Топология без Слез[1]

Сидней А. Моррис

Версия от 11 июня 2010 г.[2]

[2]Эта книга постоянно обновляется и расширяется; предполагается, что всего будет пятнадцать глав. Если вы обнаружите ошибки, опечатки или предложите улучшения пожалуйста пишите на e-mail: s.morris@ballarat.edu.au

Оглавление

Глава 0

Введение

Топология является важной и интересной областью математики, изучение которой не только познакомит вас с новыми понятиями и теоремами, но и представит в новом контексте некоторые "старые"понятия, такие как, например, непрерывные функции. Однако, сказать только это о топологии означало бы недооценить ее значимость и важность. Она настолько фундаментальна, что ее влияние ощущается почти в любой другой области математики. Это делает изучение топологии необходимым для всех, кто готовится стать математиком даже если их "первой любовью"является (или станет) алгебра, анализ, теория категорий, теория хаоса, геометрия, механика, промышленная математика, математическая биология, математическая экономика, финансовая математика, математическое моделирование, математическая физика, теория чисел, исследование операций или статистика. (Библиография в конце этой книги достаточно обширна, чтобы показать, что топология действительно имеет отношение ко всем этим областям). Топологические понятия, такие как компактность, связность и плотность являются такими же базовыми для сегодняшних математиков, как множества и функции были для математиков прошлого века.

Топология состоит из нескольких различных областей — общая топология (также известная как точечно—множественная топология), алгебраическая топология, дифференциальная топология и топологическая алгебра. Причем общая топология является дверью к изучению остальных областей топологии. Целью этой книги является дать основательную подготовку в общей топологии. Любой, кто добросовестно изучит первые десять глав и проделает хотя бы половину всех упражнений, получит таковую.

Для читателя, который не имеет достаточного опыта в изучении таких аксиоматических областей математики как, например, алгебра, отсутствие навыков формального доказательства может оказаться серьезным препятствием. Чтобы помочь в этом, я, довольно часто в первых главах, включаю ремарки, которые не являясь частью доказательства, показывают рассуждения, которые привели к нему.

Ремарки будут выделяться следующим образом:

Для того, чтобы получить доказательство я проделал эти рассуждения, которые могут быть названы процессом "исследования"или "экспериментирования".

Однако, читатель вскоре узнает, что несмотря на то, что "исследование"или "экспериментирование"зачастую являются необходимыми, ничто не может заменить формальное доказательство.

Эта книга содержит много упражнений. Только проделав существенное количество этих упражнений, вы сумеете овладеть настоящим курсом. Я не даю ответов к упражнениям, и не собираюсь этого делать в будущем. По-моему книга сама по себе содержит достаточное количество разобранных примеров и доказательств. Очень часто упражнения содержат новые понятия. Те из понятий, которые я считаю наиболее важными, включаются позже в основной текст. Наиболее трудные упражнения помечены звездочкой.

Читатели книги могут пожелать обмениваться друг с другом информацией по поводу трудностей, решений упражнений, комментариев на книгу и т.п. Для этого я создал группу на Facebook, которая называется “Topology Without Tears rReaders”. Чтобы присоединиться к ней достаточно послать мне запрос по следующему адресу (s.morris@ballarat.edu.au).

И последнее, я должен упомянуть, что математические достижения понимаются лучше всего, когда рассматриваются в историческом контексте. В настоящее время, в этой книге ссылок на исторический контекст недостаточно. Я довольствуюсь заметками о топологах в Аппендиксе 2, почерпнутыми из *The MacTutor History of Mathematics Archive* [30].

Читатель может также посетить вебсайт *The MacTutor History of Mathematics Archive* [30] чтобы прочитать полные версии этих статей, а также статьи о других ключевых личностях. Но, конечно же, хорошее понимание истории редко достигается чтением только одного источника.

По поводу истории единственное, чтобы я хотел сказать это то, что большая часть топологии, описанной в этой книге, была разработана в первой половине двадцатого века.

