demuestre que el subespacio $A \cup B$ es conexo.

12. Sea $(Y, \mathcal{T}_1)$ un subespacio de un T_1-espacio $(X, \mathcal{T})$. Muestre que $(Y, \mathcal{T}_1)$ es también un T_1-espacio.

13. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **espacio de Hausdorff** (o un T_2-espacio) si dado cualquier par de puntos distintos a, b en X existen conjuntos abiertos U y V tal que $a \in U$, $b \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.

    (i) Muestre que $\mathbb{R}$ es Hausdorff.

    (ii) Demuestre que todo espacio discreto es Hausdorff.

    (iii) Muestre que cualquier T_2-espacio es también un T_1-espacio.

    (iv) Muestre que $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita es un T_1-espacio pero no es un T_2-espacio.

    (v) Demuestre que cualquier subespacio de un T_2-espacio es un T_2-espacio.

14. Sea $(Y, \mathcal{T}_1)$ un subespacio de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Si $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, muestre que $(Y, \mathcal{T}_1)$ también satisface el segundo axioma de numerabilidad.

15. Tome a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$. Demuestre que $[a, b]$ es conexo.

    [Consejo: En el enunciado y la demostración de la Proposición 3.3.3 reemplace $\mathbb{R}$ en todas partes por $[a, b]$.]

16. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales con la topología usual y sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los números irracionales con la topología usual.

    (i) Demuestre que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{P}$ es un espacio discreto.

    (ii) ¿Es $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{P}$ un espacio conexo?

    (iii) ¿Es $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{P}$ un espacio de Hausdorff?

    (iv) ¿Tiene $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{P}$ la topología cofinita?

17. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **espacio regular** si para cada subconjunto cerrado A de X y cualquier punto $x \in X \setminus A$, existen conjuntos abiertos U y V tal que $x \in U$, $A \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$. Si $(X, \mathcal{T})$ es regular y un T_1-espacio, entonces se dice que es un T_3-espacio. Demuestre las siguientes afirmaciones.

    (i) Cada subespacio de un espacio regular es un espacio regular.

    (ii) Los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$, y $\mathbb{R}^2$ son espacios regulares.

    (iii) Si $(X, \mathcal{T})$ es un T_1-espacio regular , entonces es un T_2-espacio.

    (iv) La recta de Sorgenfrey es un espacio regular.

    (v)* Sean X el conjunto, $\mathbb{R}$, de todos los números reales y $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Defina que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si $C = A \cup T$, donde A es cerrado en la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$ y T es cualquier subconjunto de S. Los complementos de estos conjuntos cerrados forman una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$ que es Hausdorff pero no regular.

4.2 Homeomorfismos

Ahora giremos nuestra atención a la noción de espacios topológicos equivalentes. Comencemos considerando un ejemplo:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

y

$$\mathcal{T}_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

Está claro que intuitivamente $(X, \mathcal{T})$ es "equivalente" a $(Y, \mathcal{T}_1)$. La función $f \colon X \to Y$ definida por $f(a) = g$, $f(b) = h$, $f(c) = i$, $f(d) = j$, and $f(e) = k$, brinda la equivalencia. Ahora formalicemos ésto.

4.2.1 Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos. Entonces éstos se dicen que son **homeomorfos** si existe una función $f : X \to Y$ con las propiedades siguientes:

(i) f es inyectiva (es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$),

(ii) f es sobreyectiva (es decir, para toda $y \in Y$ existe una $x \in X$ tal que $f(x) = y$),

(iii) para cada $U \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, y

(iv) para cada $V \in \mathcal{T}$, $f(V) \in \mathcal{T}_1$.

Además, la función f se llama **homeomorfismo** entre $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$. En este caso escribimos $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. □

Demostraremos que "$\cong$" es una relación de equivalencia, y usaremos ésto para mostrar que todos los intervalos abiertos (a, b) son homeomorfos entre ellos. El Ejemplo 4.2.2 es nuestro primer paso, pues éste muestra que "$\cong$" es una relación transitiva.

4.2.2 Ejemplo. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}_1)$ y $(Z, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Si $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$, demuestre que $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$.

Demostración.

Sabemos que $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$; es decir, existe un homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. También sabemos que $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$; es decir, existe un homeomorfismo $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$.

Tenemos que demostrar que $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$; es decir, tenemos que encontrar un homeomorfismo $h : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$. Demostraremos que la función compuesta $g \circ f : X \to Z$ es el homeomorfismo requerido.

Como $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$, existen homeomorfismos $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ y $g : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$. Considere la función compuesta $g \circ f : X \to Z$. [Por lo tanto $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para toda $x \in X$.] Es una tarea rutinaria verificar que $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva. Ahora sea $U \in \mathcal{T}_2$. Entonces, como g es un homeomorfismo, $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$.

Usando el hecho de que f es un homeomorfismo, obtenemos que $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$. Pero $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Por lo que $g \circ f$ tiene la propiedad (iii) de la Definición 4.2.1. Ahora sea $V \in \mathcal{T}$. Entonces $f(V) \in \mathcal{T}_1$ y como consecuencia, $g(f(V)) \in \mathcal{T}_2$; es decir $(g \circ f)(V) \in \mathcal{T}_2$, y vemos que $g \circ f$ tiene la propiedad (iv) de la Definición 4.2.1. Por consiguiente, $g \circ f$ es un homeomorfismo. □

4.2.3 Observación. El Ejemplo 4.2.2 muestra que "$\cong$" es una relación binaria transitiva. Es fácil verificar que es, en efecto, una relación de equivalencia; es decir,

(i) $(X, \mathcal{T}) \cong (X, \mathcal{T})$ (Reflexiva);

(ii) $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ implica $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T})$ (Simétrica);

[Observe que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ es un homeomorfismo, entonces su inversa $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T})$ es también un homeomorfismo.]

(iii) $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$ implica $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$ (Transitiva).

□

Las próximos tres ejemplos muestran que todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ son homeomorfos. La longitud no es ciertamente una propiedad topológica. En particular, un intervalo abierto de longitud finita, como $(0, 1)$, es homeomorfo a uno de longitud infinita, como $(-\infty, 1)$. De hecho, todos los intervalos abiertos son homeomorfos a $\mathbb{R}$.

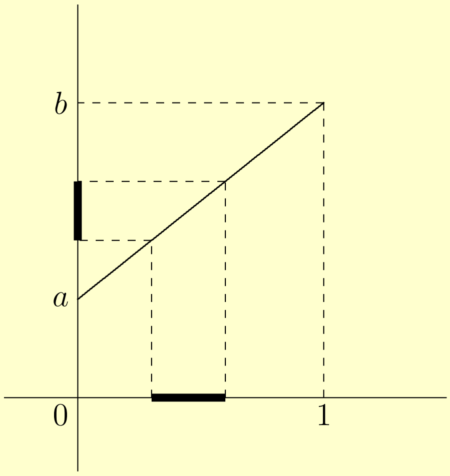
4.2.4 Ejemplo. Demuestre que dos intervalos abiertos y no vacíos cualesquiera (a, b) y (c, d) son homeomorfos.

Idea de la Demostración.

Por la Observación 4.2.3, es suficiente mostrar que (a, b) es homeomorfo a $(0, 1)$ y que (c, d) es homeomorfo a $(0, 1)$. Pero como a y b son arbitrarios (excepto que $a < b$), si (a, b) es homeomorfo a $(0, 1)$ entonces (c, d) es también homeomorfo a $(0, 1)$. Para demostrar que (a, b) es homeomorfo a $(0, 1)$, es suficiente encontrar un homeomorfismo $f : (0, 1) \to (a, b)$.

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y considere la función $f : (0, 1) \to (a, b)$ dada por

$$f(x) = a(1 - x) + bx.$$



Claramente $f : (0, 1) \to (a, b)$ es inyectiva y sobreyectiva. También se puede ver en el diagrama que la imagen bajo f de cualquier intervalo abierto en $(0, 1)$ es un intervalo abierto in (a, b); es decir,

$$f(\text{un intervalo abierto en } (0, 1)) = \text{un intervalo abierto en } (a, b).$$

Pero cualquier conjunto abierto en $(0, 1)$ es una unión de intervalos abiertos en $(0, 1)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(\text{un conjunto abierto en } (0,1)) &= f(\text{una unión de intervalos abiertos en } (0,1)) \\ &= \text{una unión de intervalos abiertos en } (a,b) \\ &= \text{un conjunto abierto en } (a,b). \end{aligned}$$

Por lo que la condición (iv) de la Definición 4.2.1 se satisface. Del mismo modo, vemos que f^{-1}(un conjunto abierto en (a,b)) es un conjunto abierto en $(0,1)$. Por lo que la condición (iii) de la Definición 4.2.1 también se satisface.

[Ejercicio: Escriba la demostración anterior cuidadosamente.]

Por consiguiente, f es un homeomorfismo y $(0,1) \cong (a,b)$, para todo $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

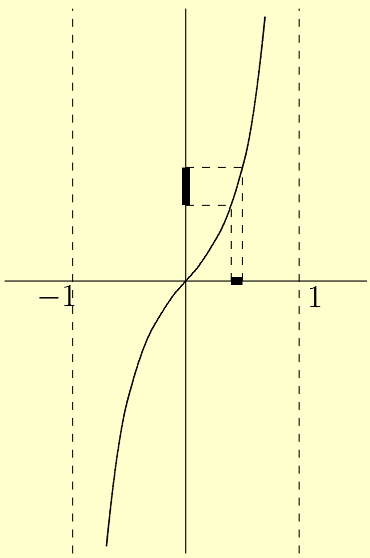
De lo anterior se sigue inmediatamente que $(a,b) \cong (c,d)$, como se requería. □

4.2.5 Ejemplo. Demuestre que el espacio $\mathbb{R}$ es homeomorfo al intervalo abierto $(-1,1)$ con la topología usual.

Idea de la demostración. Defina $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{x}{1- \mid x \mid}.$$

Se puede verificar fácilmente que f es inyectiva y sobreyectiva, y un argumento gráfico como el del Ejemplo 4.2.2 indica que f es un homeomorfismo.



[Ejercicio: Escriba una demostración de que f es un homeomorfismo.] □

4.2.6 Ejemplo. Demuestre que todo intervalo abierto (a,b), con $a < b$, es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Ésto sigue inmediatamente de los Ejemplos 4.2.5 y 4.2.4, y la Observación 4.2.3. □

4.2.7 Observación. Se puede demostrar de una forma similar que dos intervalos cualesquiera $[a, b]$ y $[c, d]$, con $a < b$ y $c < d$, son homeomorfos. □

Ejercicios 4.2

1. (i) Si $a, b, c,$ y d son números reales con $a < b$ y $c < d$, demuestre que $[a, b] \cong [c, d]$.

   (ii) Si a y b son números reales cualesquiera, demuestre que
   $$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a, \infty) \cong [b, \infty).$$

   (iii) Si c, d, e, y f son números reales cualesquiera con $c < d$ y $e < f$, demuestre que
   $$[c, d) \cong [e, f) \cong (c, d] \cong (e, f].$$

   (iv) Deduzca que para números reales cualesquiera a y b con $a < b$,
   $$[0, 1) \cong (-\infty, a] \cong [a, \infty) \cong [a, b) \cong (a, b].$$

2. Demuestre que $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$

3. Sean m y c números reales distintos de cero, y X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por $X = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$. Demuestre que X es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

4. (i) Sean X_1 y X_2 las regiones rectangulares cerradas en $\mathbb{R}^2$ dadas por
   $$X_1 = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_1 \text{ y } |y| \leq b_1\}$$
   y
   $$X_2 = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_2 \text{ y } |y| \leq b_2\}$$
   donde $a_1, b_1, a_2,$ y b_2 son números reales positivos. Si X_1 y X_2 son espacios topológicos con las topologías inducidas de $\mathbb{R}^2$, muestre que $X_1 \cong X_2$.

   (ii) Sean D_1 y D_2 los discos cerrados en $\mathbb{R}^2$ dados por
   $$D_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_1\}$$
   y
   $$D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_2\}$$
   donde c_1 y c_2 son números reales positivos. Demuestre que $D_1 \cong D_2$, donde D_1 y D_2 tienen sus respectivas topologías del subespacio.

(iii) Demuestre que $X_1 \cong D_1$.

5. Sean X_1 y X_2 subespacios de $\mathbb{R}$ dados por $X_1 = (0,1) \cup (3,4)$ y $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$. Es $X_1 \cong X_2$? (Justifique su respuesta.)

6. (**Grupo de homeomorfismos**) Sean $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico cualquiera y G el conjunto de todos los homeomorfismos de X en el mismo.

   (i) Muestre que G es un grupo bajo la operación de composición de funciones.

   (ii) Si $X = [0,1]$, muestre que G es infinito.

   (iii) Si $X = [0,1]$, es G un grupo abeliano?

7. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos homeomorfos. Demuestre que

   (i) Si $(X, \mathcal{T})$ es un T_0-espacio, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un T_0-espacio.

   (ii) Si $(X, \mathcal{T})$ es un T_1-espacio, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un T_1-espacio.

   (iii) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un espacio de Hausdorff.

   (iv) Si $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

   (v) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio separable, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un espacio separable.

8.* Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico discreto. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}$ si, y sólo si, X es numerable.

4.3 Espacios No Homeomorfos

Para demostrar que dos espacios topológicos son homeomorfos, tenemos que encontrar un homeomorfismo entre ellos.

Pero, demostrar que dos espacios topológicos no son homeomorfos es con frecuencia mucho más difícil, pues tenemos que mostrar que no existe ningún homeomorfismo. El ejemplo siguiente nos da una pista de cómo pudiéramos proceder en este caso.

4.3.1 Ejemplo. Demuestre que $[0,2]$ no es homeomorfo al subespacio $[0,1] \cup [2,3]$ de $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $(X, \mathcal{T}) = [0,2]$ y $(Y, \mathcal{T}_1) = [0,1] \cup [2,3]$. Entonces

$$[0,1] = [0,1] \cap Y \Rightarrow [0,1] \text{ es cerrado en } (Y, \mathcal{T}_1)$$

y

$$[0,1] = (-1, 1\frac{1}{2}) \cap Y \Rightarrow [0,1] \text{ es abierto en } (Y, \mathcal{T}_1).$$

Por lo que Y no es conexo, pues tiene a $[0,1]$ como un subconjunto propio, no vacío que es abierto y cerrado .

$\boxed{\text{Suponga}}$ que $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. Entonces existe un homeomorfismo $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$. Por lo que $f^{-1}([0,1])$ es un subconjunto abierto y cerrado de X, y como consecuencia X no es conexo. Ésto es falso pues $[0,2] = X$ es conexo. (Vea los Ejercicios 4.1 #15.) Consiguientemente, tenemos una contradicción, y por lo tanto $(X, \mathcal{T}) \ncong (Y, \mathcal{T}_1)$. □

¿Qué podemos aprender de este ejemplo?

4.3.2 Proposición. Cualquier espacio topológico homeomorfo a un espacio conexo es conexo. □

La Proposición 4.3.2 nos brinda una vía para tratar de probar que dos espacios topológicos no son homeomorfos ... encontrando una propiedad "preservada por homeomorfismos" que un espacio tiene y el otro no.

En los ejercicios nos hemos encontrado con muchas propiedades que son “preservadas por homeomorfismos”:

(i) T_0-espacio;

(ii) T_1-espacio;

(iii) T_2-espacio o Hausdorff espacio;

(iv) espacio regular;

(v) T_3-espacio;

(vi) satisfacer el segundo axioma de numerabilidad;

(vii) espacio separable. [See los Ejercicios 4.2 #7.]

Existen también otras:

(viii) espacio discreto;

(ix) espacio indiscreto;

(x) topología cofinita;

(xi) topología numerable cerrada.

Por lo que junto con la conexidad, ya conocemos doce propiedades preservadas por homeomorfismos. Además de esto, dos espacios $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ no pueden ser homeomorfos si X y Y tienen cardinalidades diferentes (p.ej. X es numerable y Y es innumerable) o si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_1$ tienen cardinalidades diferentes.

No obstante, cuando nos enfrentamos a un problema específico, pudiéramos no tener la propiedad que necesitamos. Por ejemplo, al mostrar que $(0, 1)$ no es homeomorfo a $[0, 1]$ o al mostrar que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Veremos cómo mostrar que estos espacios no son homeomorfos dentro de poco.

Antes de continuar, respondamos la pregunta siguiente:¿cuáles subespacios de $\mathbb{R}$ son conexos?

4.3.3 Definición. Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ se dice que es un **intervalo** si éste tiene la propiedad siguiente: si $x \in S$, $z \in S$, y $y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y < z$, entonces $y \in S$.

4.3.4 Observaciones. Note que cada conjunto unitario $\{x\}$ es un intervalo.

(ii) Cada intervalo tiene una de las formas siguientes: $\{a\}, [a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,\infty)$.

(iii) Se desprende del Ejemplo 4.2.6, la Observación 4.2.7, y los Ejercicios 4.2 #1, que cada intervalo es homeomorfo a $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$, o $\{0\}$. En los Ejercicios 4.3 #1, seremos capaces de hacer una afirmación más fuerte.

4.3.5 Proposición. Un subespacio S de $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, éste es un intervalo.

Demostración. Que todos los intervalos son conexos puede ser probado de manera similar a la Proposición 3.3.3 reemplazando todas las ocurrencias de$\mathbb{R}$ en la demostración por el intervalo que estamos tratando de probar que es conexo.

Por otro lado, sea S conexo. $\boxed{\text{Suponga}}$ que $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$, y $y \notin S$. Entonces $(-\infty,y) \cap S = (-\infty,y] \cap S$ es un subconjunto abierto y cerrado de S. Por lo que S tiene un subconjunto abierto y cerrado, a saber $(-\infty,y) \cap S$. Para mostrar que S no es conexo, tenemos que verificar solamente que éste conjunto abierto y cerrado es propio y no vacío. No es vacío pues éste contiene a x. Es propio pues $z \in S$ pero $z \notin (-\infty,y) \cap S$. Como consecuencia, S no es conexo. Ésto es una contradicción. Por consiguiente, S es un intervalo. □

Ahora vemos una razón de por qué el nombre “conexo”. Subespacios de $\mathbb{R}$ tales como $[a,b]$, (a,b), etc. son conexos, mientras subespacios como

$$X = [0,1] \cup [2,3] \cup [5,6]$$

que es una unión de piezas “disconexas”, no son conexos.

Ahora retornamos al problema de mostrar que $(0,1) \not\cong [0,1]$. Primeramente, presentamos una observación aparentemente trivial.

4.3.6 Observación. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ un homeomorfismo. Sea $a \in X$, tal que $X \setminus \{a\}$ es un subespacio de X con la topología inducida $\mathcal{T}_2$. Además, $Y \setminus \{f(a)\}$ es un subespacio de Y con la topología inducida $\mathcal{T}_3$. Entonces $(X \setminus \{a\}, \mathcal{T}_2)$ es homeomorfo a $(Y \setminus \{f(a)\}, \mathcal{T}_3)$.

Idea de la demostración. Defina $g\colon X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{f(a)\}$ by $g(x) = f(x)$, para toda $x \in X \setminus \{a\}$. Entonces, se puede verificar fácilmente que g es un homeomorfismo. (Escriba una demostración de ésto.) $\square$

Como una consecuencia inmediata de ésto tenemos:

4.3.7 Corolario. Si a, b, c, y d son números reales con $a < b$ y $c < d$, entonces

(i) $(a, b) \not\cong [c, d)$,

(ii) $(a, b) \not\cong [c, d]$, y

(iii) $[a, b) \not\cong [c, d]$.

Demostración. (i) Sean $(X, \mathcal{T}) = [c, d)$ y $(Y, \mathcal{T}_1) = (a, b)$. $\boxed{\text{Suponga}}$ que $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. Entonces $X \setminus \{c\} \cong Y \setminus \{y\}$, para alguna $y \in Y$. Pero, $X \setminus \{c\} = (c, d)$ es un intervalo, y por lo tanto es conexo, mientras que, independientemente de cuál punto removamos de (a, b), el espacio resultante es disconexo. Por lo tanto, por la Proposición 4.3.2,

$$X \setminus \{c\} \not\cong Y \setminus \{y\}, \text{ para toda } y \in Y.$$

Ésto es una contradicción. Por consiguiente, $[c, d) \not\cong (a, b)$.

(ii) $[c, d] \setminus \{c\}$ es conexo, mientras que $(a, b) \setminus \{y\}$ es disconexo para toda $y \in (a, b)$. Como consecuencia, $(a, b) \not\cong [c, d]$.

(iii) $\boxed{\text{Suponga}}$ que $[a, b) \cong [c, d]$. Entonces $[c, d] \setminus \{c\} \cong [a, b) \setminus \{y\}$ para alguna $y \in [a, b)$. Por lo tanto, $([c, d] \setminus \{c\}) \setminus \{d\} \cong ([a, b) \setminus \{y\}) \setminus \{z\}$, para alguna $z \in [a, b) \setminus \{y\}$; es decir, $(c, d) \cong [a, b) \setminus \{y, z\}$, para elementos distintos y y z en $[a, b)$. Pero (c, d) es conexo, mientras que $[a, b) \setminus \{y, z\}$, para dos puntos distintos cualesquiera y y z en $[a, b)$, es disconexo. Como resultado, tenemos una contradicción. Consiguientemente, $[a, b) \not\cong [c, d]$. $\square$

Ejercicios 4.3

1. Deduzca de lo anterior (Corolario 4.3.7) que todo intervalo es homeomorfo a uno y sólo uno de los espacios siguientes:

$$\{0\}; \qquad (0,1); \qquad [0,1]; \qquad [0,1).$$

2. Deduzca de la Proposición 4.3.5 que todo subespacio numerable de $\mathbb{R}$ con más de un punto es disconexo. (En particular, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son disconexos.)

3. Sea X el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$; es decir, $X = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$ y tiene la topología del subespacio.

   (i) Muestre que $X \setminus \{\langle 1, 0\rangle\}$ es homeomorfo al intervalo abierto $(0,1)$.

   (ii) Deduzca que $X \not\cong (0,1)$ y $X \not\cong [0,1]$.

   – (iii)] Observando que para `todo` punto $a \in X$, el subespacio $X \setminus \{a\}$ es conexo, muestre que $X \not\cong [0,1)$.

   (iv) Deduzca que X no es homeomorfo a ningún intervalo.

4. Sea Y el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$Y = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

   (i) ¿Es Y homeomorfo al espacio X en el Ejercicio 3 anterior?

   (ii) ¿Es Y homeomorfo a un intervalo?

5. Sea Z el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-3/2)^2 + y^2 = 1\}.$$

   Muestre que

   (i) Z no es homeomorfo a ningún intervalo, y que

   (ii) Z no es homeomorfo a X ni a Y, los espacios descritos en los Ejercicios 3 y 4 anteriores.

6. Demuestre que la recta de Sorgenfrey no es homeomorfo a $\mathbb{R}$, ni a $\mathbb{R}^2$, ni a ningún subespacio de estos espacios.

7. (i) Demuestre que el espacio topológico de los Ejercicios 1.1 #5 (i) no es homeomorfo al espacio de los Ejercicios 1.1 #9 (ii).

   (ii)* En los Ejercicios 1.1 #5, ¿es $(X,\mathcal{T}_1) \cong (X,\mathcal{T}_2)$?

   (iii)* En los Ejercicios 1.1 # 9, ¿es $(X,\mathcal{T}_2) \cong (X,\mathcal{T}_9)$?

8. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, donde X es un conjunto infinito. Demuestre cada una de las afirmaciones siguientes (originalmente demostradas por John Ginsburg and Bill Sands [92]).

   (i)* $(X,\mathcal{T})$ tiene un subespacio homeomorfo a $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$, donde o $\mathcal{T}_1$ es la topología indiscreta o $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ es un T_0-espacio.

   (ii)** Sea $(X,\mathcal{T})$ un T_1-espacio. Entonces $(X,\mathcal{T})$ tiene un subespacio homeomorfo a $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$, donde $\mathcal{T}_2$ es o la topología cofinita o la topología discreta.

   (iii) Deduzca de (ii), que cualquier espacio infinito de Hausdorff contiene un subespacio discreto infinito, y por lo tanto, un subespacio homeomorfo a $\mathbb{N}$ con la topología discreta.

   (iv)** Sea $(X,\mathcal{T})$ un T_0-espacio que no es un T_1-espacio. Entonces el espacio $(X,\mathcal{T})$ tiene un subespacio homeomorfo a $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$, donde $\mathcal{T}_3$ está formada por $\mathbb{N}$, $\emptyset$, y todos los conjuntos $\{1,2,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, o $\mathcal{T}_3$ está formada por $\mathbb{N}$, $\emptyset$, y todos los conjuntos $\{n, n+1, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (v) Deduzca de lo anterior que todo espacio topológico infinito tiene un subespacio homeomorfo a $(\mathbb{N},\mathcal{T}_4)$, donde $\mathcal{T}_4$ es la topología indiscreta, la topología discreta, la topología cofinita, o una de las dos topologías descritas en (iv), conocidas como la **topología del segmento inicial** y la **topología del segmento final**, respectivamente. Además, dos cualesquiera de estas cinco topologías sobre $\mathbb{N}$ no son homeomorfas.

9. Sean $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{T}_1)$ espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es un **homeomorfismo local** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que f transforma U homeomórficamente en un subespacio abierto V de $(Y,\mathcal{T}_1)$; es decir, si la topología inducida sobre U por $\mathcal{T}$ es $\mathcal{T}_2$ y la topología inducida sobre $V = f(U)$ por $\mathcal{T}_1$ es $\mathcal{T}_3$, entonces f es un homeomorfismo de $(U,\mathcal{T}_2)$ en $(V,\mathcal{T}_3)$. El espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice que es **localmente homeomorfo** a $(Y,\mathcal{T}_1)$ si existe un homeomorfismo local de $(X,\mathcal{T})$ en $(Y,\mathcal{T}_1)$.

(i) Si $(X,\mathcal{T})$ y$(Y,\mathcal{T}_1)$ son espacios topológicos homeomorfos, verifique que $(X,\mathcal{T})$ es localmente homeomorfo a $(Y,\mathcal{T}_1)$.

(ii) Si $(X,\mathcal{T})$ es un subespacio abierto de $(Y,\mathcal{T}_1)$, demuestre que $(X,\mathcal{T})$ es localmente homeomorfo a $(Y,\mathcal{T}_1)$.

(iii)* Demuestre que si $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ es un homeomorfismo local, entonces f transforma cada subconjunto abierto de $(X,\mathcal{T})$ en un subconjunto abierto de $(Y,\mathcal{T}_1)$.

4.4 Postdata

Existen tres maneras importantes de crear nuevos espacios topológicos a partir de viejos: la formación de subespacios, los productos, y los espacios cocientes. Nosotros examinaremos estas tres vías en el momento apropiado. La formación de subespacios fue estudiada en este capítulo. Ésto nos permitió introducir los espacios $\mathbb{Q}$, $[a,b]$, (a,b), etc.

Definimos la importante noción de homeomorfismo. Notamos que "$\cong$" es una relación de equivalencia. Una propiedad se dice que es **topológica** si es preservada por homeomorfismos; es decir, si $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ y $(X,\mathcal{T})$ tiene la propiedad entonces $(Y,\mathcal{T}_1)$ tiene que tener también la propiedad. Fue mostrado que la conexidad es una propiedad topológica. Por lo que cualquier espacio homeomorfo a un espacio conexo es conexo. (Algunas otras propiedades topológicas fueron también identificadas.) Formalmente definimos la noción de un intervalo en $\mathbb{R}$, y mostramos que los intervalos son precisamente los espacios conexos de $\mathbb{R}$.

Dados dos espacios topológicos $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{T}_1)$ es una tarea interesante mostrar si ellos son homeomorfos o no. Demostramos que todo intervalo en $\mathbb{R}$ es homeomorfo a uno y sólo uno de los conjuntos siguientes $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$, y $\{0\}$. En el capítulo próximo mostraremos que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Un problema más difícil es el de mostrar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$. Ésto será hecho más adelante a través del Teorema de la curva de Jordan. Sin embargo, la flor y nata es el hecho de que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ si, y sólo si, $n = m$. De la mejor forma que ésto es analizado es a través de la topología algebraica, la cual es tratada brevemente en este libro.

Los Ejercicios 4.2 #6 introdujeron la noción de grupo de homeomorfismos, la cual es por sí misma un tema interesante e importante.

Chapter 5

Funciones Continuas

Introducción

En la mayoría de las ramas de las matemáticas puras estudiamos lo que en teoría de categorías son llamados “objetos” y “flechas”. En álgebra lineal los objetos son espacios vectoriales y las flechas son transformaciones lineales. En teoría de grupos los objetos son grupos y las flechas son homomorfismos, mientras en teoría de conjuntos los objetos son conjuntos y las flechas son funciones. En topología los objetos son los espacios topológicos. Ahora introducimos las flechas ... las funciones continuas.

5.1 Funciones Continuas

Por supuesto, muchos de nosotros estamos ya familiarizados [1] con la noción de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua** si para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada número real positivo ε, existe un número real positivo δ, tal que $\mid x - a \mid < \delta$ implica $\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$.

No es obvio cómo generalizar esta definición a espacios topológicos generales, donde no tenemos “valor absoluto” o “sustracción”. Por lo que buscaremos otra definición (equivalente) de continuidad que se presta más para una generalización.

Se puede ver fácilmente que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada intervalo $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(a) - \varepsilon\,,\ f(a) + \varepsilon)$ para todo $x \in (a - \delta\,,\ a + \delta)$.

[1] La primera parte de esta sección asume que el lector tiene algún conocimiento de análisis real y, en particular, de la definición ε–δ de continuidad. Si éste no es el caso, entonces proceda directamente a la Definición 5.1.3.

Esta definición constituye una mejora pues no involucra el concepto de "valor absoluto" pero aún envuelve el concepto de "sustracción". El lema próximo muestra cómo evitar la sustracción.

5.1.1 Lema. Sea f una función que transforma $\mathbb{R}$ en el mismo. Entonces f es continua si, y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada conjunto abierto U que contiene $f(a)$, existe un conjunto abierto V que contiene a tal que $f(V) \subseteq U$.

Demostración. Asuma que f es continua. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea U cualquier conjunto abierto que contiene $f(a)$. Entonces existen números reales c y d tal que $f(a) \in (c, d) \subseteq U$. Ponga ε igual al menor de los dos números $d - f(a)$ y $f(a) - c$, tal que

$$(f(a) - \varepsilon\,,\; f(a) + \varepsilon) \subseteq U.$$

Como la función f es continua, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(a) - \varepsilon\,,\; f(a) + \varepsilon)$ para toda $x \in (a - \delta\,,\; a + \delta)$. Sea V el conjunto abierto $(a - \delta\,,\; a + \delta)$. Entonces $a \in V$ y $f(V) \subseteq U$, como se requería.

Por otro lado, asuma que para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada conjunto abierto U conteniendo $f(a)$ existe un conjunto abierto V conteniendo a tal que $f(V) \subseteq U$. Tenemos que mostrar que f es continua. Sean $a \in \mathbb{R}$ y ε cualquier número real positivo. Ponga $U = (f(a) - \varepsilon\,,\; f(a) + \varepsilon)$. Por lo que U es un conjunto abierto que contiene $f(a)$. Como resultado, existe un conjunto abierto V que contiene a tal que $f(V) \subseteq U$. Como V es un conjunto abierto conteniendo a, existen números reales c y d tal que $a \in (c, d) \subseteq V$. Ponga δ igual al menor de los dos números $d - a$ y $a - c$, tal que $(a - \delta\,,\; a + \delta) \subseteq V$. Entonces para toda $x \in (a - \delta\,,\; a + \delta)$, $f(x) \in f(V) \subseteq U$, como se requería. Por consiguiente, f es continua. $\square$

Nosotros podríamos usar la propiedad descrita en el Lema 5.1.1 para definir continuidad, sin embargo el lema siguiente nos permite hacer una definición más elegante.

5.1.2 Lema. Sea f una función de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ en un espacio topológico $(Y, \mathcal{T}')$. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:

(i) para cada $U \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$,

(ii) para cada $a \in X$ y cada $U \in \mathcal{T}'$ con $f(a) \in U$, existe un $V \in \mathcal{T}$ tal que $a \in V$ y $f(V) \subseteq U$.

Demostración. Asuma que la condición (i) se satisface. Sean $a \in X$ y $U \in \mathcal{T}'$ con $f(a) \in U$. Entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Ponga $V = f^{-1}(U)$, y tenemos que $a \in V$, $V \in \mathcal{T}$, y $f(V) \subseteq U$. Por lo que la condición (ii) se satisface.

Por otro lado, asuma que la condición (ii) se cumple. Sea $U \in \mathcal{T}'$. Si $f^{-1}(U) = \emptyset$ entonces, claramente $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Si $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, sea $a \in f^{-1}(U)$. Entonces $f(a) \in U$. Por lo que existe un $V \in \mathcal{T}$ tal que $a \in V$ y $f(V) \subseteq U$. Por lo tanto, para cada $a \in f^{-1}(U)$ existe un $V \in \mathcal{T}$ tal que $a \in V \subseteq f^{-1}(U)$. Por el Corolario 3.2.9, esto implica que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Por consiguiente la condición (i) se cumple. $\square$

Poniendo juntos Lemas 5.1.1 y 5.1.2, vemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, para cada subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

Ésto nos lleva a definir la noción de una función continua entre dos espacios topológicos de la manera siguiente:

5.1.3 Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y f una función de X en Y. Entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ se dice que es una **función continua** si para cada $U \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

De las observaciones anteriores, vemos que esta definición de continuidad coincide con la definición usual cuando $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}_1) = \mathbb{R}$.

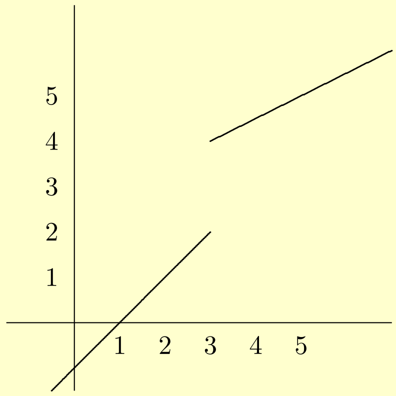
Revisemos algunos ejemplos sencillos para ver con que facilidad esta definición de continuidad se aplica en la práctica.

5.1.4 Ejemplo. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, para toda $x \in \mathbb{R}$; es decir, f es la función identidad. Entonces, para cualquier conjunto abierto U en $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U) = U$, y por lo tanto $f^{-1}(U)$ es abierto. Por consiguiente, f es continua. □

5.1.5 Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$, para una constante c, y todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, sea U cualquier conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Claramente $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$, si $c \in U$, y $\emptyset$ si $c \notin U$. En ambos cases, $f^{-1}(U)$ es abierto. Por lo que f es continua. □

5.1.6 Ejemplo. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x + 5), & \text{si } x > 3. \end{cases}$$



Recuerde que una función es continua si, y sólo si, la imagen inversa de todo conjunto abierto es un conjunto abierto.

Por lo tanto, para mostrar que f `no` es continua, tenemos que encontrar solamente un conjunto U tal que $f^{-1}(U)$ no sea abierto.

Entonces, $f^{-1}((1, 3)) = (2, 3]$, el cual no es un conjunto abierto. Por consiguiente, f no es continua. □

Note que el Lema 5.1.2 puede ser enunciado nuevamente de la siguiente forma.[2]

5.1.7 Proposición. Sea f una función de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ en un espacio $(Y, \mathcal{T}')$. Entonces, f es continua si, y sólo si, para cada $x \in X$ y cada $U \in \mathcal{T}'$ con $f(x) \in U$, existe un $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ y $f(V) \subseteq U$. □

5.1.8 Proposición. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}_1)$ y $(Z, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ y $g : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$ son funciones continuas, entonces la función compuesta $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_2)$ es continua.

Demostración.

Para probar que la función compuesta $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_2)$ es continua, tenemos que mostrar que si $U \in \mathcal{T}_2$, entonces $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Pero $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Sea U un conjunto abierto en $(Z, \mathcal{T}_2)$. Como g es continua, $g^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{T}_1$. Entonces $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en $\mathcal{T}$, pues f es continua. Pero $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Por lo que, $g \circ f$ es continua. □

El próximo resultado nos muestra que la continuidad puede ser descrita in términos de conjuntos cerrados en vez de conjuntos abiertos si deseamos.

5.1.9 Proposición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos. Entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ es continua si, y sólo si, para todo subconjunto cerrado S de Y, $f^{-1}(S)$ es un subconjunto cerrado de X.

[2] Si no ha leído el Lema 5.1.2 y su demostración, debe hacerlo ahora.

Demostración. Este resultado se obtiene inmediatamente que reconozcamos que

$$f^{-1}(\text{el complemento de } S) = \text{el complemento de } f^{-1}(S). \qquad \square$$

5.1.10 Observación. Existe una relación entre funciones continuas y homeomorfismos: si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ es un homeomorfismo entonces f es una función continua. Por supuesto no toda función continua es un homeomorfismo.

Sin embargo, la proposición siguiente, cuya demostración se sigue de las definiciones de "función continua" y "homeomorfismo" nos cuenta la historia completa.

5.1.11 Proposición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, y f una función de X en Y. Entonces f es un homeomorfismo si, y sólo si,

(i) f es continua,

(ii) f es inyectiva y sobreyectiva; es decir, la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ existe, y

(iii) f^{-1} es continua. $\square$

Un resultado útil es la proposición siguiente, la cual nos dice que la restricción de una función continua es una función continua. Su demostración rutinaria es dejada al lector—vea también el Conjunto de Ejercicios 5.1 #8.

5.1.12 Proposición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ una función continua, A un subconjunto de X, y $\mathcal{T}_2$ la topología inducida sobre A. Además, sea $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ la restricción de f a A; es decir, $g(x) = f(x)$, para toda $x \in A$. Entonces g es continua.

Ejercicios 5.1

1. (i) Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ una función constante. Muestre que f es continua.

   (ii) Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ la función identidad. Muestre que f es continua.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   (i) Demuestre que f no es continua usando el método del Ejemplo 5.1.6.

   (ii) Encuentre $f^{-1}(\{1\})$ y, usando la Proposición 5.1.9, deduzca que f no es continua.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1. \end{cases}$$
   ¿Es f continua? (Justifique su respuesta.)