Можно сказать, что "центром тяжести"этого периода исследований является, или являлась Польша.(Границы с тех пор изменились значительно.) Можно сказать, что Вторая Мировая Война навсегда сдвинула этот "центр тяжести". Читатель должен просмотреть Аппендикс 2, чтобы понять это замечание.

0.1 Благодарности

Части ранних версий этой книги были использованы в Университете Латроб, Университете Новой Англии, Университете Воллонгонга, Университете Квинсленда, Университете Южной Австралии, Нью-Йоркском Сити Колледже и в Балларатском Университете на протяжении последних 30 лет. Я хочу поблагодарить тех студентов, которые критиковали ранние версии и находили в них ошибки. Особую благодарность я хочу выразить Деборе Кинг и Алисон Плант за обнаружение большого количества ошибок и слабостей в представлении материала. Также я хочу поблагодарить моих коллег Керолин Макфейл, Ральфа Коппермана, Карла Хейндриха Хофмана, Рай-Шанг Ло, Родни Нилсена, Питера Плесантса, Джоффри Принса, Бевана Томпсона и Юана Баркера, которые читали различные версии и предлагали изменения и улучшения. Также спасибо Роду Нилсену, чьи заметки о хаосе оказались полезными при подготовке соответствующего аппендикса, и Джеку Грею, чьи великолепные лекции по Теории Множеств и Трансфинитной Арифметике, написанные в 1970-х повлияли на написание нашего аппендикса по Теории Бесконечных Множеств. В некоторых местах этой книги, особенно в Аппендиксе 2, присутствуют исторические отступления. В связи с ними я должен упомянуть два замечательных источника Bourbaki [6] и *The MacTutor History of Mathematics Archive* [30].

0.2 Читатели – Страны и Специальности

Эта книга использовалась профессорами, студентами различных уровней, школьниками, бухгалтерами, страховыми агентами, астрономами, химиками, компьютерщиками, экономистами, инженерами различных специальностей, финансистами, математиками, нейрофизиологами, диетологами, биржевыми игроками, философами, физиками, психиаторами, психологами, скульпторами, разработчиками программного обеспечения и статистиками из Алжира, Аргентины, Австралии, Австрии, Бангладеш, Боливии, Беларуси, Бельгии, Белиза, Бразилии, Болгарии, Камбоджи, Камеруна, Канады, Чили, Габона, Китая, Колумбии, Коста Рики, Хорватии, Кипра, Чехии, Дании, Египта, Эстонии, Эфиопии, Фиджи, Финляндии, Франции, Сектора Газа, Германии, Ганы, Греции, Гренландии, Гватемалы, Гайяны, Венгрии, Исландии, Индии, Индонезии, Ирана, Ирака, Израиля, Италии, Ямайки, Японии, Кении, Кореи, Кувейта, Литвы, Люксембурга, Малайзии, Мальты, острова Маврикий, Мексики, Новой Зеландии, Никарагуа, Нигерии, Норвегии, Пакистана, Панамы, Парагвая, Перу, Польши, Португалии, Катара, Румынии, России, Сербии, Сьерра Леоне, Сингапура, Словении, Южной Африки, Испании, Шри Ланки, Судана, Швеции, Швейцарии, Тайваня, Таиланда, Голландии, Филлипин, Тринидада и Тобаго, Туниса, Турции, Великобритании, Украины, ОАЭ, США, Уругвая, Узбекистана, Венесуелы и Вьетнама.

На книгу есть ссылка на сайте http://www.econphd.net/notes.htm, где размещаются ссылки на "курсы по всем базовым дисциплинам" для студентов и аспирантов по экономике, а также есть ссылка на атласе ресурсов по топологии http://at.yorku.ca/topology/educ.htm.

0.3 Отзывы Читателей

Отзывы читателей приведены без перевода:

T. Lessley, USA: "delightful work, beautifully written";
E. Ferrer, Australia: "your notes are fantastic";
E. Yuan, Germany: "it is really a fantastic book for beginners in Topology";
S. Kumar, India: "very much impressed with the easy treatment of the subject, which can be easily followed by nonmathematicians";
Pawin Siriprapanukul, Thailand: "I am preparing myself for a Ph.D. (in economics)

study and find your book really helpful to the complex subject of topology";
Hannes Reijner, Sweden: "think it's excellent";
G. Gray, USA: "wonderful text";
Dipak Banik, India: "beautiful note";
B. Pragoff Jr, USA: "explains topology to an undergrad very well";
Tapas Kumar Bose, India: "an excellent collection of information";
Muhammad Sani Abdullahi, Nigeria: "I don't even know the words to use,in order to express my profound gratitude, because, to me a mere saying 'thank you very much' is not enough. However, since it a tradition, that whenever a good thing is done to you, you should at least, say 'thank you' I will not hesitate to say the same, but, I know that, I owe you more than that, therefore, I will continue praying for you";
S. Saripalli, USA: "I'm a homeschooled 10th grader . . . I've enjoyed reading Topology Without Tears";
Samuel Frade,USA:"Firstly I would like to thank you for writing an excellent Topology text, I have finished the first two chapters and I really enjoy it. I would suggest adding some "challenge"exercises. The exercises are a little easy. Then again, I am a mathematics major and I have taken courses in analysis and abstract algebra and your book is targeted at a wider audience. You see, my school is undergoing a savage budget crisis and the mathematics department does not have enough funds to offer topology so I am learning it on my own because I feel it will give me a deeper understanding of real and complex analysis";
Eszter Csernai, Hungary: "I am an undergraduate student student studying Mathematical Economics ... I'm sure that you have heard it many times before, but I will repeat it anyway that the book is absolutely brilliant!";
Christopher Roe, Australia: "May I first thank you for writing your book 'Topology without tears'? Although it is probably very basic to you, I have found reading it a completely wonderful experience";
Jeanine Dorminey, USA: "I am currently taking Topology and I am having an unusual amount of difficulty with the class. I have been reading your book online as it helps so much";
Michael Ng, Macau:"Unlike many other math books, your one is written in a friendly manner. For instance, in the early chapters, you gave hints and analysis to almost all the proof of the theorems. It makes us, especial the beginners, easier to understand how to think out the proofs. Besides, after each definition, you always give a number

of examples as well as counterexamples so that we can have a correct and clear idea of the concept";

Tarek Fouda, USA: "I study advanced calculus in Stevens institute of technology to earn masters of science in financial engineering major. It is the first time I am exposed to the subject of topology. I bought few books but I find yours the only that explains the subject in such an interesting way and I wish to have the book with me just to read it in train or school."

Ahmad ЏAl-Omari, Malaysia:"I am Ph.D. student in UKM (Malaysia) my area of research is general topology and I fined your book is very interesting";

Annukka Ristiniemi, Greece: "I found your excellent book in topology online ... I am student of Mphil Economics at the University of Athens, and studying topology as part of the degree";

Jose Vieitez, Uruguay:"n this semester I am teaching Topology in the Facultad de Ciencias of Universidad de la Republica. I would like to have a printable version of your (very good) book."

Muhammad Y. Bello, Professor of Mathematics, Bayero University, Nigeria: "Your ebook, 'Topology Without Tears', is an excellent resource for anyone requiring the knowledge of topology. I do teach some analysis courses which assumes basic background in topology. Unfortunately, some of my students either do not have such a background, or have forgotten it. After going through the electronic version, I observe your book would be a good source of refreshing/providing the background to the students."