4. Sea $(X, \mathcal{T})$ el subespacio de $\mathbb{R}$ dado por $X = [0,1] \cup [2,4]$. Defina $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 2, & \text{si} \quad x \in [2,4]. \end{cases}$$
   Demuestre que f <u>es</u> continua. (¿Ésto le sorprende?)

5. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y $\mathcal{B}_1$ una base de la topología $\mathcal{T}_1$. Muestre que una función $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ es continua si, y sólo si, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, para todo $U \in \mathcal{B}_1$.

6. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos y f una función de X en Y. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio discreto, demuestre que f es continua.

7. Sea $(X, \mathcal{T})$ and $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y f una función de X en Y. Si $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un espacio indiscreto, demuestre que f es continua.

8. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ una función continua. Sean A un subconjunto de X, $\mathcal{T}_2$ la topología inducida sobre A, $B = f(A)$, $\mathcal{T}_3$ la topología inducida sobre B y $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (B, \mathcal{T}_3)$ la restricción de f a A. Demuestre que g es continua.

9. Sea f una función de un espacio $(X, \mathcal{T})$ en un espacio $(Y, \mathcal{T}')$. Demuestre que f es continua si, y sólo si, para cada $x \in X$ y cada vecindad N de $f(x)$ existe una vecindad M de x tal que $f(M) \subseteq N$.

10. Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías sobre un conjunto X. Entonces $\mathcal{T}_1$ se dice que es una **topología más fina**[3] que $\mathcal{T}_2$ (y $\mathcal{T}_2$ se dice que es una **topología menos fina**[4] que $\mathcal{T}_1$) si $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$. Demuestre que

    (i) la topología Euclidiana $\mathbb{R}$ es más fina que la topología cofinita sobre $\mathbb{R}$;

    (ii) la función identidad $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si, y sólo si, $\mathcal{T}_1$ es una topología más fina que $\mathcal{T}_2$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(q) = 0$ para todo número racional q. Demuestre que $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

12. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ una función continua. Si f es inyectiva, demuestre que

    (i) Si $(Y, \mathcal{T}_1)$ es Hausdorff entonces $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff.

    (ii) Si $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un T_1-espacio entonces $(X, \mathcal{T})$ es un T_1-espacio.

13. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y sea f una función de $(X, \mathcal{T})$ en $(Y, \mathcal{T}_1)$. Demuestre que f es continua si, y sólo si, para todo subconjunto A de X, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

    [Consejo: Use la Proposición 5.1.9.]

5.2 Teorema del Valor Intermedio

5.2.1 Proposición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ sobreyectiva y continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ es conexo.

[3] *Nota del Traductor:* Traducción de "finer topology".
[4] *Nota del Traductor:* Traducción de "coarser topology".

Demostración. Suponga que $(Y, \mathcal{T}_1)$ no es conexo. Entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ tiene un subconjunto abierto y cerrado U tal que $U \neq \emptyset$ y $U \neq Y$. Entonces $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto, pues f es continua, y además es un conjunto cerrado, por la Proposición 5.1.9; es decir, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X. Ahora $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, pues f es sobreyectiva y $U \neq \emptyset$. Además $f^{-1}(U) \neq X$, puesto si lo fuera, U sería igual a Y, por la sobreyectividad de f. Por consiguiente, $(X, \mathcal{T})$ no es conexo. Ésto es una contradicción. Como consecuencia, $(Y, \mathcal{T}_1)$ es conexo. $\square$

5.2.2 Observaciones. (i) La proposición de arriba sería falsa si la condición de “sobreyectividad” es eliminada. (Encuentre un ejemplo de ésto.)

(ii) La Proposición 5.2.1 podría también ser enunciada de la manera siguiente: cualquier imagen continua de un conjunto conexo es conexa.

(iii) La Proposición 5.2.1 nos dice que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio conexo y $(Y, \mathcal{T}')$ no es conexo (es decir, disconexo) entonces no existe ninguna función sobreyectiva de $(X, \mathcal{T})$ en $(Y, \mathcal{T}')$ que sea continua. Por ejemplo, mientras existen un un número infinito de funciones sobreyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ (o en $\mathbb{Z}$), ninguna de ellas es continua. Ciertamente, en el Conjunto de Ejercicios 5.2 # 10 observamos que las únicas funciones continuas *y no sobreyectivas* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ (o en $\mathbb{Z}$) son las funciones constantes. $\square$

La siguiente versión reforzada de conexidad es con frecuencia útil.

5.2.3 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **conexo por caminos** (o **arcoconexo**) si para cada par de puntos distintos a y b de X existe una función continua $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$, tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. La función f se dice que es un **camino uniendo a a b.**

.

5.2.4 Ejemplo. Se puede ver fácilmente que todo intervalo es conexo por caminos. $\square$

5.2.5 Ejemplo. Para cada $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos. $\square$

5.2.6 Proposición. Todo espacio conexo por caminos es conexo.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo por caminos y suponga no es conexo.

Entonces $(X, \mathcal{T})$ tiene un subconjunto U que es propio, no vacío, abierto y cerrado. Por lo que, existen a y b tal que $a \in U$ y $b \in X \setminus U$. Como $(X, \mathcal{T})$ es conexo por caminos, existe una función continua $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

Sin embargo, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto y cerrado de $[0, 1]$. Como $a \in U$, $0 \in f^{-1}(U)$, y por lo tanto $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Como $b \notin U$, $1 \notin f^{-1}(U)$, y como consecuencia $f^{-1}(U) \neq [0, 1]$. Por consiguiente, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto propio, no vacío, abierto y cerrado de $[0, 1]$, lo cual contradice la conexidad de $[0, 1]$.

Consecuentemente, $(X, \mathcal{T})$ es conexo. $\square$

5.2.7 Observación. Lo opuesto de la Proposición 5.2.6 es falso; es decir, no todo espacio conexo es conexo por caminos. Un ejemplo de tal espacio es el subespacio siguiente de $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{\langle x, y\rangle : y = \operatorname{sen}(1/x),\ 0 < x \leq 1\} \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}.$$

[El Conjunto de Ejercicios 5.2 #6 muestra que X es conexo. Que X no es conexo por caminos puede ser visto mostrando que no existe camino enlazando $\langle 0, 0\rangle$ a, digamos, el punto $\langle 1/\pi, 0\rangle$. Dibuje una figura y trate de convencerse de ésto.] $\square$

Ahora podemos mostrar que $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$.

5.2.8 Ejemplo. Aquí hacemos uso de la Observación 4.3.6. Claramente, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$ es conexo por caminos, y por lo tanto, por la Proposición 5.2.6, es conexo. Sin embargo, por la Proposición 4.3.5, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, para toda $a \in \mathbb{R}$, es disconexo. Por consiguiente, $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$. $\square$

Ahora presentamos el Teorema del Valor Intermedio de Weierstrass, el cual es una bella aplicación de la topología a la teoría de funciones de variable real. El concepto topológico crucial del resultado es el de conexidad.

5.2.9 Teorema. (Teorema del Valor Intermedio de Weierstrass) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces para cada número p entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = p$.

Demostración. Como $[a, b]$ es conexo yf es continua, la Proposición 5.2.1 nos dice que $f([a, b])$ es conexo. Por la Proposición 4.3.5, ésto implica que $f([a, b])$ es un intervalo. Ahora $f(a)$ y $f(b)$ están en $f([a, b])$. Por lo que, si p está entre $f(a)$ y $f(b)$, $p \in f([a, b])$, es decir, $p = f(c)$, para algún $c \in [a, b]$. □

5.2.10 Corolario. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua tal que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, entonces existe un $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$. □

5.2.11 Corolario. (Teorema del Punto Fijo) Sea f una función continua de $[0, 1]$ en $[0, 1]$. Entonces existe un $z \in [0, 1]$ tal que $f(z) = z$. (El punto z es llamado un **punto fijo**.)

Demostración. Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, el resultado es evidente.Por lo que es suficiente considerar el caso cuando $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$.

Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x - f(x)$. Claramente g es continua, $g(0) = -f(0) < 0$, and $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Consecuentemente, por el Corolario 5.2.10, existe un $z \in [0, 1]$ tal que $g(z) = 0$; es decir, $z - f(z) = 0$ o $f(z) = z$. □

5.2.12 Observación. El Corolario 5.2.11 es un caso especial de un teorema muy importante llamado el Teorema del Punto Fijo de Brouwer el cual dice que si usted transforma un cubo n-dimensional en el mismo continuamente, entonces existe un punto fijo. [Existen muchas demostraciones de este teorema, pero la mayoría depende de métodos de topología algebraica. Una demostración poco sofisticada es dada en la páginas 238–239 del libro "Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología", de K. Kuratowski (Pergamon Press, 1961).]

Ejercicios 5.2

1. Demuestre que una imagen continua de un espacio conexo por caminos es conexa por caminos.

2. Sea f una función continua del intervalo $[a, b]$ en el mismo, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Demuestre que existe un punto fijo.

3. (i) Dé un ejemplo que muestre que el Corolario 5.2.11 sería falso si reemplazamos $[0, 1]$ por $(0, 1)$ en todas partes.

   (ii) Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de $(X, \mathcal{T})$ en el mismo tiene un punto fijo. Muestre que los únicos intervalos que tienen la propiedad del punto fijo son los los intervalos cerrados.

   (iii) Sea X un conjunto con al menos dos puntos. Demuestre que el espacio discreto $(X, \mathcal{T})$ y el espacio indiscreto $(X, \mathcal{T}')$ no tienen la propiedad del punto fijo.

   (iv) ¿Existe algún espacio con la topología cofinita que tenga la propiedad del punto fijo?

   (v) Demuestre que si el espacio $(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad del punto fijo y $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un espacio homeomorfo a $(X, \mathcal{T})$, entonces $(Y, \mathcal{T}_1)$ tiene la propiedad del punto fijo.

4. Sea $\{A_j : j \in J\}$ una familia de subespacios conexos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Si $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$, muestre que $\bigcup_{j \in J} A_j$ es conexo.

5. Sea A un subespacio conexo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Demuestre que $\overline{A}$ es también conexo. Es más, muestre que si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo.

6. (i) Muestre que el subespacio $Y = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \le 1\}$ of $\mathbb{R}^2$ es conexo.

   [Consejo: Use la Proposición 5.2.1.]

   (ii) Verifique que $\overline{Y} = Y \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \le y \le 1\}$

   (iii) Usando Ejercicio 5, observe que $\overline{Y}$ es conexo.

7. Sea E el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ que tienen ambas coordenadas racionales. Demuestre que el espacio $\mathbb{R}^2 \setminus E$ es conexo por caminos.

8.* Sea C cualquier subconjunto numerable de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que el espacio $\mathbb{R}^2 \setminus C$ es conexo por caminos.

9. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y a cualquier punto en X. La **componente en X de a** (o la **componente conexa en X de a**), $C_X(a)$, se define como la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a a. Muestre que

   (i) $C_X(a)$ es conexo. (Use el Ejercicio 4 anterior.)

   (ii) $C_X(a)$ es el más grande conjunto conexo que contiene a a.

   (iii) $C_X(a)$ es cerrado en X. (Use el Ejercicio 5 anterior.)

10. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **totalmente disconexo** si todo subconjunto conexo no vacío es un conjunto unitario. Demuestre las siguientes afirmaciones.

    (i) $(X, \mathcal{T})$ es totalmente disconexo si, y sólo si, para toda $a \in X$, $C_X(a) = \{a\}$. (Vea la notación en el Ejercicio 9.)

    (ii) El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales con la topología usual es totalmente disconexo.

    (iii) Si f es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$, demuestre que existe un $c \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = c$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

    (iv) Todo subespacio de un espacio totalmente disconexo es totalmente disconexo.

    (v) Todo subespacio numerable de $\mathbb{R}^2$ es totalmente disconexo.

    (vi) La recta de Sorgenfrey es totalmente disconexa.

11. (i) Usando el Ejercicio 9, defina, de manera natural, la "componente por caminos" de un punto en un espacio topológico.

    (ii) Demuestre que, en cualquier espacio topológico, toda componente por caminos es un espacio conexo por caminos.

    (iii) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico con la propiedad de que todo punto en X tiene una vecindad que es conexa por caminos, demuestre que toda componente por caminos es un conjunto abierto. Deduzca que toda componente por caminos es también un conjunto cerrado.

(iv) Usando (iii), muestre que un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ es conexo si, y sólo si, es conexo por caminos.

12.* Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Si A y B son ambos abiertos o ambos cerrados, y $A \cup B$ y $A \cap B$ son ambos conexos, muestre que A y B son conexos.

13. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **cero-dimensional** si existe una base de la topología formada de conjuntos abiertos y cerrados. Demuestre las siguientes afirmaciones.

(i) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son espacios cero-dimensionales.

(ii) Un subespacio de un espacio cero-dimensional es cero-dimensional.

(iii) Un espacio cero-dimensional de Hausdorff es totalmente disconexo. (Vea el Ejercicio 10 anterior.)

(iv) Todo espacio indiscreto es cero-dimensional.

(v) Todo espacio discreto es cero-dimensional.

(vi) Espacios indiscretos con más de un punto no son totalmente disconexos.

(vii) Un T_0-espacio cero-dimensional es Hausdorff.

(viii)* Un subespacio de $\mathbb{R}$ es cero-dimensional si, y sólo si, es totalmente disconexo.

14. Muestre que todo homeomorfismo local es una función continua. (Vea los Ejercicios 4.3#9.)

5.3 Postdata

En este capítulo vimos que una función entre espacios topológicos es llamada "continua" si tiene la propiedad de que la imagen inversa de todo conjunto abierto es un conjunto abierto. Ésta es una definición elegante y fácil de entender. Ella contrasta con la definición que nos encontramos en el análisis real, la cual fue mencionada al inicio de este capítulo. Nosotros hemos generalizados la definición proveniente del análisis real, no por el mero hecho de generalizar, sino para ver lo que en realidad está pasando.

El Teorema del Valor Intermedio de Weierstrass parece intuitivamente evidente, pero vimos que éste se sigue del hecho de que $\mathbb{R}$ es conexo y que cualquier imagen continua de un espacio conexo es conexo.

Introducimos una propiedad más fuerte que la conexidad, la conexidad por caminos. En muchos casos no es suficiente insistir en que un espacio sea conexo, éste tendría que ser conexo por caminos. Esta propiedad juega un papel importante en la topología algebraica.

Retornaremos al Teorema del Punto Fijo de Brouwer a su debido tiempo. Es un teorema muy poderoso. Teoremas de puntos fijos juegan roles importantes en varias ramas de las matemáticas, incluyendo topología, análisis funcional, y ecuaciones diferenciales. Ellos aún constituyen un tema activo de investigación hoy en día.

En los Ejercicios 5.2 #9 y #10 nos encontramos con las nociones de "componente" y "espacio totalmente disconexo". Ambas son importantes para entender el concepto de conexidad.

Chapter 6

Espacios Métricos

Introducción

La clase más importante de espacios topológicos es la clase de espacio métricos. Los espacios métricos constituyen una fuente rica de ejemplos en topología. Pero más que esto, la mayoría de las aplicaciones de la topología al análisis son a través de los espacio métricos.

La noción de espacio métrico fue introducida en 1906 por Maurice Fréchet, y fue desarrollada y acuñada por Felix Hausdorff en 1914 (Hausdorff [98]).

6.1 Espacios métricos

6.1.1 Definición. Sea X un conjunto no vacío y d una función de valor real definida sobre $X \times X$ tal que para $a, b \in X$:

(i) $d(a, b) \geq 0$, y $d(a, b) = 0$ si, y sólo si, $a = b$;

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$; y

(iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$, para toda a, b y c en X [la desigualdad triangular].

Entonces d es llamada **métrica** sobre X, (X, d) es llamado **espacio métrico** y $d(a, b)$ se conoce como la **distancia** entre a y b.

6.1.2 Ejemplo. La función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(a, b) = |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

es una métrica sobre el conjunto $\mathbb{R}$, puesto que

(i) $|a - b| \geq 0$, para toda a y b en $\mathbb{R}$, y $|a - b| = 0$ si, y sólo si, $a = b$,

(ii) $|a - b| = |b - a|$, y

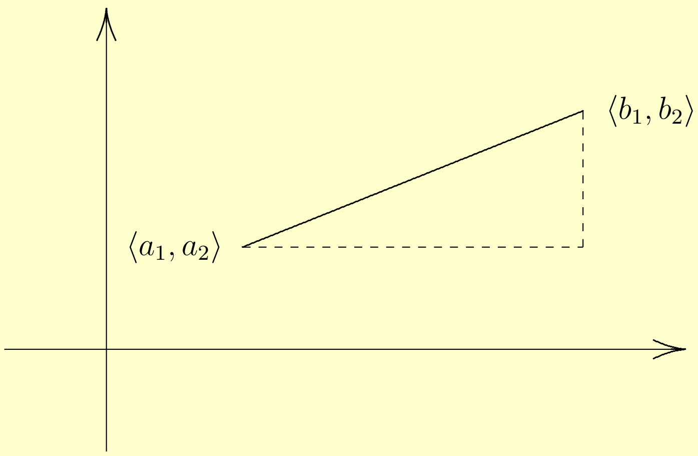
(iii) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$. (Deduzca ésto de $|x + y| \leq |x| + |y|$.)

Esta d es conocida como la **métrica Euclidiana sobre** $\mathbb{R}$. $\square$

6.1.3 Ejemplo. la función $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(\langle a_1, a_2 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

es una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ llamada la **métrica Euclidiana sobre** $\mathbb{R}^2$.



$\square$

6.1.4 Ejemplo. Sean X un conjunto no vacío y d la función de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } a = b \\ 1, & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

Entonces d es una métrica sobre X, llamada la **métrica discreta**. $\square$

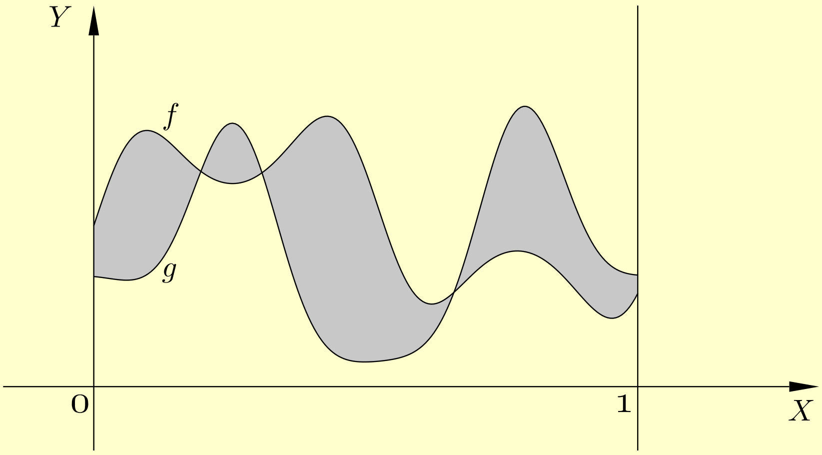
Muchos ejemplos importantes de espacios métricos son "espacios funcionales". En éstos el conjunto X sobre el cual ponemos una métrica es un conjunto de funciones.

6.1.5 Ejemplo. Denote por C[0, 1] el conjunto of funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Una métrica sobre este conjunto es definida por

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

donde f y g están en C[0, 1].

Unos segundos de reflexión le permitirán darse cuenta de que $d(f, g)$ es precisamente el área de la región que yace entre las gráficas de las funciones y las rectas $x = 0$ y $x = 1$, como se ilustra a continuación.

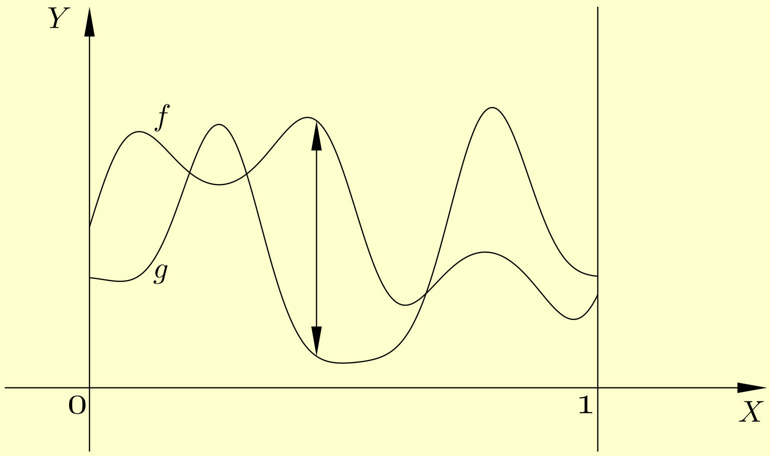


$\square$

6.1.6 Ejemplo. Nuevamente sea C$[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Otra métrica sobre C$[0,1]$ es definida a continuación:

$$d^*(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Claramente $d^*(f,g)$ es justamente la mayor diferencia entre las gráficas de las las funciones f y g.



□

6.1.7 Ejemplo. Podemos definir otra métrica sobre $\mathbb{R}^2$ escribiendo

$$d^*(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

donde $\max\{x, y\}$ es el mayor de los dos números x y y. □

6.1.8 Ejemplo. Otra métrica más sobre $\mathbb{R}^2$ es dada por

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|. \quad \square$$

Una fuente rica de ejemplos de espacios métricos es la familia de espacios vectoriales normados.

6.1.9 Ejemplo. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los números reales o complejos. Una **norma** $\| \ \|$ sobre V es una función : $V \to \mathbb{R}$ tal que para toda $a, b \in V$ y todo escalar λ en el campo

(i) $\| a \| \geq 0$, y $\| a \| = 0$ si, y sólo si, $a = 0$;

(ii) $\| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|$; y

(iii) $\| \lambda a \| = |\lambda| \, \| a \|$.

Un **espacio vectorial normado** $(V, \| \ \|)$ es un espacio vectorial V con una norma $\| \ \|$.

Sea $(V, \| \ \|)$ cualquier espacio vectorial normado. Entonces existe una métrica correspondiente, d, sobre el conjunto V dada por $d(a, b) = \| a - b \|$, para a y b en V.

Es fácil chequear que d es ciertamente una métrica. Por lo que todo espacio vectorial normado es también un espacio métrico de manera natural.

Por ejemplo, $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial normado si ponemos

$$\| \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \text{para } x_1, x_2, \text{ y } x_3 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Por lo que $\mathbb{R}^3$ se convierte en un espacio métrico si ponemos

$$\begin{aligned} d(\langle a_1, b_1, c_1 \rangle, \langle a_2, b_2, c_2 \rangle) &= \| (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2) \| \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} \, . \end{aligned}$$

Ciertamente, $\mathbb{R}^n$, para cualquier entero positivo n, es un espacio vectorial normado si ponemos

$$\| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \, .$$

Por lo que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico si ponemos

$$\begin{aligned} d(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle) &= \| \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n \rangle \| \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \, . \end{aligned}$$ □

En un espacio vectorial normado $(N, \| \ \|)$ la **bola abierta con centro a y radio r** se define como el conjunto

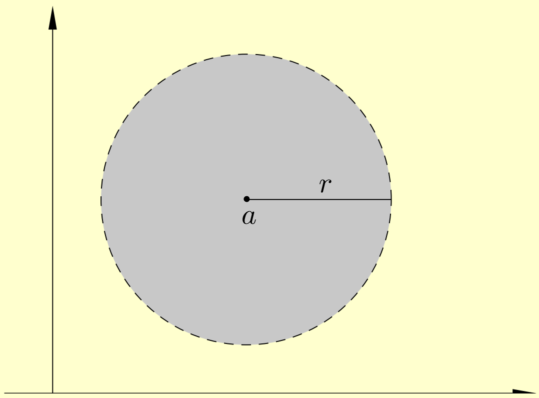
$$B_r(a) = \{x : x \in N \text{ and } \| x - a \| < r\}.$$

Lo anterior sugiere la definición siguiente para espacios métricos:

6.1.10 Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y r un número real positivo cualquiera. Entonces la **bola abierta centrada en $a \in X$ y de radio r** es el conjunto $B_r(a) = \{x : x \in X \text{ y } d(a, x) < r\}$.

6.1.11 Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana $B_r(a)$ es el intervalo abierto $(a-r, a+r)$.□

6.1.12 Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica Euclidiana, $B_r(a)$ es el disco abierto con centro a y radio r.

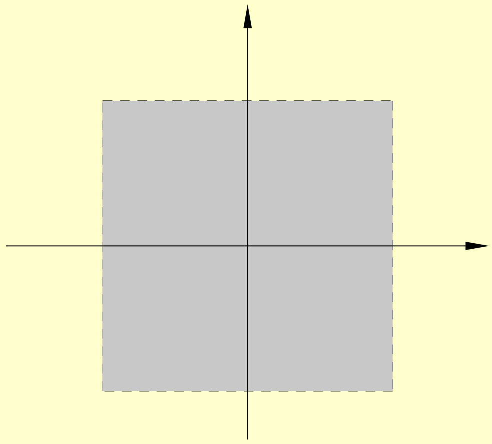


□

6.1.13 Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica d^* dada por

$$d^*(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\},$$

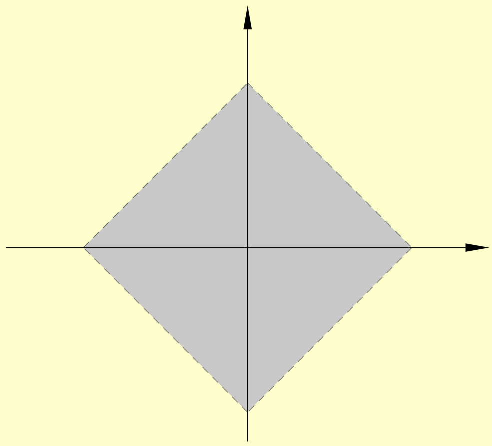
la bola abierta $B_1(\langle 0, 0\rangle)$ se ve como



6.1.14 Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica d_1 dada por

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|,$$

la bola abierta $B_1(\langle 0, 0\rangle)$ se ve como



$\square$

La demostración del lema siguiente es bastante fácil (especialmente si dibuja un diagrama), por lo que será dejada al estudiante.

6.1.15 Lema. Sean (X, d) un espacio métrico, y a y b puntos de X. Además, sean δ_1 y δ_2 números positivos reales. Si $c \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$. □

El corolario próximo es una consecuencia inmediata del Lema 6.1.15.

6.1.16 Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico, y B_1 y B_2 bolas abiertas en (X, d). Entonces $B_1 \cap B_2$ es una unión de bola abiertas en (X, d). □

Finalmente somos capaces de relacionar espacios métricos con espacios topológicos.

6.1.17 Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la colección de bolas abiertas en (X, d) es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre X.

[la topología $\mathcal{T}$ se conoce como **la topología inducida por la métrica** d, y $(X, \mathcal{T})$ se conoce como **el espacio topológico inducido** o **el espacio topológico correspondiente** o **el espacio topológico asociado**.]

Demostración. La demostración se sigue de la Proposición 2.2.8 y del Corolario 6.1.16. □

6.1.18 Ejemplo. Si d es la métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}$ entonces una base de la topología $\mathcal{T}$ inducida por la métrica d es el conjunto de todas las bola abiertas. En este caso $B_\delta(a) = (a - \delta\,,\, a + \delta)$, de lo cual se puede ver que $\mathcal{T}$ es la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. Por lo que la métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}$ induce la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$. □

6.1.19 Ejemplo. De los Ejercicios 2.3 #1 (ii) y el Ejemplo 6.1.12, se sigue que la métrica Euclidiana sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ induce la Euclidiana topología sobre $\mathbb{R}^2$. $\square$

6.1.20 Ejemplo. De los Ejercicios 2.3 #1 (i) y el Ejemplo 6.1.13 se sigue que la métrica d^* también induce la topología Euclidiana sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$. $\square$

Es dejado como ejercicio para el estudiante demostrar que la métrica d_1 del Ejemplo 6.1.14 también induce la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$.

6.1.21 Ejemplo. Si d es la métrica discreta sobre un conjunto X entonces para cada $x \in X, B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. Por lo tanto todos los conjuntos unitarios son abiertos en la topología $\mathcal{T}$ inducida sobre X por d. Consecuentemente, $\mathcal{T}$ es la topología discreta. $\square$

En los Ejemplos 6.1.19, 6.1.20, y 6.1.14 vimos $\boxed{\text{tres métricas diferentes}}$ sobre el mismo conjunto que induce la misma topología.

6.1.22 Definición. Métricas sobre un conjunto X se llaman **equivalentes** si ellas inducen la misma topología sobre X.

Por lo que las métricas d, d^*, y d_1, de los Ejemplos 6.1.3, 6.1.13, y 6.1.14 sobre $\mathbb{R}^2$ son equivalentes.

6.1.23 Proposición. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}$ la topología inducida sobre X por la métrica d. Entonces un subconjunto U de X es abierto en $(X, \mathcal{T})$ si, y sólo si, para cada $a \in U$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $B_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Demostración. Asuma que $U \in \mathcal{T}$. Entonces, por las Proposiciones 2.3.2 y 6.1.17, para toda $a \in U$ existe un punto $b \in X$ y un $\delta > 0$ tal que

$$a \in B_\delta(b) \subseteq U.$$

Sea $\varepsilon = \delta - d(a,b)$. Entonces se puede ver fácilmente que

$$a \in B_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

Por el contrario, asuma que U es un subconjunto de X con la propiedad de que para cada $a \in U$ existe un $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq U$. Entonces, por las Proposiciones 2.3.3 y 6.1.17, U es un conjunto abierto. □

Hemos visto que toda métrica sobre un conjunto X induce una topología sobre el conjunto X. Sin embargo, ahora mostraremos que no toda topología sobre un conjunto es inducida por una métrica. Primero presentamos una definición que Ud. ya ha encontrado en los ejercicios. (Vea los Ejercicios 4.1 #13.)

6.1.24 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama un **espacio de Hausdorff** (o un T_2-espacio) si para cada par de puntos distintos a y b en X, existen conjuntos abiertos U y V tal que $a \in U$, $b \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Por supuesto, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y todos los espacios discretos son ejemplos de espacios de Hausdorff, mientras que cualquier conjunto con al menos 2 elementos y con la topología indiscreta no es un espacio de Hausdorff. Pensando un poco vemos que $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita no es tampoco un espacio de Hausdorff. (Convénzase Ud. mismo de todos estos hechos.)

6.1.25 Proposición. Sea (X, d) cualquier espacio métrico y $\mathcal{T}$ la topología inducida sobre X por d. Entonces $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Sean a y b dos puntos cualesquiera de X, con $a \neq b$. Entonces $d(a,b) > 0$. Ponga $\varepsilon = d(a,b)$. Considere las bolas abiertas $B_{\varepsilon/2}(a)$ y $B_{\varepsilon/2}(b)$. Entonces éstas son conjuntos abiertos en $(X, \mathcal{T})$ con $a \in B_{\varepsilon/2}(a)$ y $b \in B_{\varepsilon/2}(b)$. Por lo que para mostrar que $\mathcal{T}$ es Hausdorff tenemos que probar solamente que $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b) = \emptyset$.

Suponga $x \in B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b)$. Entonces $d(x,a) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x,b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ésto nos indica que $d(a,b) < \varepsilon$, lo cual es falso. Consecuentemente, no existe x en $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b)$; es decir, $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b) = \emptyset$, como se requería. □

6.1.26 Observación. Analizando la Proposición 6.1.25 y los comentarios que la precedieron, vemos que un espacio indiscreto con al menos dos puntos tiene una topología que no es inducida por ninguna métrica. Además, para $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita $\mathcal{T}$ tenemos que $\mathcal{T}$ no es inducida por ninguna métrica sobre $\mathbb{Z}$. □

6.1.27 Definición. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se llama **metrizable** si existe una métrica d sobre el conjunto X con la propiedad de que $\mathcal{T}$ es la topología inducida por d.

Consecuentemente, por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita no es un espacio metrizable.

Advertencia. El estudiante no debe malinterpretar la Proposición 6.1.25 y pensar que todo espacio de Hausdorff es metrizable. Más adelante, seremos capaces de producir (usando productos infinitos) ejemplos de espacios de Hausdorff que no son metrizables. [La metrizabilidad de espacios topológicos es un tema bastante técnico. Condiciones necesarias y suficientes para la metrizabilidad pueden encontrarse en el Teorema 9.1, pg. 195, del libro Dugundji [66].]

Ejercicios 6.1

1. Demuestre que la métrica d_1 del Ejemplo 6.1.8 induce la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$.

2. Sea d una métrica sobre un conjunto no vacío X.

   (i) Muestre que la función e definida por $e(a,b) = \min\{1, d(a,b)\}$ donde$a, b \in X$, es también una métrica sobre X.

   (ii) Demuestre que d y e son métricas equivalentes.

   (iii) Un espacio métrico (X, d) se llama **acotado**, y d es llamada **métrica acotada**, si existe un número real positivo M tal que $d(x,y) < M$, para toda $x, y \in X$. Usando (ii) deduzca que toda métrica es equivalente a una métrica acotada.

3. (i) Sea d una métrica sobre un conjunto no vacío X. Muestre que la función e definida por

$$e(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}$$

donde $a, b \in X$, es también una métrica sobre X.

(ii) Demuestre que d y e son métricas equivalentes.

4. Sean d_1 y d_2 métricas sobre los conjuntos X y Y, respectivamente. Demuestre que

(i) d es una métrica sobre $X \times Y$, donde

$$d(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}.$$

(ii) e es una métrica sobre $X \times Y$, donde

$$e(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

(iii) d y e son métricas equivalentes.

5. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}$ la topología correspondiente sobre X. Fije $a \in X$. Demuestre que la función $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(a, x)$ es continua.

6. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}$ la topología inducida sobre X por d. Sean Y un subconjunto de X y d_1 la métrica sobre Y obtenida restringiendo d; es decir, $d_1(a, b) = d(a, b)$ para toda a y b en Y. Si $\mathcal{T}_1$ es la topología inducida sobre Y por d_1 y $\mathcal{T}_2$ es la topología del subespacio sobre Y (inducida por $\mathcal{T}$ sobre X), demuestre que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. [Ésto muestra que todo subespacio de un espacio metrizable es metrizable.]

7. (i) Sea ℓ_1 el conjunto de todas las secuencias de números reales

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

con la propiedad de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente. Si definimos

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

para toda x y y en ℓ_1, demuestre que (ℓ_1, d_1) es un espacio métrico.

(ii) Sea ℓ_2 el conjunto de todas las secuencias de números reales

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

con la propiedad de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ es convergente. Si definimos

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

para toda x y y in ℓ_2, demuestre que (ℓ_2, d_2) es un espacio métrico.

(iii) Sea ℓ_∞ denote el conjunto de las secuencias acotadas de números reales $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Si definimos

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

donde $x, y \in \ell_\infty$, demuestre que (ℓ_∞, d_∞) es un espacio métrico.

(iv) Sea c_0 el subconjunto de ℓ_∞ formado de todas las secuencias que convergen a cero y sea d_0 la métrica sobre c_0 que se obtiene restringiendo la métrica d_∞ sobre ℓ_∞ como en el Ejercicio 6. Demuestre que c_0 es un subconjunto cerrado de (ℓ_∞, d_∞).

(v) Demuestre que cada uno de los espacios (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), y (c_0, d_0) es un espacio separable.

(vi)* ¿Es (ℓ_∞, d_∞) un espacio separable?

(vii) Muestre que cada uno de los espacios métricos anteriores es un espacio vectorial normado de manera natural.

8. Sea f una función continua de un espacio metrizable $(X, \mathcal{T})$ sobre un espacio topológico $(Y, \mathcal{T}_1)$. ¿Es $(Y, \mathcal{T}_1)$ necesariamente metrizable? (Justifique su respuesta.)

9. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un textcolorred**espacio normal** si para cada par de conjuntos disjuntos cerrados A y B, existen conjuntos abiertos U y V tal que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$. Demuestre que

   (i) Todo espacio metrizable es un espacio normal.

   (ii) Todo espacio que es tanto un T_1-espacio como un espacio normal es un espacio de Hausdorff. [Un espacio normal que también es de Hausdorff es llamado un **T_4-espacio**.]

10. Sean (X, d) y (Y, d_1) espacios métricos. Entonces (X, d) se dice que es **isométrico** a (Y, d_1) si existe una función sobreyectiva $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ tal que para toda x_1 y x_2 en X,

$$d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2)).$$

Semejante función f se conoce como una **isometría**. Demuestre que toda isometría es un homeomorfismo de los espacios topológicos correspondientes. (Por lo que ¡espacios métricos isométricos son homeomorfos!)

11. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que satisface el **primer axioma de numerabilidad** o que es **primero numerable** si para cada $x \in X$ existe una familia numerable $\{U_i(x)\}$ de conjuntos abiertos que contienen x con la propiedad de que todo conjunto abierto V conteniendo x tiene (al menos) uno de los $U_i(x)$ como subconjunto. La familia numerable $\{U_i(x)\}$ se llama **base numerable** en x. Demuestre las aserciones siguientes:

    (i) Todo espacio metrizable satisface el primer axioma de numerabilidad.

    (ii) Todo espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad también satisface el primer axioma de numerabilidad.

12. Sea X el conjunto $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. Defina una función $f : \mathbb{R} \to X$ por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Además, defina una topología $\mathcal{T}$ sobre X de la manera siguiente:

$$\mathcal{T} = \{U : U \subseteq X \text{ y } f^{-1}(U) \text{ es abierto en la topología Euclidiana sobre } \mathbb{R}.\}$$

Demuestre las afirmaciones siguientes:

    (i) f es continua.

    (ii) Toda vecindad abierta de 1 en $(X, \mathcal{T})$ es de la forma $(U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$, donde U es abierto en $\mathbb{R}$.

    (iii) $(X, \mathcal{T})$ no es primero numerable.

    [Consejo. Suponga $(U_1 \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$, $(U_2 \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, \dots, (U_n \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, \dots$ es una base numerable en 1. Muestre que para cada número positivo n, podemos escoger $x_n \in U_n \setminus \mathbb{N}$ tal que $x_n > n$. Verifique que el conjunto $U = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ es abierto en $\mathbb{R}$. Deduzca que $V = (U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$ es una vecindad abierta de 1 que no contiene ninguno de los conjuntos $(U_n \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(X, \mathcal{T})$ no es primero numerable.]

(iv) $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff.

(v) Una imagen continua de $\mathbb{R}$ que es a la vez de Hausdorff no es necesariamente primera numerable.