Prof. dr. Ljubomir R. Savic, Institute for Mechanics and Theory of Structures, University of Belgrade, Serbia:"I just learn topology and I have seen your superb book. My field is in fact Continuum Mechanics and Structural Analysis";

Pascal Lehmann, Germany:"I must print your fantastic book for writing notes on edge of the real sheets of paper";

Professor Luis J. Alias, Department of Mathematics at University of Murcia, Spain: "I have just discovered your excellent text "Topology Without Tears". During this course, I will be teaching a course on General Topology (actually, I will start my course tomorrow morning). I started to teach that course last year, and esentially I followed Munkres's book (Topology, Second edition), from which I covered Chapters 2, 3, part of 4, 5, and part of 9. I have been reading your book and I have really enjoyed it. I like it very much, specially the way you introduce new concepts and also the hints and key remarks that you give to the students.''

Daniel Nkemzi, Lecturer, Department of Physics,University of Buea, Cameroon: "After many years of struggle to understand the rudiments of topology, without any success at all, I gave up!. Then recently I stumbled upon your God-sent text while browsing the web. Flipping through the pages of the on-line I am convinced that if I cannot understand the subject from this text, then no other book can probably help me";

Tirthankar Chakravarty, Oxford University, UK: "I am the University of Cambridge and am an econometrician. Your notes are very well written";

Thomas Evelbauer, Germany: "I was intensely attracted to contents a style. Especially, I like the way you introduce the basics and make them work via exercises and guided proofs.";

Gabriele. E.M. Biella MD PhD, Head of Research, Institute of Molecular Bioimaging and Physiology, National Research Council, Italy: "I am a neurophysiologist and am trying to achieve some new neurodynamic description of sensory processes by topological approach. I stepped into your wonderful book."

Fazal Haq, Pakistan:"I am PhD student in the faculty of Enginneering Ghlam Ishaq Khan Institute of Sciences and Techonology Topi swabi Pakistan. I was surprised by reading your nice book topology without tears. In fact i have never seen such a beautifully weitten book on topology before";

Gabriele Luculli, Italy: "I'm just a young student, but I found very interesting the way you propose the topology subject, especially the presence of so many examples";

K. Orr, USA: "excellent book";

Professor Ahmed Ould, Colombia: "let me congratulate you for presentation, simplicity and the clearness of the material";

Paul Unstead, USA: "I like your notes since they provide many concrete examples and do not assume that the reader is a math major";

Alberto Garcна Raboso, Spain: "I like it very much";

Guiseppe Curci, Research Director in Theoretical Physics, National Institute of Theoretical Physics, Pisa: "nice and illuminating book on topology";

M. Rinaldi, USA: "this is by far the clearest and best introduction to topology I have ever seen ... when I studied your notes the concepts clicked and your examples are great";

Joaquin Poblete, Undergraduate Professor of Economics, Catholic University of

Chile: “I have just finished reading your book and I really liked it. It is very clear and the examples you give are revealing”;
Alexander Liden, Sweden: ‘I’ve been enjoying reading your book from the screen but would like to have a printable copy”
Francois Neville, USA: “I am a graduate student in a spatial engineering course at the University of Maine (US), and our professor has enthusiastically recommended your text for the Topology unit.”;
Hsin-Han Shen, USA: “I am a Finance PhD student in State Univ of New York at Buffalo. I found the Topology materials on your website is very detailed and readable, which is an ideal first-course-in topology material for a PhD student who does not major in math, like me”;
Degin Cai, USA: “your book is wonderful”;
Eric Yuan, Darmstadt, Germany: “I am now a mathematics student in Darmstadt University of Technology, studying Topology, and our professor K.H. Hofmann recommended your book ‘Topology Without Tears’ very highly”;
Martin Vu, Oxford University: “I am an Msc student in Applied Math here in oxford. Since I am currently getting used to abstract concepts in maths, the title of the book topology without tears has a natural attraction”;
Ahmet Erdem, Turkey: “I liked it a lot”;
Kartika Bhatia, India: “i am pursuing my master in economics here at Delhi School of Economics, University of Delhi,I found your book very useful and easy to understand. Many of my doubts have been solved while reading your book”;
Wolfgang Moens, Belgium:“I am a Bachelor-student of the "Katholieke Universiteit Leuven. I found myself reading most of the first part of "Topology Without Tears"in a matter of hours. Before I proceed, I must praise you for your clear writing and excellent structure (it certainly did not go unnoticed!)”
Duncan Chen, USA: “You must have received emails like this one many times, but I would still like thanks you for the book ‘Topology without Tears’. I am a professional software developer and enjoy reading mathematics.”
Maghaisvarei Sellakumaran, Singapore: “I will be going to US to do my PhD in Economics shortly. I found your book on topology to be extremely good”;
Tom Hunt, USA: “thank you for making your fine text available on the web”;
Fausto Saporito, Italy: “i’m reading your very nice book and this is the best one I saw until now about this subject”;