13. Un subconjunto S de un espacio métrico (X, d) se llama **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en X, tal que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$; es decir, S puede ser cubierto por un número $\boxed{\text{finito}}$ de bolas abiertas de radio ε.

    (i) Muestre que todo espacio métrico totalmente acotado es un espacio métrico acotado. (Vea el Ejercicio 2 anterior.)

    (ii) Demuestre que $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana no es totalmente acotado, pero para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo cerrado $[a, b]$ es totalmente acotado.

    (iii) Sea (Y, d) un subespacio del espacio métrico (X, d_1) con la métrica inducida. Si (X, d_1) es totalmente acotado, entonces (Y, d) es totalmente acotado; es decir, todo subespacio de un espacio métrico totalmente acotado es totalmente acotado.
    [Consejo. Asuma $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. Si $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap Y$, entonces, por la desigualdad triangular, $B_\varepsilon(x_i) \subseteq B_{2\varepsilon}(y_i)$.]

    (iv) De (ii) y (iii) deduzca que el espacio métrico totalmente acotado $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ el cual no es totalmente acotado. Por consiguiente, "ser totalmente acotado" no es una propiedad topológica.

    (v) De (ii) y (iii) deduzca que para cada $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclidiana no es totalmente acotado.

    (vi) Notando que para cada $a, b \in \mathbb{R}$, el intervalo cerrado es totalmente acotado, muestre que un subespacio métrico de $\mathbb{R}$ es acotado si, y sólo si, es totalmente acotado.

    (vii) Muestre que para cada $n > 1$, un subespacio métrico de $\mathbb{R}^n$ es acotado si, y sólo si, es totalmente acotado.

14. Muestre que todo espacio métrico totalmente acotado es separable. (Vea el Ejercicio 13 anterior y los Ejercicios 3.2#4.)

15. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama **localmente Euclidiano** si existe un entero positivo n tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta que es homeomorfa a una bola abierta con centro en 0 en $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclidiana. Un espacio de Hausdorff que es localmente Euclidiano es llamado una **variedad topológica**[1].[2] [3]

    (i) Demuestre que todo intervalo no trivial (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ es localmente Euclidiano.

    (ii) Sea $\mathbb{T}$ el subconjunto del plano complejo que consiste de aquellos números complejos de módulo 1. Identifique el plano complejo con $\mathbb{R}^2$ y equipe $\mathbb{T}$ con la topología del subespacio. Muestre que el espacio $\mathbb{T}$ es localmente Euclidiano.

    (iii) Muestre que todo espacio topológico localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, para cada entero positivo n, es localmente Euclidiano. (Vea los Ejercicios 4.3 #9.)

    (iv)* Encuentre un ejemplo de un espacio localmente Euclidiano que no es una variedad topológica.

[1] *Nota del traductor:* Traducción de "topological manifold".

[2] En la literatura existen varias definiciones diferentes de variedad topológica (cf. Kunen and Vaughan [140]; Lee [143]). En particular, algunas definiciones requieren que el espacio sea conexo—lo que nosotros llamamos una **variedad conexa** —mientras definiciones más viejas requieren que el espacio sea metrizable. Un espacio de Hausdorff en el que cada punto tiene una vecindad abierta homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ o a el semi-espacio cerrado $\{< x_1, x_2, \dots, x_n >: x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ de $\mathbb{R}^n$, para algún entero positivo n, se conoce como **variedad topológica con borde**. Existe una bibliografía extensa sobre variedades con más estructura, especialmente **variedades diferenciables** (Barden and Thomas [19]; Gadea and Masque [85]), **variedades suaves** (Lee [144]), y **variedades de Riemann** o **variedades de Cauchy-Riemann** o **CR-variedades**.

[3] *Nota del traductor:* En español existe cierta confusión con el uso del término "variedad suave", el cual es una traducción del término "smooth manifold". El problema yace en que muchos autores en vez de usarlo prefieren usar variantes del término "variedad diferenciable" a usar el término "variedad suave". Por ejemplo, el término "variedad continuamente diferenciable" es usado frecuentemente como sinónimo de "variedad suave".

6.2 Convergencia de secuencias

Posiblemente Ud. está familiarizado con la noción de secuencia convergente de números reales. Ésta se define a continuación. Una secuencia $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de números reales se dice que **converge** al número real x, si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Es obvio como esta definición puede extenderse de $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana a cualquier espacio métrico.

6.2.1 Definiciones. Sean (X, d) un espacio métrico y $x_1, \dots, x_n, \dots$ una secuencia de puntos en X. Entonces una secuencia se dice que **converge a** $x \in X$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \varepsilon$. Ésto se denota por $x_n \to x$.
Una secuencia $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ de puntos (X, d) se llama **convergente** si existe un punto $y \in X$ tal que $y_n \to y$.

La proposición próxima se puede mostrar fácilmente, por lo que su demostración es dejada como ejercicio.

6.2.2 Proposición. Sea $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ununa secuencia de puntos en un espacio métrico (X, d). Además, sean x y y puntos en (X, d) tal que $x_n \to x$ y $x_n \to y$. Entonces $x = y$. $\square$

Convenientemente, decimos que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es cerrado (respectivamente, abierto) en el espacio métrico (X, d) si es cerrado (respectivamente, abierto) en la topología $\mathcal{T}$ inducida sobre X por la métrica d.

La proposición siguiente nos cuenta el sorprendente hecho de que la topología de un espacio métrico puede ser descrita completamente en términos de sus secuencias convergentes.

6.2.3 Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es cerrado en (X, d) si, y sólo si, toda secuencia convergente de puntos en A converge a un punto en A. (En otras palabras, A es cerrado en (X, d) si, y sólo si, $a_n \to x$, donde $x \in X$ y $a_n \in A$ para toda n, implica que $x \in A$.)

Demostración. Asuma que A es cerrado en (X, d) y sea $a_n \to x$, donde $a_n \in A$ para todos los enteros positivos n. Suponga que $x \in X \setminus A$. Entonces, como $X \setminus A$ es un conjunto abierto que contiene x, existe una bola abierta $B_\varepsilon(x)$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Notando que cada $a_n \in A$, obtenemos que $d(x, a_n) > \varepsilon$ para cada n. Por consiguiente, la secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ no converge a x. Ésto es una contradicción. Por lo que $x \in A$, como se requería.

Por el contrario, Asuma que toda secuencia convergente de puntos en A converge a un punto de A. Suponga que $X \setminus A$ no es abierto. Entonces existe un punto $y \in X \setminus A$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. Para cada entero positivo n, sea x_n cualquier punto en $B_{1/n}(y) \cap A$. Entonces, afirmamos que $x_n \to y$. Para ver ésto, denote por ε cualquier número real positivo, y por n_0 cualquier entero mayor que $1/\varepsilon$. Entonces para que $n \geq n_0$,

$$x_n \in B_{1/n}(y) \subseteq B_{1/n_0}(y) \subseteq B_\varepsilon(y).$$

Por lo que $x_n \to y$ y, por nuestra suposición, $y \notin A$. Ésto es una contradicción, lo que implica que $X \setminus A$ es abierto, y por lo tanto que A es cerrado en (X, d). □

Habiendo visto que la topología de un espacio métrico puede ser descrita en términos de secuencias convergentes, no debe sorprendernos que las funciones continuas también pueden ser descritas de esta forma.

6.2.4 Proposición. Sean (X, d) y (Y, d_1) espacio métricos, y f una función de X en Y. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_1$ las topologías determinadas por d y d_1, respectivamente. Entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ es continua si, y sólo si, $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$; es decir, si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es una secuencia de puntos en (X, d) convergiendo a x, entonces la secuencia de puntos $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ en (Y, d_1) converge a $f(x)$.

Demostración. Asuma que $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Para verificar que f es continua es suficiente mostrar que la imagen inversa de todo conjunto cerrado en $(Y, \mathcal{T}_1)$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. Por lo que, sea A cerrado en $(Y, \mathcal{T}_1)$. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una secuencia de puntos en $f^{-1}(A)$ convergente a un punto $x \in X$. Como $x_n \to x$, tenemos que $f(x_n) \to f(x)$. Pero puesto que cada $f(x_n) \in A$, y A es cerrado, la Proposición 6.2.3 entonces implica que $f(x) \in A$. Consiguientemente, $x \in f^{-1}(A)$. Por lo que hemos mostrado que toda secuencia convergente de puntos de $f^{-1}(A)$ converge a un punto de $f^{-1}(A)$. Como consecuencia, $f^{-1}(A)$ es cerrado, y por consiguiente f es continua.

Por el contrario, sean f continua y $x_n \to x$. Sea ε cualquier número real positivo. Entonces la bola abierta $B_\varepsilon(f(x))$ es un conjunto abierto en $(Y, \mathcal{T}_1)$. Como f es continua, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ es un conjunto abierto en $(X, \mathcal{T})$ que contiene x. Por lo tanto, existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))).$$

Como $x_n \to x$, existe un entero positivo n_0 tal que para toda $n \geq n_0$, $x_n \in B_\delta(x)$. Como resultado,

$$f(x_n) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)), \text{ para toda } n \geq n_0.$$

Consiguientemente $f(x_n) \to f(x)$. □

El corolario que sigue se deduce fácilmente de la Proposición 6.2.4.

6.2.5 Corolario. Sean (X, d) y (Y, d_1) espacios métricos, f una función de X en Y, y $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_1$ las topologías determinadas por d y d_1, respectivamente. Entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ es continua si, y sólo si, para cada $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $d(x, x_0) < \delta$ implica que $d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. □

Ejercicios 6.2

1. Sean C$[0,1]$ y d como en el Ejemplo 6.1.5. Defina ununa secuencia de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ en $(\mathrm{C}[0,1], d)$ por

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in [0,1].$$

   Verifique que $f_n \to f_0$, donde $f_0(x) = 0$, para toda $x \in [0,1]$.

2. Sean (X, d) un espacio métrico y $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una secuencia tal que $x_n \to x$ y $x_n \to y$. Demuestre que $x = y$.

3. (i) Sean (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{T}$ la topología inducida sobre X, y $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

una secuencia de puntos en X. Demuestre que $x_n \to x$ si, y sólo si, para todo conjunto abierto $U \ni x$, existe un entero positivo n_0 tal que $x_n \in U$ para toda $n \geq n_0$.

(ii) Sean X un conjunto, y d y d_1 métricas equivalentes sobre X. Deduzca de (i) que si $x_n \to x$ en (X, d), entonces $x_n \to x$ en (X, d_1).

4. Escriba una demostración del Corolario 6.2.5.

5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una secuencia de puntos in X. Decimos que $x_n \to x$ si para cada conjunto abierto $U \ni x$ existe un entero positivo n_0, tal que $x_n \in U$ para toda $n \geq n_0$. Encuentre un ejemplo de un espacio topológico y una secuencia tal que $x_n \to x$ y $x_n \to y$, pero $x \neq y$.

6. (i) Sean (X, d) un espacio métrico y $x_n \to x$ donde cada $x_n \in X$ and $x \in X$. Sea A el subconjunto de X que consiste de x y todos los puntos x_n. Demuestre que A es cerrado en (X, d).

(ii) Deduzca de (i) que el conjunto $\{2\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

(iii) Verifique que el conjunto $\{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

7. (i) Sean $d_1, d_2, \ldots, d_m$ métricas sobre un conjunto X, y $a_1, a_2, \ldots, a_m$ números reales positivos. Demuestre que d es una mérica sobre X, donde d es definida por

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i d_i(x, y), \text{ para toda } x, y \in X.$$

(ii) Si $x \in X$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es una secuencia de puntos en X tal que $x_n \to x$ en cada espacio métrico (X, d_i), demuestre que $x_n \to x$ en el espacio métrico (X, d).

8. Sean X, Y, d_1, d_2 y d como en los Ejercicios 6.1 #4. Si $x_n \to x$ en (X, d_1) y $y_n \to y$ en (Y, d_2), demuestre que

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle \text{ en } (X \times Y, d).$$

9. Sean A y B conjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d). Defina

$$\rho(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

[$\rho(A, B)$ se conoce como la **distancia entre los conjuntos A y B.**]

(i) Si S es cualquier subconjunto no vacío de (X, d), demuestre que $\overline{S} = \{x : x \in X$ y $\rho(\{x\}, S) = 0\}$.

(ii) Si S es cualquier subconjunto no vacío de (X, d) entonces la función $f\colon (X, d) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \rho(\{x\}, S), \quad x \in X$$

es continua.

10. (i) Para cada entero positivo n, sea f_n una función continua de $[0, 1]$ en él mismo y sea $a \in [0, 1]$ tal que $f_n(a) = a$, para toda n. Además, sea f una función continua de $[0, 1]$ en él mismo. Si $f_n \to f$ en $(C[0, 1], d^*)$ donde d^* es la métrica del Ejemplo 6.1.6, demuestre que a es también un punto fijo de f.

(ii) Muestre que (i) sería falso si d^* fuera reemplazado por la métrica d del Ejemplo 6.1.5.

6.3 Completitud

6.3.1 Definición. Una secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de puntos en un espacio métrico (X, d) se llama **secuencia de Cauchy** si dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n_0, tal que para todos los enteros $m \geq n_0$ y $n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

6.3.2 Proposición. Sean (X, d) un espacio métrico y $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una secuencia de puntos en (X, d). Si existe un punto $a \in X$, tal que la secuencia converge a a, es decir, $x_n \to a$, entonces la secuencia es una secuencia de Cauchy.

Demostración. Sea ε un número real positivo cualquiera. Ponga $\delta = \varepsilon/2$. Como $x_n \to a$, existe un entero positivo n_0, tal que para toda $n > n_0$, $d(x_n, a) < \delta$.

Por lo que, sean $m > n_0$ y $n > n_0$. Entonces $d(x_n, a) < \delta$ y $d(x_m, a) < \delta$.

Por la desigualdad triangular para métricas,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \delta + \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto, la secuencia es ciertamente una secuencia de Cauchy. □

Ésto naturalmente nos conduce a pensar en la afirmación opuesta y preguntar si toda secuencia de Cauchy es una secuencia convergente. El ejemplo siguiente nos muestra que ésta no es cierta.

6.3.3 Ejemplo. Considere el espacio métrico (X, d), donde X es el intervalo abierto $(0, 1)$ y d es la métrica Euclidiana. Se ve claramente que la secuencia 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, $\dots$ es una secuencia de Cauchy pero ésta no converge a ningún punto en $(0, 1)$. □

6.3.4 Definición. Un espacio métrico (X, d) es llamado **completo** si toda secuencia de Cauchy en (X, d) converges a un punto en (X, d).

Del Ejemplo 6.3.3 vemos inmediatamente que el intervalo unitario (0,1) con la métrica Euclidiana no es un espacio métrico completo. Por otro lado, si X es un conjunto finito cualquiera y d es la métrica discreta sobre X, entonces evidentemente (X, d) es un espacio métrico completo.

Mostraremos que $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo. Primero necesitamos cierta preparación.

Como una forma de taquigrafía denotaremos la secuencia $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, por $\{x_n\}$.

6.3.5 Definición. Si $\{x_n\}$ es una secuencia cualquiera, entonces la secuencia $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ se llama **subsecuencia** si $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

6.3.6 Definiciones. Sea $\{x_n\}$ una secuencia en $\mathbb{R}$. Entonces $\{x_n\}$ se dice que es una **secuencia creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. La secuencia $\{x_n\}$ se dice que es una **secuencia decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Una secuencia que es o creciente o decreciente se dice que es **monótona**.

La mayoría de las secuencias, por supuesto, no son ni crecientes ni decrecientes. A continuación definimos el concepto de índice pico[4].

[4] *Nota del traductor:* Traducción de "peak point".

6.3.7 Definición. Sea $\{x_n\}$ una secuencia en $\mathbb{R}$. Entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ se conoce como un **índice pico** si $x_n \leq x_{n_0}$, para cada $n \geq n_0$.

6.3.8 Lema. Sea $\{x_n\}$ una secuencia en $\mathbb{R}$ cualquiera. Entonces $\{x_n\}$ tiene una subsecuencia monótona.

Demostración. Asuma primeramente que la secuencia $\{x_n\}$ tiene un número infinito de índices picos. Entonces, escoja una subsecuencia $\{x_{n_k}\}$, donde cada n_k es un índice pico. Ésto implica, en particular, que $x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$, para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir, $\{x_{n_k}\}$ es una subsecuencia decreciente de $\{x_n\}$, por lo que es a subsecuencia monótona.

Ahora asuma que solamente existe un número finito de índices picos. Por lo que existe un entero N, tal que no existen índices picos $n > N$. Escoja cualquier $n_1 > N$. Entonces n_1 no es un índice pico. por lo que existe un $n_2 > n_1$ con $x_{n_2} > x_{n_1}$. Ahora, $n_2 > N$ y por lo tanto no es un índice pico tampoco. Por consiguiente, existe un $n_3 > n_2$, con $x_{n_3} > x_{n_2}$. Continuando de esta manera (por inducción matemática), podemos producir una subsecuencia $\{x_{n_k}\}$ of $\{x_n\}$ con $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$, para toda $k \in \mathbb{N}$; es decir, $\{x_{n_k}\}$ es una subsecuencia creciente de $\{x_n\}$. Ésto completa la demostración del lema. $\square$

6.3.9 Proposición. Sea $\{x_n\}$ una secuencia monótona en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Entonces $\{x_n\}$ converge a un punto en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ es acotada.

Demostración. Recuerde que la noción de "conjunto acotado" fue definida en la Observación 3.3.1.

Claramente si $\{x_n\}$ es no acotada, entonces ésta no converge.

Asuma que $\{x_n\}$ es una secuencia creciente que es acotada. por el Axioma del Supremo, existe un supremo L del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si ε es un número real positivo cualquiera, entonces existe un entero positivo N tal que $d(x_N, L) < \varepsilon$; ciertamente, $x_N > L - \varepsilon$.

Pero como $\{x_n\}$ es una secuencia creciente y L is una cota superior, tenemos que

$$L - \varepsilon < x_n < L, \quad \text{for all } n > N.$$

es decir $x_n \to L$.

El caso en que $\{x_n\}$ es una secuencia decreciente que es acotada se demuestra de manera similar, completándose la demostración. $\square$

Como un corolario del Lema 6.3.8 y la Proposición 6.3.9, obtenemos lo siguiente:

6.3.10 Teorema. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda secuencia acotada en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana tiene una subsecuencia convergente. $\square$

Finalmente, podremos demostrar que $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo.

6.3.11 Corolario. El espacio métrico $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ cualquier secuencia de Cauchy en $(\mathbb{R}, d)$.

Si mostramos que esta secuencia de Cauchy converge en $\mathbb{R}$, habremos demostrado que el espacio métrico es completo. El primer paso será mostrar que esta secuencia es acotada.

Como $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy, existe un entero positivo N, tal que para cualesquiera $n \geq N$ y $m \geq N$, $d(x_n, x_m) < 1$; es decir, $|x_n - x_m| < 1$. Ponga $M = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| + 1$. Entonces $|x_n| < M$, pata todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, la secuencia $\{x_n\}$ es acotada.

Por lo tanto, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 6.3.10), esta secuencia tiene una subsecuencia convergente; es decir, existe una $a \in \mathbb{R}$ y una subsecuencia $\{x_{n_k}\}$ con $x_{n_k} \to a$.

Mostraremos que no solamente la subsecuencia converge a a, sino que también la secuencia $\{x_n\}$ misma converge a a.

Sea ε cualquier número real positivo. Como $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy, existe un entero positivo N_0 tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para toda } m \geq N_0 \text{ y } n \geq N_0.$$

Puesto que $x_{n_k} \to a$, existe un entero positivo N_1, tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para toda } n_k \geq N_1.$$

Como resultado, si escogemos $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$, combinando las dos desigualdades anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} |x_n - a| &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{for } n > N_2 \text{ and } n_k > N_2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Consiguientemente, $x_n \to a$, lo que completa la demostración del Corolario. □

6.3.12 Corolario. Para cada entero positivo m, el espacio métrico $\mathbb{R}^m$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo.

Demostración. Vea los Ejercicios 6.3#4. □

6.3.13 Proposición. Sean (X, d) un espacio métrico, Y un subconjunto de X, y d_1 la métrica inducida sobre Y por d.

(i) Si (X, d) es un espacio métrico completo y Y es un subespacio cerrado de (X, d), entonces (Y, d_1) es un espacio métrico completo.

(ii) Si (Y, d_1) es un espacio métrico completo, entonces Y es un subespacio cerrado de (X, d).

.

Demostración. Vea los Ejercicios 6.3#5. □

6.3.14 Observación. El Ejemplo 6.3.3 mostró que $(0, 1)$ con la métrica Euclidiana no es un espacio métrico completo. Sin embargo, el Corolario 6.3.11 mostró que $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo. Además, sabemos que los espacios topológicos $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Por lo que, la completitud no es una propiedad preservada por homeomorfismos, y por lo tanto, no es una propiedad topológica.

6.3.15 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **completamente metrizable** si existe una métrica d sobre X tal que $\mathcal{T}$ es la topología sobre X determinada por d, y (X, d) es un espacio métrico completo.

6.3.16 Observación. Note que ser completamente metrizable es ciertamente una propiedad topológica. Además, es fácil verificar (vea los Ejercicios 6.3#7) que todo espacio discreto y todo intervalo de $\mathbb{R}$ con la topología inducida es completamente metrizable. Por lo que, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, los espacios topológicos $\mathbb{R}$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, y $\{a\}$ con sus topologías inducidas son todos completamente metrizables. Veremos más adelante que incluso el espacio $\mathbb{P}$ de todos los números irracionales con su topología inducida es completamente metrizable, un hecho un tanto sorprendente. Asimismo, como $(0, 1)$ es un subespacio completamente metrizable de $\mathbb{R}$ que no es un subconjunto cerrado, vemos que la Proposición 6.3.13(ii) no sería verdadera si la condición de "espacio métrico completo" fuera reemplazada por la de "espacio completamente metrizable". $\square$

6.3.17 Definición. Un espacio topológico se dice que es **separable** si éste tiene un subconjunto denso numerable.

Vimos en los Ejercicios 3.2#4 que $\mathbb{R}$ y todo espacio topológico numerable es un espacio separable. Otros ejemplos son dados en los Ejercicios 6.1#7.

6.3.18 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **espacio polaco** si éste es separable y completamente metrizable.

Está claro que $\mathbb{R}$ es un espacio polaco. Por los Ejercicios 6.3#6, $\mathbb{R}^n$ es un espacio polaco, para cada entero positivo n.

6.3.19 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **espacio de Souslin** si éste es un espacio de Hausdorff y es una imagen continua de un espacio polaco. Si A es un subconjunto de un espacio topológico $(Y, \mathcal{T}_1)$ tal que, con la topología inducida $\mathcal{T}_2$, el espacio $(A, \mathcal{T}_2)$ es un espacio de Souslin, entonces A se dice que es un **conjunto analítico** en $(Y, \mathcal{T}_1)$.

Claramente, todo espacio polaco es un espacio de Souslin. Los Ejercicios 6.1#12 y #11 muestran que lo contrario es falso, puesto que un espacio de Souslin no necesita ser metrizable.

Sin embargo, veremos que un espacio metrizable de Souslin no es necesariamente un espacio polaco. Para ver ésto notemos que todo espacio topológico numerable es un espacio de Souslin, ya que es una imagen continua del espacio discreto $\mathbb{N}$; un espacio de este tipo es el espacio metrizable $\mathbb{Q}$, el cual, como veremos en el Ejemplo 6.5.8, no es un espacio polaco.

Sabemos que dos espacios topológicos son equivalentes si ellos son homeomorfos. Por lo que es natural preguntar ¿cuándo son dos espacios métricos equivalentes (como espacio métricos)? El concepto relevante fue introducido en los Ejercicios 6.1#10, a saber, el de ser isométrico.

6.3.20 Definición. Sean (X, d) y (Y, d_1) espacios métricos. Entonces (X, d) se dice que es **isométrico** a (Y, d_1) si existe una función sobreyectiva $f : X \to Y$ tal que para toda x_1 y x_2 en X, $d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$. Semejante función f se conoce como una **isometría**.

Sean d cualquier métrica sobre $\mathbb{R}$ y a cualquier número real positivo. Si d_1 es definida por $d_1(x, y) = a.d(x, y)$, para toda $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se puede ver fácilmente que $(\mathbb{R}, d_1)$ es un espacio métrico isométrico a $(\mathbb{R}, d)$.

También se puede verificar fácilmente que cualesquiera dos espacios métricos que son isométricos tienen sus espacios topológicos asociados homeomorfos, y que toda isometría es también un homeomorfismo de los espacios topológicos asociados.

A continuación definimos el concepto de inmersión isométrica[5].

6.3.21 Definición. Sean (X, d) y (Y, d_1) espacios métricos, y f una función de X en Y. Sean $Z = f(X)$, y d_2 la métrica inducida sobre Z por d_1. Si $f : (X, d) \to (Z, d_2)$ es una isometría, entonces f se dice que es una **inmersión isométrica** de (X, d) en (Y, d_1).

Por supuesto, la inmersión natural de $\mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es una inmersión isométrica. También es cierto que $\mathbb{N}$ con la métrica Euclidiana tiene una inmersión isométrica natural en tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana.

[5] *Nota del traductor:* Traducción de "isometric embedding".

6.3.22 Definición. Sean (X,d) y (Y,d_1) espacios métricos, y f una función de X en Y. Si (Y,d_1) es un espacio métrico completo, $f:(X,d)\to(Y,d_1)$ es una inmersión isométrica y $f(X)$ es un subconjunto denso de Y en el espacio topológico asociado, entonces (Y,d_1) se dice que es una **terminación** of (X,d).

Claramente, $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es una terminación de $\mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana. Asimismo, $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es una terminación de $\mathbb{P}$, el conjunto de números irracionales, con la métrica Euclidiana.

Inmediatamente dos preguntas nos saltan a la mente: (1) ¿Tiene todo espacio métrico una terminación? (2) ¿Es la terminación de un espacio métrico única de alguna manera? Veremos que la repuesta a ambas preguntas es "sí".

6.3.23 Proposición. Sea (X,d) un espacio métrico cualquiera. Entonces (X,d) tiene una terminación.

Idea de la demostración. Comenzamos diciendo que dos secuencias de Cauchy $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ en (X,d) son equivalentes si $d(y_n,z_n)\to 0$ en $\mathbb{R}$. Ésto es ciertamente una relación de equivalencia; es decir, ésta es reflexiva, simétrica y transitiva. Ahora, sea $\widetilde{X}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de secuencias de Cauchy equivalentes en (X,d). Deseamos encontrar una mérica sobre $\widetilde{X}$.

Sean $\tilde{y}$ y $\tilde{z}$ dos puntos cualesquiera en $\widetilde{X}$. Sean $\{y_n\}\in\tilde{y}$ y $\{z_n\}\in\tilde{z}$ secuencias de Cauchy. Ahora, la secuencia $\{d(y_n,z_n)\}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}$. (Vea los Ejercicios 6.3#8.) Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, esta secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge a algún número, lo cual denotaremos por $d_1(\tilde{y},\tilde{z})$. Es sencillo mostrar que $d_1(\tilde{y},\tilde{z})$ no es dependiente de la selección de la secuencia $\{y_n\}$ en $\tilde{y}$ y $\{z_n\}$ in $\tilde{z}$.

Para cada $x\in X$, la secuencia constante $x,x,\dots,x,\dots$ es una secuencia de Cauchy en (X,d) convergiendo a x. Denotemos por $\tilde{x}$ la clase de equivalencia de todas las secuencias de Cauchy convergiendo a $x\in X$. Defina el subconjunto Y de $\widetilde{X}$ como $\{\tilde{x}:x\in X\}$. Si d_2 es la métrica sobre Y inducida por la métrica d_1 sobre $\widetilde{X}$, entonces es claro que la función $f:(X,d)\to(Y,d_2)$, dada por $f(x)=\tilde{x}$, es una isometría.

A continuación mostramos que Y es denso en $\widetilde{X}$. Para hacer ésto mostramos que, para cualquier número real $\varepsilon>0$ dado y cualquier $z\in\widetilde{X}$, existe un $\tilde{x}\in Y$, tal que $d_1(z,\tilde{x})<\varepsilon$.

Note que z es una de clase de equivalencia de secuencias de Cauchy. Sea $\{x_n\}$ una secuencia de Cauchy en esta clase de equivalencia z. Existe un entero positivo n_0, tal que para cada $n > n_0$, $d_1(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Ahora consideremos la secuencia constante $x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots, x_{n_0}, \ldots$. Ésta pertenece a la clase de equivalencia $\widetilde{x_{n_0}}$, la cual está en Y. Además, $d_1(\widetilde{x_{n_0}}, z) < \varepsilon$. Por lo que Y es ciertamente denso en $\widetilde{X}$.

Finalmente, mostramos que $(\widetilde{X}, d_1)$ es un espacio métrico completo. Sea $\{z_n\}$ una secuencia de Cauchy en este espacio. Se requiere demostrar que $\{z_n\}$ converge en $\widetilde{X}$. Como Y es denso, para cada entero positivo n, existe $\widetilde{x_n} \in Y$, tal que $d_1(\widetilde{x_n}, z_n) < 1/n$. Mostramos que $\{\widetilde{x_n}\}$ es una secuencia de Cauchy en Y.

Considere un número real $\varepsilon > 0$. Existe un entero positivo N, tal que $d_1(z_n, z_m) < \varepsilon/2$ para $n, m > N$. Ahora tome un entero positivo n_1, con $1/n_1 < \varepsilon/4$. Para $n, m > n_1 + N$, tenemos

$$d_1(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) < d_1(\widetilde{x_n}, z_n) + d_1(z_n, z_m) + d_1(z_m, \widetilde{x_m}) < 1/n + \varepsilon/2 + 1/m < \varepsilon.$$

Por lo que $\{\widetilde{x_n}\}$ es una secuencia de Cauchy in Y. Ésto implica que $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy en (X, d). Por consiguiente, $\{x_n\} \in z$, para algún $z \in \widetilde{X}$. Es sencillo probar que $\widetilde{x_n} \to z$, y luego que $z_n \to z$, lo que completa la demostración. $\square$

6.3.24 Proposición. Sean (A, d_1) y (B, d_2) espacios métricos completos. Sean X un subconjunto de (A, d_1) con la métrica inducida d_3, y Y un subconjunto de (B, d_2) con la métrica inducida d_4. Asimismo, sean X denso en (A, d_1) y Y denso en (B, d_2). Si existe una isometría $f : (X, d_3) \to (Y, d_4)$, entonces existe una isometría $g : (A, d_1) \to (B, d_2)$, tal que $g(x) = f(x)$, para toda $x \in X$.

Idea de la demostración. Sea $a \in A$. Como X es denso en (A, d_1), existe un secuencia $x_n \to a$, donde cada $x_n \in X$. Por lo que $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy. Como f es una isometría, $\{f(x_n)\}$ es una secuencia de Cauchy en (Y, d_4), y por consiguiente, es también una secuencia de Cauchy en (B, d_2). Como (B, d_2) es un espacio métrico completo, existe un $b \in B$, tal que $f(x_n) \to b$. Por lo que definimos $g(a) = b$.

Para mostrar que g es una función bien definida de A en B, es necesario verificar que si $\{z_n\}$ es cualquier otra secuencia en X convergiendo a a, entonces $f(z_n) \to b$. Ésto se sigue del hecho de que $d_1(x_n, z_n) \to 0$, y por lo tanto, $d_2(f(x_n), f(z_n)) = d_4(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

A continuación se necesita demostrar que $g : A \to B$ es inyectiva y sobreyectiva. Ésto es dejado como un ejercicio, pues es bastante rutinario.

Finalmente, sean $a_1, a_2 \in A$, y $a_{1n} \to a_1$ y $a_{2n} \to a_2$, donde cada a_{1n} y cada a_{2n} está en X. Entonces

$$d_1(a_1, a_2) = \lim_{n\to\infty} d_3(a_{1n}, a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} d_4(f(a_{1n}), f(a_{2n})) = d_2(g(a_1), g(a_2))$$

y por lo tanto, g es ciertamente una isometría, como se requería. □

La Proposición 6.3.24 nos dice que, salvo isometrías, la terminación de un espacio métricos es única.

Concluimos esta sección con otro concepto. Recuerde que en el Ejemplo 6.1.9 introdujimos el concepto de espacio vectorial normado. Ahora definimos una clase muy importante de espacios vectoriales normados.

6.3.25 Definición. Sean $(N, ||\ \ ||)$ un espacio vectorial normado y d la métrica asociada sobre el conjunto N. Entonces $(N, ||\ \ ||)$ se dice que es un **espacio de Banach** si (N, d) es un espacio métrico completo.

De la Proposición 6.3.23 sabemos que todo espacio vectorial normado tiene una terminación. Sin embargo, lo que es bastante placentero es que esta terminación es también un espacio vectorial normado, y por lo tanto, es un espacio de Banach. (Vea los Ejercicios 6.3#12.)

Ejercicios 6.3

1. Verifique que la secuencia $\{x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana. [Esta secuencia no converge en $\mathbb{Q}$. En $\mathbb{R}$ ella converge al número e, el cual se sabe que es irracional. Para una demostración de que e es irracional, de hecho es transcendental, vea Jones et al. [129].]

2. Demuestre que toda subsecuencia de una secuencia de Cauchy es una secuencia de Cauchy.

3. Dé un ejemplo de una secuencia en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana que no tenga ninguna subsecuencia que sea una secuencia de Cauchy.

4. Usando el Corolario 6.3.11, demuestre que, para cada entero positivo m, el espacio métrico $\mathbb{R}^m$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo.

   [Consejo. Sea $\{< x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn} >: n = 1, 2, \dots\}$ una secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}^m$. Demuestre que, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, la secuencia $\{x_{in} : n = 1, 2, \dots\}$ en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es una secuencia de Cauchy y por lo tanto converge a un punto a_i. Luego, muestre que la secuencia $\{< x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn} >: n = 1, 2, \dots\}$ converge al punto $< a_1, a_2, \dots, a_m >$.]

5. Demuestre que todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo y que todo subespacio métrico completo de un espacio métrico es cerrado.

6. Demuestre que para cada entero positivo n, $\mathbb{R}^n$ es un espacio polaco.

7. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Demuestre que cada espacio discreto y cada uno de los espacios $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, y $\{a\}$, con su topología inducida es un espacio polaco.

8. Si (X, d) es un espacio métrico, y $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son secuencias de Cauchy, demuestre que $\{d(x_n, y_n)\}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}$.

9. Complete los detalles que faltan en la demostración de la Proposición 6.3.23.

10. Complete los detalles que faltan en la demostración de la Proposición 6.3.24.

11*. Muestre que cada uno de los espacios (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), (c_0, d_0), y (ℓ_∞, d_∞) de los Ejercicios 6.1#7 es un espacio métrico completo. Es más, muestre que cada uno de estos espacios es un espacio de Banach de manera natural.

12*. Sea X cualquier espacio vectorial normado. Demuestre que es posible poner la estructura de un espacio vectorial normado sobre $\widetilde{X}$, el espacio métrico completo construido en la Proposición 6.3.23. Por lo que todo espacio vectorial normado tiene una terminación que es un espacio de Banach.

13. Sean (X, d) un espacio métrico y S un subconjunto de X. Entonces el conjunto S se dice que es **acotado** si existe un entero positivo M tal que $d(x, y) < M$, para toda $x, y \in S$.

   (i) Muestre que si S es un subconjunto acotado en (X, d) y $S = X$, entonces (X, d) es un espacio métrico acotado. (Vea los Ejercicios 6.1# 2.)

   (ii) Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ una secuencia convergente en un espacio métrico (X, d). Si el conjunto S consiste de los puntos (distintos) en esta secuencia, muestre que S es un subconjunto acotado.

   (iii) Sea $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ una secuencia de Cauchy en un espacio métrico completo (X, d). Si T es el conjunto de puntos en esta secuencia, muestre que T es un subconjunto acotado.

   (iv) ¿Es el inciso (iii) anterior aún cierto si no insistimos en que (X, d) sea completo?

14. Demuestre que un espacio métrico (X, d) es separable si, y sólo si, el espacio topológico asociado $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad. (Vea los Ejercicios 2.2 #4.)

15. Deduzca del Ejercicio 14 anterior que si (X, d) es un espacio métrico separable, y d_1 es la métrica inducida sobre un subconjunto Y de X por d, entonces (Y, d_1) es separable; en otras palabras todo subespacio de un espacio métrico separable es separable. (Debe notarse que no es necesariamente cierto que un subespacio de un espacio topológico separable es separable.)

6.4 Contracciones

En el Capítulo 5 nos encontramos por primera vez con un teorema de punto fijo. En esta sección descubriremos otro tipo de teorema de punto fijo. Esta sección es más bien parte de la teoría de espacios métricos en vez de topología general. No obstante, debido al gran número de aplicaciones del tema, decidimos abordarlo en el libro.

6.4.1 Definición. Sea f una función de un conjunto X en el mismo. Entonces un punto $x \in X$ se dice que es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.

6.4.2 Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y f una función de X en el mismo. Entonces f se dice que es una **contracción** si existe un $r \in (0,1)$, tal que

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq r.d(x_1, x_2), \quad \text{para toda } x_1, x_2 \in X.$$

6.4.3 Proposición. Sea f una contracción del espacio métrico (X, d). Entonces f es una función continua.

Demostración. Vea los Ejercicios 6.4#1. □

6.4.4 Teorema. (Teorema de la Contracción o Teorema del Punto Fijo de Banach) Sean (X, d) un espacio métrico completo y f una contracción de (X, d) en el mismo. Entonces f tiene exactamente un punto fijo.

Demostración. Sea x un punto cualquiera en X, y considere la secuencia

$$x,\ f(x),\ f^2(x) = f(f(x)),\ f^3(x) = f(f(f(x))),\ \ldots,\ f^n(x), \ldots.$$

Mostraremos que ésta es una secuencia de Cauchy. Ponga $a = d(x, f(x))$. Como f es una contracción, existe $r \in (0,1)$, tal que $d(f(x_1), f(x_2)) \leq r.d(x_1, x_2)$, para toda $x_1, x_2 \in X$.

Claramente, $d(f(x), f^2(x)) \leq r.d(x, f(x)) = r.a$, $d(f^2(x), f^3(x)) \leq r^2.d(x, f(x)) = r^2.a$, y por inducción obtenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq r^k.d(x, f(x)) = r^k.a$.