Takayuki Osogami, USA: " started reading your "Topology Without Tears"online, and found that it is a very nice material to learn topology as well as general mathematical concept";

Roman Knöll, Germany: "Thank you very much for letting me read your great book. The 'topology without tears' helped me a lot and i regained somehow my interest in mathematics, which was temporarily lost because of unsystematic lectures and superfluous learning by heart";

Yuval Yatskan, USA:"I had a look at the book and it does seem like a marvelous work";

N.S. Mavrogiannis, Greece: "It is a very good work";

Semih Tumen, Turkey: "I know that PhD in Economics programs are mathematically demanding, so I found your book extremely useful while reviewing the necessary topics";

Pyung Ho Kim, USA: "I am currently a Ph.D. student... I am learning economic geography, and i found your book is excellent to learn a basic concept of topology";

Javier Hernandez, Turkey: "I am really grateful to all those, which like you, spend their efforts to share knowledge with the others, without thinking only in the benefit they could get by hiding the candle under the table and getting money to let us spot the light";

Martin D. Siyaranamual, Center for Economics and Development Studies (CEDS), Padjadjaran University, Bandung, Indonesia: "I found it is very useful for me, since next September I will continue my study at Stockholm School of Economics. Thank you very much for what you have done, it helps me a lot, for my preparation before I go to the grad school."

J. Chand, Australia: "Many thanks for producing topology without tears. You book is fantastic.";

Richard Vande Velde, USA: "Two years ago I contacted you about downloading a copy of your "Topology without Tears"for my own use. At that time I was teaching a combined undergraduate / graduate course in topology. I gave the students the URL to access (online) the text. Even though I did not follow the topics and development in exactly the same order which you do, one of the better students in the class indicated that I should have made that the one and only required text for the course! I think that is a nice recommendation. Well, history repeats itself and two years later I am again teaching the same course to the same sort of audience. So, I would like

to be able to download a complete version of the text'';
Professor Sha Xin Wei, Fine Arts and Computer Science, Concordia University, Canada:
``Compliments on your very carefully and humanely written text on topology! I would like to consider adopting it for a course introducing "living"mathematics to ambitious scholarly peers and artists. It's always a pleasure to find works such as yours that reaches out to peers without compromise.'';
Associate Professor Dr Rehana Bari, Bangladesh: ``I am a course teacher of Topology in M.Sc. class of the department of Mathematics, University of Dhaka, Bangladesh. Can I have a copy of your wonderful book "Topology Without Tears"for my personal use?'';
Emrah Akyar, Department of Mathematics,Anadolu University, Turkey: "I have just seen your beautiful book "Topology without Tears"and I m planning to follow your book for this summer semester";
Rahul Nilakantan, PhD Student, Department of Economics University of Southern California, USA: ``I am a PhD student at the Department of Economics of the University of Southern California, Los Angeles. I hope to work in the area of general equilibrium with incomplete markets. This area requires a thorough understanding of topological concepts. Your excellent book was referred to me by a colleague of mine from Kansas University (a Mr. Ramu Gopalan). After having read part of the book from the non-printable pdf file, I have concluded that this is the book that I want to read to learn topology.''
Lionel Artige, Chargй de cours en Sciences Economiques HEC-ULg - Dйpartement d'Economie, Liиge, France: "Many thanks and congratulations for the pedagogical effort applied to your notes."
Long Nguyen, USA ``I have never seen any book so clear on such a difficult subject'';
Renato Orellana, Chile: ``Congratulations for your great book. I went through the first chapters and had a great time. I thought that topology was out of my reach, now I declare myself an optimist in this matter. '';
Sisay Regasa Senbeta, Assistant Dean, Faculty of Business and Economics, Addis Ababa University Ethopia:`` I am prospective PhD student of Economics currently a lecturer in Economics at Economics Department of Addis Ababa University, Ethiopia, East Africa. Could you please send me the printable version of your book?''
Nicanor M. Tuan, Davao Oriental State College of Science and Technology,Philippines:

“Greetings! I would like to express my gratitude for your unselfish act of sharing your instructional resources, you indeed help me and my students gain topological maturity. Thanks and more power”;
Ernita R. Calayag, Philippines:”I’m Ms. Ernita R. Calayag, a Filipino, student of De La Salle University taking up Ph. D. in Mathematics. I heard good things about your book “Topology Without Tears"and as student of mathematics, I just can’t miss the opportunity of having a copy and enjoy its benefits. I hope that with your approval I can start to understand Topology more as a foundational subject of mathematics.”
Nikola Matejic, Serbia: “Your book is really unique and valuable, suitable for a wide audience. This is a precious gift from You, which is appreciated worldwide. I think that almost everybody who needs to obtain appropriate knowledge in topology can benefit greatly from Your book.”
Iraj Davoodabadi, Iran: “(please excuse me for unsuitable letter) i am mechanical engineer. but i very very interest mathematics (more like to analysis). i am study myself without teacher. some subject in this is difficult for me (for example topology and abstract analysis) because my experiment in pure mathematics is’nt high yet. i now study your book(topology whithout tears). this book very very different from other books in this subject and teached me many things which abstract for me until now.[thank you]”;
M.A.R. Khan, Karachi: “thank you for remembering a third world student”.

0.4 Автор

Автор - Сидней (Шмуель) Аллен Моррис, Профессор Информатики и Глава Школы (факультета) Информационной Техологии и Математических Наук Балларатского Университета, Австралия. В различные годы он был Профессором Математики в Университете Южной Австралии, Университете Воллонгонга и Университете Новой Англии. Он также занимал различные позиции в Университете Латроб, Аделаидском Университете, Тель-Авивском Университете, Университете Тулана и в Колледже Северного Уэльса в Бангоре. Он является лауреатом премии Лестера Р. Форда от Американской Математической ассоциации. Он был Главным Редактором "Journal of Research and Practice in Information Technology редактором "Bulletin of the Australian Mathematical Society редактором "Journal of Group Theory и Главным Редактором Австралийской Серии Математических

Лекций – книги, публикуемые "Cambridge University Press". Он опубликовал четыре книги ([1] в соавторстве с Карлом Хейндрихом Хоффманом, “The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups”, European Mathematical Society Publishing House, xv + 678pp, 2007, ISBN 978-3-03719-032-6; [2] в соавторстве с Карлом Хейндрихом Хоффманом, “The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student — A Handbook for the Expert”, Second Revised and Augmented Edition, xviii + 858pp. , de Gruyter 2006. ISBN 978-3-11-019006-9 (ISBN10: 3-11-019006-0); [3] “Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups”, Cambridge University Press,1977, 136pp. (имеется русский перевод, опубликованный издательством "Мир"); [4] в соавторстве с Артуром Джонсом и Кеннетом Р. Пирсоном, “Abstract Algebra and Famous Impossibilities ”, Springer-Verlag Publishers, 1st ed. 1991, ISBN 0-387-97661-2, Corr. 2nd printing 1993, ISBN 3-540-97661-2), а также 140 научных статей. Он является пожизненным почетным членом Австралийского математического общества, Вице Президентом и Членом Совета которого он был в течение 20 лет. Он родился в Брисбане в 1947 году, получил степень бакалавра (с отличием) в Университете Квинсленда, а через год получил степень Доктора Философии в Университете Флиндерса. В различные годы, он занимал университетские должности Главы Департамента, Декана, Про-Ректора и Вице-Президента.