Sean m y n enteros positivos cualesquiera, con $n > m$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(f^m(x), f^n(x)) &= d(f^m(x), f^m(f^{n-m}(x))) \\
&\leq r^m.d(x, f^{n-m}(x)) \\
&\leq r^m.[d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \cdots + d(f^{n-m-1}(x), f^{n-m}(x))] \\
&\leq r^m.d(x, f(x))[1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-m-1}] \\
&\leq \frac{r^m.a}{1-r}.
\end{aligned}$$

Como $r < 1$, está claro que $\{f^n(x)\}$ es una secuencia de Cauchy. Puesto que (X, d) es completo, existe un $z \in X$, tal que $f^n(x) \to z$.

Por la Proposición 6.4.3, f es continua, y por lo tanto

$$f(z) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = z \tag{6.1}$$

lo que implica que z es ciertamente un punto fijo de f.

Finalmente, sea t cualquier otro punto fijo de f. Entonces

$$d(t, z) = d(f(t), f(z)) \leq r.d(t, z). \tag{6.2}$$

Como $r < 1$, ésto implica que $d(t, z) = 0$, y por consiguiente $t = z$ y f tiene un único punto fijo.$\square$

Es importante mencionar que el Teorema de la Contracción no sólo brinda una demostración sobre la existencia de un punto fijo, sino que además provee una construcción para encontrarlo; a saber, para un punto cualquiera x en X, encuentre el límite de la secuencia $\{f^n(x)\}$. Éste método nos permite escribir un programa de computación para aproximar el punto límite con cualquier grado de precisión.

Ejercicios 6.4

1. Demuestre la Proposición 6.4.3.

2. Extienda el Teorema de la Contracción mostrando que, si f es una función de un espacio métrico completo (X, d) en el mismo y f^N es una contracción para algún entero positivo N, entonces f tiene exactamente un punto fijo.

3. El Teorema del Valor Intermedio dice: Sea f una función de valor real sobre un intervalo unitario cerrado $[a, b]$ que es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b). Entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. (Recuerde que f se dice que es **diferenciable** en un punto s si el $\lim\limits_{x\to s} \frac{f(x)-f(s)}{x-s} = f'(s)$ existe.)

   Usando el Teorema del Valor Intermedio demuestre lo siguiente:

   Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función diferenciable. Entonces f es una contracción si, y sólo si, existe $r \in (0, 1)$ tal que $|f'(x)| \leq r$, para toda $x \in [a, b]$.

4. Usando los Ejercicios 2 y 3 anteriores, muestre que, aunque la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$ no satisface las condiciones del Teorema de la Contracción, ésta, así y todo, tiene un único punto fijo.

6.5 Espacios de Baire

6.5.1 Teorema. (Teorema de la Categoría de Baire) Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ es una secuencia de subconjuntos abiertos densos de X, entonces el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es también denso en X.

Demostración. Es suficiente mostrar que si U es cualquier subconjunto abierto de (X, d), entonces $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

Como X_1 es abierto y denso en X, el conjunto $U \cap X_1$ es un subconjunto abierto no vacío de (X, d). Sea U_1 una bola abierta de radio a lo sumo 1, tal que $\overline{U_1} \subset U \cap X_1$.

Inductivamente defina, para cada entero positivo $n > 1$, una bola abierta U_n de radio a lo sumo $1/n$ tal que $\overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap X_n$.

Para cada entero positivo n, sea x_n cualquier punto en U_n. Claramente, esta secuencia $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy. Como (X, d) es un espacio métrico completo, dicha secuencia converge a un punto $x \in X$.

Observe que para todo entero positivo m, todo miembro de la secuencia $\{x_n\}$ está en el conjunto cerrado $\overline{U}_m$, y por lo tanto el punto límite x también pertenece al conjunto $\overline{U}_m$.

Entonces $x \in \overline{U_n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Consiguientemente, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$.

Pero como $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \ni x$, tenemos que $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$, lo que completa la demostración del teorema. $\square$

En los Ejercicios 3.2 #5 introdujimos la noción de interior de un subconjunto de un espacio topológico.

6.5.2 Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera y A cualquier subconjunto de X. El más grande conjunto abierto contenido en A es llamado **interior** de A y es denotado por $\text{Int}(A)$.

6.5.3 Definición. Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **denso en ninguna parte** si el conjunto $\overline{A}$ tiene un interior vacío.

Estas definiciones nos permiten reescribir el Teorema 6.5.1.

6.5.4 Corolario. (Teorema de la Categoría de Baire) Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ es una secuencia de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces para al menos un $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\overline{X_n}$ tiene un interior no vacío; es decir, X_n no es denso en ninguna parte.

Demostración. Vea los Ejercicios 6.5 #2. $\square$

6.5.5 Definición. Un espacio topológico (X, d) se dice que es un **espacio de Baire** si para toda secuencia $\{X_n\}$ de subconjunto abiertos densos de X, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es también denso en X.

6.5.6 Corolario. Todo espacio metrizable completo es un espacio de Baire. $\square$

6.5.7 Observaciones. Es importante notar que el Corolario 6.5.6 es un resultado en topología, y no un resultado en la teoría de espacios métricos.

Note además que existen espacios de Baire que no son completamente metrizables. (Vea los Ejercicios 6.5 #4(iv).) $\square$

6.5.8 Ejemplo. El espacio topológico $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire, y por lo tanto no es completamente metrizable. Para ver ésto, note que el conjunto de los números racionales es numerable, y sea
$\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Cada uno de los conjuntos $X_n = \mathbb{Q} \setminus \{x_n\}$ es abierto y denso en $\mathbb{Q}$, sin embargo $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Por consiguiente, $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire. $\square$

6.5.9 Observación. Debe notar que (una vez que tuvimos el Teorema de la Categoría de Baire) es más difícil demostrar que $\mathbb{Q}$ no es completamente metrizable que el resultado más general de que $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire.

Una característica sorprendente e importante no sólo de la topología, sino de las matemáticas en general, es el hecho de que un resultado más general es a veces más fácil de demostrar. $\square$

6.5.10 Definiciones. Sea Y un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Si Y es una unión de un número numerable de subconjunto densos en ninguna parte de X, entonces Y se dice que es un conjunto de **primera categoría** o un **conjunto magro** en $(X, \mathcal{T})$. Si Y no es de primera categoría, se dice que Y es un conjunto de **segunda categoría** en $(X, \mathcal{T})$.

El Teorema de la Categoría de Baire tiene muchas aplicaciones en análisis, pero éstas yacen fuera del ámbito de este libro. Sin embargo, concluiremos esta sección con un teorema muy importante en la teoría de los espacios de Banach, a saber, el Teorema de la Función Abierta. Este teorema es una consecuencia del Teorema de la Categoría de Baire.

6.5.11 Proposición. Si Y es un subconjunto de primera categoría de un espacio de Baire $(X, \mathcal{T})$, entonces el interior de Y es vacío.

Demostración. Como Y es de primera categoría, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, donde cada Y_n, con $n \in \mathbb{N}$, es denso en ninguna parte.

Sea $U \in \mathcal{T}$ tal que $U \subseteq Y$. Entonces $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}$.

Por lo que $X \setminus U \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{Y_n})$, y cada uno de los conjuntos $X \setminus \overline{Y_n}$ es abierto y denso en $(X, \mathcal{T})$. Como $(X, \mathcal{T})$ es de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{Y_n})$ es denso en $(X, \mathcal{T})$. Como consecuencia, el conjunto cerrado $X \setminus U$ es denso en $(X, \mathcal{T})$. Ésto implica que $X \setminus U = X$. Por consiguiente, $U = \emptyset$. Ésto completa la demostración. $\square$

6.5.12 Corolario. Si Y es un subconjunto de primera categoría de un espacio de Baire $(X, \mathcal{T})$, entonces $X \setminus Y$ es un conjunto de segunda categoría.

Demostración. Si éste no fuera el caso, entonces el espacio de Baire $(X, \mathcal{T})$ sería una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. $\square$

6.5.13 Observación. Como $\mathbb{Q}$ es un subconjunto de primera categoría de $\mathbb{R}$, se sigue del Corolario 6.5.12 que el conjunto $\mathbb{P}$ de los números irracionales es un conjunto de segunda categoría. $\square$

6.5.14 Definición. Sea S un subconjunto de un espacio vectorial real V. El conjunto S se dice que es **convexo** si para cada $x, y \in S$ y todo número real $0 < \lambda < 1$, el punto $\lambda x + (1 - \lambda)y$ está en S.

Claramente todo subespacio de un espacio vectorial es convexo. Además, en cualquier espacio vectorial normado, toda bola abierta y toda bola cerrada es convexa.

6.5.15 Teorema. (Teorema de la Función Abierta) Sean $(B, || \ ||)$ y $((B_1, || \ ||_1)$ espacios de Banach, y sea $L : B \to B_1$ una función lineal (en el sentido del espacio vectorial), continua y sobreyectiva de B en B_1. Entonces L es una función abierta.

Demostración. Por los Ejercicios 6.5#1(iv), es suficiente mostrar que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $L(B_N(0)) \supset B_s(0)$, para algún $s > 0$.

Claramente $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(0)$, y como L es sobreyectiva, tenemos que $B_1 = L(B) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L(B_n(0))$.

Como B_1 es un espacio de Banach, por el Corolario 6.5.4 del Teorema de la Categoría de Baire, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que $\overline{L(B_N(0))}$ tiene un interior no vacío.

Por lo que existen $z \in B_1$ y $t > 0$, tal que $B_t(z)) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

Por los Ejercicios 6.5#3, no existe pérdida de generalidad en asumir que $z \in L(B_N(0))$.

Pero $B_t(z) = B_t(0) + z$, y por lo tanto

$$B_t(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} - z = \overline{L(B_N(0)) - z} \subseteq \overline{L(B_N(0)) - L(B_N(0))} \subseteq \overline{L(B_{2N}(0))}.$$

lo cual, por la linealidad de L, implica que $B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

Mostraremos que ésto implica que $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$.

Sea $w \in B_{t/2}(0)$. Entonces existe un $x_1 \in B_N(0)$, tal que $||w - L(x_1)||_1 < \frac{t}{4}$.

Note que, por la linealidad de la función L, para cada entero $k > 0$

$$B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} \Longrightarrow B_{t/(2k)}(0) \subseteq \overline{L(B_{N/k}(0))}.$$

Por lo que existe un $x_2 \in B_{N/2}(0)$, tal que

$$||(w - L(x_1)) - L(x_2)||_1 = ||w - L(x_1) - L(x_2)||_1 < \frac{t}{8}.$$

Continuando de esta manera, obtenemos, por inducción, una secuencia $\{x_m\}$ tal que $||x_m|| < \frac{N}{2^{m-1}}$ y

$$||w - L(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)||_1 = ||w - L(x_1) - L(x_2) - \cdots - L(x_m)||_1 < \frac{t}{2^m}.$$

Puesto que B es completo, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ converge al límite a.

Claramente $||a|| < 2N$, y por la continuidad de L, tenemos que $w = L(a) \in L(B_{2N}(0))$.

Como resultado $B_{t/2}(0) \subseteq L(B_{2N}(0))$, y por consiguiente $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$, lo que completa la demostración. □

El corolario siguiente del Teorema de la Función Abierta se sigue inmediatamente y es un caso especial muy importante.

6.5.16 Corolario. Una función lineal, continua y biyectiva de un espacio de Banach en otro espacio de Banach es un homeomorfismo. En particular, una función lineal, continua y biyectiva de un espacio de Banach en el mismo es un homeomorfismo. □

Ejercicios 6.5

1. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos. Una función $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ se dice que es una **función abierta** si para todo subconjunto abierto A de $(X, \mathcal{T})$, el conjunto $f(A)$ es abierto en $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(i) Muestre que f es an función abierta si, y sólo si, para cada $U \in \tau$ y cada $x \in U$, el conjunto $f(U)$ es una vecindad de $f(x)$.

(ii) Sean (X, d) y (Y, d_1) espacios métricos, y f una función de X en Y. Demuestre que f es una función abierta si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, $f(B_{1/n}(x)) \supseteq B_r(f(x))$, para alguna $r > 0$.

(iii) Sean $(N, || \ ||)$ y $(N_1, || \ ||_1)$ espacios vectoriales normados, y f una función lineal de N en N_1. Demuestre que f es una función abierta si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(B_{1/n}(0)) \supseteq B_r(0)$, para alguna $r > 0$.

(iv) Sean $(N, || \ ||)$ y $(N_1, || \ ||_1)$ espacios vectoriales normados, y f una función lineal de N en N_1. Demuestre que f es una función abierta si, y sólo si, existe un $s > 0$ tal que $f(B_s(0)) \supseteq B_r(0)$, para alguna $r > 0$.

2. Usando el Teorema de la Categoría de Baire, demuestre el Corolario 6.5.4.

3. Sea A un subconjunto de un espacio de Banach B. Demuestre que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

   (i) el conjunto $\overline{A}$ tiene un interior no vacío;

   (ii) existen un $z \in \overline{A}$ y un $t > 0$ tal que $B_t(z) \subseteq \overline{A}$;

   (ii) existen un $y \in A$ y un $r > 0$ tal que $B_r(y) \subseteq \overline{A}$.

4. Un punto x en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **punto aislado** si $\{x\} \in \mathcal{T}$. Demuestre que si $(X, \mathcal{T})$ es un T_1-espacio numerable sin puntos aislados, entonces éste no es un espacio de Baire.

5. (i) Usando la versión del Teorema de la Categoría de Baire del Corolario 6.5.4, demuestre que $\mathbb{P}$ no es

   un F_σ-conjunto y que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ-conjunto en $\mathbb{R}$.

   [Consejo. Suponga que $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde cada F_n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Entonces aplique el Corolario 6.5.4 a $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.]

   (ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de $\mathbb{R}$ en el mismo. Entonces f se dice que es **continua en un punto** $a \in \mathbb{R}$ si para cada conjunto abierto U que contiene $f(a)$, existe un conjunto abierto V que contiene a tal que $f(V) \subseteq U$. Demuestre que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}$ en el cual f es continua es un G_δ-conjunto.

   (iii) Deduzca de (i) y (ii) que no existe función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua precisamente en el conjunto de todos los números racionales.

6. (i) Sean $(X, \mathcal{T})$ cualquier espacio topológico, y Y y S subconjuntos densos de X. Si S es además abierto en $(X, \mathcal{T})$, demuestre que $S \cap Y$ es denso tanto en X como en Y.

   (ii) Sea $\mathcal{T}_1$ la topología inducida sobre Y por $\mathcal{T}$ sobre X. Sea $\{X_n\}$ una secuencia de subconjunto densos abiertos de Y. Usando (i), muestre que $\{X_n \cap Y\}$ es una secuencia de subconjuntos densos abiertos de $(Y, \mathcal{T}_1)$.

   (iii) Deduzca de la Definición 6.5.5 y del inciso (ii) anterior, que si $(Y, \mathcal{T}_1)$ es un espacio de Baire, entonces $(X, \mathcal{T})$ es también un espacio de Baire. [Por lo que la clausura de un espacio de Baire es un espacio de Baire.]

(iv) Usando (iii), muestre que el subespacio $(Z, \mathcal{T}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\} \cup \{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{Q}\},$$

es un espacio de Baire, pero no es completamente metrizable, puesto que el subespacio cerrado $\{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{Q}\}$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ quién no es completamente metrizable. Ésto también muestra que un subespacio cerrado de un espacio de Baire no es necesariamente un espacio de Baire.

7. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_1)$ espacios topológicos, y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ una función abierta y continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire, demuestre que $(X, \mathcal{T}_1)$ es un espacio de Baire. [Por lo que una imagen continua y abierta de un espacio de Baire es un espacio de Baire.]

8. Sea $(Y, \mathcal{T}_1)$ un subespacio abierto del espacio de Baire $(X, \mathcal{T})$. Demuestre que $(Y, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire. [Por lo que un subespacio abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire.]

9. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una función $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ se dice que es **semicontinua inferiormente** si para cada $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}((-\infty, r])$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. Una función $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ se dice que es **semicontinua superiormente** si para cada $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}((-\infty, r))$ es abierto en $(X, \mathcal{T})$.

   (i) Demuestre que f es continua si, y sólo si, es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.

   (ii) Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Baire y I un conjunto de índices, y para cada $x \in X$, permita que el conjunto $\{f_i(x) : i \in I\}$ esté acotado superiormente, donde cada función $f_i : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente. Usando el Teorema de la Categoría de Baire demuestre que existe un subconjunto abierto O de $(X, \mathcal{T})$ tal que el conjunto $\{f_i(x) : x \in O,\ i \in I\}$ es acotado superiormente.

   [Consejo. Sea $X_n = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}((-\infty, n])$.]

10. Sea B un espacio de Banach tal que la dimensión del espacio vectorial subyacente es numerable. Usando el Teorema de la Categoría de Baire, demuestre que la dimensión del espacio vectorial subyacente es, en efecto, finita.

11. Sean $(N, || \ ||)$ un espacio vectorial normado y (X, τ) un subconjunto convexo de $(N, || \ ||)$ con su topología inducida. Muestre que (X, τ) es conexo por caminos, y por consiguiente, éste es también conexo. Deduzca que toda bola abierta en $(N, || \ ||)$ es conexa por caminos como también lo es el mismo $(N, || \ ||)$.

6.6 Postdata

La teoría de los espacios métricos es un tópico importante por sí mismo. Además, los espacios métricos mantienen una posición relevante en el estudio de la topología. Ciertamente, muchos libros sobre topología comienzan con espacios métricos, y motivan el estudio de la topología a través de éstos.

En el capítulo vimos que métricas diferentes sobre el mismo conjunto pueden dar lugar a la misma topología. Tales métricas son llamadas equivalentes. También fuimos introducidos al estudio de los espacios funcionales, y en particular, a $\mathrm{C}[0, 1]$. En el camino nos encontramos con los espacios vectoriales normados, un tema central en el análisis funcional.

No todos los espacios topológicos se originan de espacios métricos. Vimos ésto observando que las topologías inducidas por métricas son de Hausdorff.

Vimos que la topología de un espacio métrico puede ser descrita completamente en términos de sus secuencias convergentes y que las funciones continuas entre espacios métricos puede también ser descritas de esta forma.

Los Ejercicios 6.2 #9 introdujeron el interesante concepto de distancia entre conjuntos en un espacio métrico.

Nos encontramos con los conceptos de secuencia de Cauchy, espacio métrico completo, espacio completamente metrizable, espacio de Banach, espacio polaco, y espacio de Souslin. La completitud es un área importante en la teoría de los espacios métricos debido al papel predominante que juega en aplicaciones en análisis. Los espacios de Banach son espacios vectoriales, normados y completos; éstos son usados en muchos contextos en análisis y tienen una rica teoría estructural. Vimos que todo espacio métrico tiene una terminación, es decir, éste puede ser inmerso isométricamente en un espacio métrico completo. Por ejemplo, todo espacio vectorial normado tiene una terminación que es un espacio de Banach.

Las contracciones fueron introducidas en el marco del concepto de punto fijo, y vimos la demostración del Teorema de la Contracción, el cual es también conocido como el Teorema del Punto Fijo de Banach. Este teorema es muy útil en diversas aplicaciones, por ejemplo en demostraciones sobre la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Otro teorema poderoso demostrado en este capítulo fue el Teorema de la Categoría de Baire. Introdujimos la noción topológica de espacio de Baire, y vimos que todo espacio completamente metrizable es un espacio de Baire. En el trayecto, la noción de primera categoría o magro fue introducida. Luego demostramos el Teorema de la Función Abierta que dice que una función lineal continua y sobreyectiva de un espacio de Banach en otro espacio de Banach tiene que ser una función abierta.