Глава 1

Топологические Пространства

Введение

Теннис, футбол, бейсбол и хоккей являются весьма захватывающими играми, но для того чтобы играть в них вы сперва должны выучить правила игры. В этом смысле, математика не отличается от этих игр. Поэтому мы начнем с правил топологии.

Эта глава начинается с определения топологии, а затем разбираются некоторые простые примеры: конечные топологические пространства, дискретные пространства, некоторые антидискретные пространства и пространства с конечно-замкнутой топологией.

Топология, также как и другие области чистой математики, как, например, теория групп, базируется на аксиомах. Поэтому мы начнем с аксиом, а затем, используя их, будем доказывать Предложения и Теоремы. Очень важно развить способность писать доказательства. Почему же доказательства так важны? Предположим, нам надо построить дом. Мы должны начать с фундамента. В нашем случае фундамент образуют аксиомы и определения - все остальное базируется на них. Каждая теорема или предложение представляют новый уровень знаний и должны быть твердо привязаны к предыдущему уровню. Мы привязываем новый уровень к предыдущему посредством доказательства. Таким образом теоремы и предложения являются новыми высотами, которыми мы овладеваем, в то время как доказательства являются цементом, прикрепляющим их к предыдущему уровню. Без доказательств конструкция развалится.

Итак, что же такое - математическое доказательство?

Математическое доказательство это надежная система аргументов, которая начинается с исходных данных, продолжается посредством использования логических доводов и заканчивается тем, что надо было доказать.

Вы должны начинать доказательства с написания исходных данных, затем надо четко сформулировать, что же требуется доказать. Если исходные данные или то что требуется доказать содержат технические термины, вы должны также написать определения этих терминов.

Каждое утверждение должно состоять из законченных предложений. Каждое их этих предложений должно быть или следствием предыдущих предложений или же теоремы, предложения или леммы, доказанных ранее. В этой книге вы встретите много доказательств, но учтите, что математика это не спорт для зрителей. Это игра для участников. И единственный способ научиться писать доказательства, это пытаться писать их самому.

1.1 Топология

1.1.1 Определения. Пусть X непустое множество. Множество $\mathcal{T}$ подмножеств X называется **топологией** на X если

(i) Само X и пустое множество $\emptyset$ принадлежат $\mathcal{T}$,

(ii) объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$, и

(iii) пересечение любых двух множеств из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$ называется **топологическим пространством**.

1.1.2 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ и

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Тогда $\mathcal{T}_1$ является топологией на X так как удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii) Определений 1.1.1. $\square$

1.1.3 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$ и

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}.$$

Тогда $\mathcal{T}_2$ $\boxed{\text{не}}$ является топологией на X так как объединение

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

двух членов $\mathcal{T}_2$ не принадлежит $\mathcal{T}_2$; то есть, $\mathcal{T}_2$ не удовлетворяет условию (ii) Определений 1.1.1. □

1.1.4 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ и

$$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Тогда $\mathcal{T}_3$ $\boxed{\text{не}}$ топология на X так как пересечение

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$$

двух множеств из $\mathcal{T}_3$ не принадлежит $\mathcal{T}_3$; то есть, $\mathcal{T}_3$ не удовлетворяет условию (iii) Определений 1.1.1. □

1.1.5 Пример. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел (то есть, множество всех положительных целых чисел) и пусть $\mathcal{T}_4$ состоит из $\mathbb{N}$, $\emptyset$, и всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{T}_4$ $\boxed{\text{не}}$ является топологией на $\mathbb{N}$, так как бесконечное объединение

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

членов $\mathcal{T}_4$ не принадлежит $\mathcal{T}_4$; то есть, $\mathcal{T}_4$ не обладает свойством (ii) Определений 1.1.1. □

1.1.6 Определения. Пусть X любое непустое множество и пусть $\mathcal{T}$ семейство всех подмножеств X. Тогда $\mathcal{T}$ называется **дискретной топологией** на множестве X. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **дискретным пространством**.