Bibliography

[1] Colin C. Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots.* Freeman and Co., New York, 1994.

[2] J. Frank Adams. *Algebraic topology: a student's guide.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1972.

[3] G.N. Afanasiev. *Topological effects in quantum mechanics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1999.

[4] M.A. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint.* Springer, New York, 2002.

[5] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. *Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[6] *Algebraic and Geometric Topology.* http://www.maths.warwick.ac.uk/agt, 2001–. a refereed electronic journal.

[7] Charilaos N. Aneziris. *The mystery of knots: computer programming for knot tabulation.* World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, N.J., 1999.

[8] A.V. Arkhangel'skiĭ. *Fundamentals of general topology: problems and exercises.* Kluwer, Boston, 1984.

[9] A.V. Arkhangel'skiĭ. *Topological function spaces.* Kluwer, Boston, 1992.

[10] A.V. Arkhangel'skiĭ and L.S. Pontryagin, editors. *General Topology I.* Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.

[11] D.L. Armacost. *The structure of locally compact abelian groups.* M. Dekker, New York, 1981.

[12] M.A. Armstrong. *Basic topology.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[13] V.I. Arnold and B.A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics.* Springer, New York, 1999.

[14] Emil Artin. *Introduction to algebraic topology.* C.E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1969.

[15] C.E. Aull and R. Lowen, editors. *Handbook of the history of general topology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 1997.

[16] Wojciech Banaszczyk. *Additive subgroups of topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin; New York, 1991.

[17] J. Banks, G. Davis, P. Stacey, J. Brooks, and G. Cairns. On devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:332–334, 1992.

[18] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. *Chaos: A Mathematical Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[19] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. *Additive subgroups of topological vector spaces.* Imperial College Press, London, 2003.

[20] Stephen Barr. *Experiments in topology.* Dover Publications, New York, 1989.

[21] Gerald Alan Beer. *Topologies on closed and convex sets.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1993.

[22] Martin P. Bendsoe. *Optimization of structural topology.* Springer, Berlin, New York, 1995.

[23] Martin P. Bendsoe. *Topology, optimization: theory, methods and applications.* Springer, Berlin, New York, 2003.

[24] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. *Selected topics in infinite-dimensional topology.* PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

[25] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. *Jour. Math (Liouville)*, (9) 7:345–379, 1928.

[26] Donald W. Blackett. *Elementary topology; a combinatorial and algebraic approach.* Academic Press, New York, 1967.

[27] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray, editors. *Chemical topology : introduction and fundamental.* Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

[28] Armand Borel. *Seminars on transformation groups.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[29] Karol Borsuk. *Collected Papers/ Karol Borsuk.* PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983.

[30] Nicolas Bourbaki. *General topology v.1 & v.2.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[31] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale, Chap. 1-4 and Chap. 5-10.* Hermann, Paris, 1971 and 1974.

[32] Nicolas Bourbaki. *Topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1987.

[33] Glen E. Bredon. *Topology and geometry.* Springer, New York, 1997.

[34] Robert F. Brown. *The Lefschetz fixed point theorem.* Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[35] Ronald Brown. *Elements of modern topology.* McGraw Hill, New York, 1968.

[36] Ronald Brown. *Topology : a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid.* Halstead Press, New York, 1988.

[37] Georg Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, by Georg Cantor; tr., and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain.* The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1915.

[38] Stephen C. Carlson. *Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course.* Wiley, New York, 2001.

[39] J. Scott Carter. *How surfaces intersect in space : an introduction to topology.* World Scientific Publishers, Singapore ; River Edge, N.J., 1995.

[40] Eduard Čech. *Topological spaces.* Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966.

[41] Eduard Čech. *Point sets.* Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1969.

[42] Graciela Chichilnisky. *Topology and markets.* American Mathematical society, Providence, R.I., 1999.

[43] Gustave Choquet. *Topology.* Academic Press, New York, 1966.

[44] Gustave Choquet. *Lectures on analysis.* W.A. Benjamin, New York, 1969.

[45] Daniel E. Cohen. *Combinatorial group theory: a topological approach.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989.

[46] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *The theory of ultrafilters.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[47] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Continuous pseudometrics.* M. Dekker, New York, 1975.

[48] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Chain conditions in topology.* Cambridge University Press, Cambridge, England; New York, 1982.

[49] James P. Corbett. *Topological principles in cartography.* US Department of Commerce, Washington, D.C., 1980.

[50] J.-M. Cordier. *Shape theory: categorical methods of approximation.* Halstead Press, Chichester, England; New York, 1989.

[51] Jane Cronin. *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[52] R.J. Daverman and R.B. Sher, editors. *Handbook of geometric topology.* Elsevier, Amsterdam; New York, 2002.

[53] H. de Vries. *Compact spaces and compactifications: an algebraic approach.* Van Gorcum, Assen, 1962.

[54] J.V. Deshpande. *Introduction to topology.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, New York, etc., 1988.

[55] Robert L. Devaney. *Chaos, fractals and dynamics: computer experiments in mathematics.* Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.

[56] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.* Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.

[57] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition.* Westview Press, Boulder, Colorado, 2003.

[58] Tammo tom Dieck. *Topologie.* de Gruyter, Berlin, 2000.

[59] Egbert Dierker. *Topological methods in Walrasian economics.* Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[60] Jean Alexandre Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960.* Birkhauser, Boston, 1989.

[61] Dikran N. Dikranjan. *Categorical structure of closure operators with applications to topology, algebra and discrete mathematics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995.

[62] Mircea V. Diudea and L. Jantschi. *Molecular topology.* Nova Science Publishers, Huntington, N.Y., 2001.

[63] C.T.J. Dodson. *Category bundles and spacetime topology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1988.

[64] C.T.J. Dodson. *A user's guide to algebraic topology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1997.

[65] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology.* Springer, Berlin, 1995.

[66] James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[67] Alan Dunn. *Sarkovskii's Theorem–Part 1*, http://ocw.mit.edu/nr/rdonlyres/mathematics/18-091spring–2005/a335fb2e-7381–49d4–b60c–7cbd2f349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.

[68] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and topology for mesh generation.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2001.

[69] Gerald A. Edgar. *Measure, topology and fractal geometry.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[70] R.E. Edwards. *Curves and topological questions.* Australian National University, Canberra, Australia, 1969.

[71] Robert E. Edwards. *Functional analysis: theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1965.

[72] James Eels. *Singularities of smooth maps.* Gordon and Breach, New York, 1967.

[73] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

[74] Murray Eisenberg. *Topology.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[75] Patrik Eklund. *Categorical fuzzy topology.* Abo Akademi, Abo, 1986.

[76] Glenn Elert. *The Chaos Hypertextbook*, http://hypertextbook.com/chaos/, 2003.

[77] Ryszard Engelking. *General topology.* PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[78] Ryszard Engelking. *Dimension theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York, 1978.

[79] William W. Fairchild and Cassius Ionescu Tulceac. *Topology.* W.B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1971.

[80] K.J. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* Wiley, Chichester, New York, 1990.

[81] Erica Flapan. *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality.* Cambridge University Press, cambridge; New York, 2000.

[82] Graham Flegg. *From geometry to topology.* Dover Publications, Mineola, N.Y., 2001.

[83] D.H. Fremlin. *Consequences of Martin's Axioms.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1984.

[84] Robert Froman. *Rubber bands, baseballs and doughnuts; a book about topology. Illustrated by Harvey Weiss.* Crowell, New York, 1972.

[85] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. *Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[86] David B. Gauld. *Differential topology: an introduction.* M. Dekker, New York, 1982.

[87] *General Topology Front for the Mathematics ArXiv.* http://front.math.ucdavis.edu/math.gn, 1992–. Los Alamos National Laboratory e-Print archive.

[88] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *A compendium of continuous lattices.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[89] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *Continuous lattices and domains.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[90] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of continuous functions.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[91] Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland.* Wiley-Interscience, New York, 2002.

[92] J. Ginsburg and B. Sands. Minimal infinite topological spaces. *Amer. Math. Monthly*, 86 (7):574–5764, 1979.

[93] Norman J. Girardot. *Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun).* University of California Press, Berkeley, California, 1983.

[94] H. Brian Griffiths. *Surfaces.* Cambridge University Press, London; New York, 1976.

[95] Jonathan L. Gross. *Topological graph theory.* Wiley, New York, 1987.

[96] A. Grothendieck. *Topological vector spaces.* Gordon and Breach, New York, 1973.

[97] Paul Halmos. *Naive set theory.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.

[98] Felix Hausdorff. *Set Theory (translated from the original German).* Chelsea, New York, 1962.

[99] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914).* Chelsea, New York, 1965.

[100] Horst Herrlich and Hans-E. Porst, editors. *Category theory at work.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1991.

[101] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations.* Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[102] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis II: structure and analysis for compact groups, analysis on locally compact abelian groups.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[103] Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann, and Jimmie D. Lawson. *Lie groups, convex cones and semigroups.* Clarendon Press, Oxford, 1997.

[104] Peter John Hilton. *Homology theory: an introduction to algebraic topology.* Cambridge University Press, London, 1967.

[105] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications.* W. de Gruyter, New York, 1998.

[106] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition.* Elsevier, Oxford, UK, 2004.

[107] John Gilbert Hocking and Gail S. Young. *Topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1961.

[108] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert.* de Gruyter, Studies in Mathematics 25, Berlin, second revised and augmented edition, 2006.

[109] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups.* European Mathematical Society Publishing House, Tracts in Mathematics 2, Zurich, Switzerland, 2007.

[110] Karl Heinrich Hofmann and Paul S. Mostert. *Elements of compact semigroups.* C.E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.

[111] *Hopf Topology Archive.* http://hopf.math.purdue.edu, 1996–. Purdue University Hopf Archive of Topology preprints.

[112] Juan Horváth. *Topological vector spaces and distributions.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[113] Norman R. Howes. *Modern analysis and topology.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[114] S.T. Hu. *Introduction to general topology.* Holden-Day, San Francisco, 1966.

[115] S.T. Hu. *Differentiable manifolds.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[116] Sze-Tsen Hu. *Elements of general topology.* Holden-Day, San Francisco, 1964.

[117] Sze-Tsen Hu. *Homology theory; a first course in algebraic topology.* Holden-Day, San Francisco, 1966.

[118] Witold Hurewicz and Witold Wallman. *Dimension theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

[119] Taqdir Husain. *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces.* Clarendon Press, Oxford, 1965.

[120] Taqdir Husain. *Introduction to topological groups.* W.B. Saunders, Philadelphia, 1966.

[121] Taqdir Husain. *Topology and maps.* Plenum Press, New York, 1977.

[122] Miroslav Husek and Jan Van Mill. *Recent progress in general topology.* North-Holland, Amsterdam; New York, 1992.

[123] J.R. Isbell. *Uniform spaces.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[124] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:865, 1992.

[125] I.M. James. *General topology and homotopy theory.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[126] I.M. James. *Handbook of algebraic topology.* Elsevier, Amsterdam; New York, 1995.

[127] I.M. James. *Topologies and uniformities.* Springer, London; New York, 1999.

[128] I.M. James. *History of topology.* Elsevier, Amsterdam; New York, 1999.

[129] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. *Abstract algebra and famous impossibilities.* Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

[130] V. Kannan. *Ordinal invariants in topology.* American mathematical society, Providence, R.I., 1981.

[131] Christian Kassel. *Quantum groups.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[132] Louis H. Kauffman and Randy A. Baadhio. *Quantum topology.* World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, 1993.

[133] John L. Kelley. *General topology.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[134] S.M. Khaleelulla. *Counterexamples in topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1982.

[135] Wan-hui Kim and Robert Tien-wen Chien. *Topological analysis and synthesis of communication networks.* Columbia University Press, New York, 1962.

[136] Bruce R. King. *Applications of graph theory and topology in inorganic cluster and coordination chemistry.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[137] T. Yung Kong and Azriel Rosenfeld. *Topological algorithms for digital image processing.* Elsevier, Amsterdam; New York, 1996.

[138] Gottfried Köthe. *Topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1983.

[139] Kenneth Kunen. *Set theory.* North-Holland, Amsterdam, 1980.

[140] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology.* North-Holland, Amsterdam, 1984.

[141] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to set theory and topology.* Pergamonn Press, New York, 1961.

[142] H.A. Lauwerier. *Fractals: endlessly repeated geometrical figures.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.

[143] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds.* Springer, New York, 2000.

[144] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Springer, New York, 2002.

[145] Seymour Lipschutz. *Schaum's outline of general topology.* McGraw Hill, 1968.

[146] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo. *Fuzzy topology.* World Scientific Publishers, River Edge, N.J., 1997.

[147] Charles Livingston. *Knot theory.* The Mathematical association of America, 1993.

[148] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20: 130–141, 1963.

[149] Saunders Maclane. *Categories for the working mathematician, second edition.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[150] Benoit B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 155:636–638, 1967.

[151] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature.* W.H. Freeman, New York, 1983.

[152] R.D. Mauldin, editor. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café.* Birkhäuser, Boston, 1981.

[153] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645–647, 1974.

[154] George McCarty. *Topology; an introduction with application to topological groups.* McGraw Hill, New York, 1967.

[155] Robert A. McCoy and Ibulu Ntantu. *Topological properties of spaces of continuous functions.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1988.

[156] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford University Press, New York, 1998.

[157] Richard E. Merrifield and Howard E. Simmons. *Topological methods in chemistry.* Wiley, New York, 1989.

[158] Emil G. Milewski. *The topology problem solver: a complete solution guide to any textbook.* Research and Education Association, Piscataway, N.J., 1994.

[159] M. Mimura and Hirosi Toda. *Topology of Lie groups.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[160] Edward E. Moise. *Introductory problem courses in analysis and topology.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[161] Mikhail I. Monastyrskaei. *Topology of gauge fields and condensed matter.* Plenum Press, New York, 1993.

[162] Deane Montgomery and Leo Zippin. *Topological transformation groups.* Interscience Publishers, New York, 1955.

[163] Robert L. Moore. *Foundations of point set topology.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[164] Giuseppe Morandi. *The role of topology in classical and quantum physics.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1992.

[165] K. Morita and J. Nagata, editors. *Topics in general topology.* North Holland, Amsterdam, 1989.

[166] Sidney A. Morris. *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1977.

[167] Sidney A. Morris. Are finite topological spaces worthy of study. *Austral. Math. Soc. Gazette*, 11:31–32, 1984.

[168] Sidney A. Morris. An elementary proof that the Hilbert cube is compact. *Amer. Math. Monthly*, 91:563–564, 1984.

[169] Gregory L. Naber. *Topological methods in Euclidean spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1980.

[170] Gregory L. Naber. *Topology, geometry and gauge fields: foundations.* Springer, New York, 1997.

[171] Keio Nagami. *Dimension theory.* Academic Press, New York, 1970.

[172] Jun-iti Nagata. *Modern dimension theory.* Interscience Publishers, New York, 1965.

[173] Jun-iti Nagata. *Modern general topology.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985.

[174] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics.* A. Hilger, Bristol, England; New York, 1990.

[175] H. Nakano. *Topology and linear topological spaces.* Maruzen Co., Tokyo, 1951.

[176] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. New York.

[177] Charles Nash. *Topology and geometry for physicists.* Academic Press, London, New York, 1983.

[178] M.H.A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points.* Greenwood Press, Westport, Conn., 1985.

[179] A.L. Onishchik. *Topology of transitive transformation groups.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.

[180] John C. Oxtoby. *Measure and category; a survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[181] A.R. Pears. *Dimension Theory of general spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1975.

[182] Anthony L. Peressini. *Ordered topological vector spaces.* Harper and Row, New York, 1967.

[183] C.G.C. Pitts. *Introduction to metric spaces.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

[184] Henri Poincarè. *Science and method; translated and republished.* Dover Press, New York, 2003.

[185] Ian R. Porteous. *Topological geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1981.

[186] Bodo von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[187] George M. Reed. *Surveys in general topology.* Academic Press, New york, 1980.

[188] G.M. Reed, A.W. Roscoe, and R.F. wachter. *Topology and category theory in computer science.* Oxford University Press, Oxford, England, 1991.

[189] Renzo L. Ricca. *An introduction to the geometry and topology of fluid flows.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 2001.

[190] A.P. Robertson and Wendy Robertson. *Topological vector spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.

[191] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[192] Mary Ellen Rudin. *Lectures on set theoretic topology.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[193] Hans Sagan. *Space-filling curves.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[194] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukranian Mat. Z.*, 16:61–71, 1964.

[195] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. *Word problems II, Stud. Logic Found. Math.*, 995:373–394, 1980.

[196] M. Signore and F. Melchiorri. *Topological defects in cosmology.* World Scientific Publishers, Singapore, 1998.

[197] George E. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis.* McGraw Hill, New York, 1963.

[198] I.M. Singer. *Lecture notes on elementary topology and geometry.* Springer-Verlag, New York, 1967.

[199] Christopher G. Small. *The statistical theory of shape.* Springer, New York, 1996.

[200] Alexei Sossinsky. *Knots: mathematics with a twist.* Harvard University Press, 2002.

[201] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[202] John R. Stallings. *Lectures on polyhedral topology.* Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India, 1967.

[203] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. *Counterexamples in topology.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[204] N.E. Steenrod. *Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 191968.

[205] N.E. Steenrod. *The topology of fibre bundles.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.

[206] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group topology.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[207] *The MacTutor History of Mathematics Archive.* http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/, 2001–.

[208] Wolfgang Thron. *Topological structures.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[209] *Topology.* http://www.elsevier.com/locate/top, 1962–. A hard-copy refereed research journal in topology and geometry.

[210] *Topology and its Applications.* http://www.elsevier.nl/locate/topol, 1971–. A hard-copy refereed research journal in topology.

[211] *Topology Atlas.* http://at.yorku.ca/topology, 1995–. Topology related resources.

[212] *Topology Proceedings.* http://topology.auburn.edu/tp/top2.htm, 1977–. A hard-copy refereed research journal.

[213] J. van Mill. *The infinite-dimensional topology of function spaces.* Elsevier, Amsterdam, New York, 2001.

[214] Jan van Mill and George M. Reed. *Open problems in topology.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[215] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. *Amer. Math. Monthly*, 101:353–355, 1994.

[216] Steven Vickers. *Topology via logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[217] A.V. Vologodskii. *Topology and physics of circular DNA.* CRC Press, Boca Raton, 1992.

[218] Russell C. Walker. *The Stone-Cech compactification.* Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[219] C.T.C. Wall. *A geometric introduction to topology.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[220] A.D. Wallace. *Differential topology; first steps.* W.A. Benjamin, New York, 1968.

[221] Evert Wattel. *The compactness operator in set theory and topology.* Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.

[222] Jeffrey R. Weeks. *The shape of space.* Marcel Dekker, New York, 2002.

[223] Stuart G. Whittington, De Witt Sumners, and Timothy Lodge, editors. *Topology and geometry in polymer science.* Springer, New York, 1998.

[224] R.L. Wilder. *Topology of manifolds.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.

[225] Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[226] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82:985–992, 1975.

Index