Отметим, что $\mathcal{T}$ в Определениях 1.1.6 удовлетворяет условиям Определений 1.1.1 и, следовательно, действительно является топологией..

Заметьте, что X в Определениях 1.1.6 может быть $\boxed{\text{любым}}$ непустым множеством. Таким образом существует бесконечное семейство дискретных пространств – по одному на каждое множество X.

1.1.7 Определения. Пусть X любое непустое множество и $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Тогда $\mathcal{T}$ называется **антидискретной топологией** и $(X, \mathcal{T})$ называется **антидискретным пространством**.

Снова нам надо проверить, что $\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям Определений 1.1.1 и, таким образом, действительно является топологией.

Заметим, что множество X из Определений 1.1.7 может быть $\boxed{\text{любым}}$ непустым множеством. Таким образом существует бесконечно много антидискретных пространств – по одному на каждое множество X.

В введении к настоящей главе мы обсудили важность доказательств и что нужно для их написания. Нашими первыми опытами доказательств будут доказательства Примера 1.1.8 и Предложения 1.1.9. Вы должны тщательно изучить их.

1.1.8 Пример. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и $\mathcal{T}$ топология на X, такая что $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, и $\{c\} \in \mathcal{T}$. Докажите, что $\mathcal{T}$ является дискретной топологией.

Доказательство.

Нам дано, что $\mathcal{T}$ топология и $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, and $\{c\} \in \mathcal{T}$.

Требуется доказать, что $\mathcal{T}$ дискретная топология; то есть, мы должны показать (по Определениям 1.1.6), что $\mathcal{T}$ содержит $\boxed{\text{все}}$ подмножества X. Напомним, что $\mathcal{T}$ является топологией и поэтому удовлетворяет условиям (i), (ii) и(iii) Определений 1.1.1. Таким образом, мы должны начать наше доказательство с перечисления всех подмножеств X.

МножествоX содержит 3 элемента и, поэтому, имеет 2^3 различных подмножеств. Все они перечислены здесь: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a,b\}$, $S_6 = \{a,c\}$, $S_7 = \{b,c\}$ и $S_8 = \{a,b,c\} = X$.

Мы должны доказать, что каждое из этих множеств содержится в $\mathcal{T}$. Так как $\mathcal{T}$ топология, из Определений 1.1.1 (i) следует, что X и $\emptyset$ принадлежат $\mathcal{T}$; то есть, $S_1 \in \mathcal{T}$ и $S_8 \in \mathcal{T}$.

Нам также дано, что $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ и $\{c\} \in \mathcal{T}$; то есть, $S_2 \in \mathcal{T}$, $S_3 \in \mathcal{T}$ и $S_4 \in \mathcal{T}$.

Чтобы завершить доказательство нам надо показать, что $S_5 \in \mathcal{T}$, $S_6 \in \mathcal{T}$, и $S_7 \in \mathcal{T}$. Но $S_5 = \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$. Так как нам дано, что $\{a\}$ и $\{b\}$ принадлежат $\mathcal{T}$, из Определений 1.1.1 (ii) следует, что их объединение также принадлежит $\mathcal{T}$; то есть, $S_5 = \{a,b\} \in \mathcal{T}$.

Аналогично $S_6 = \{a,c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$ и $S_7 = \{b,c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$. □

Во введении к этой главе мы отметили, что математика не является спортом для зрителей. Вы должны быть активным участником. Конечно же ваше участие включает решение некоторых упражнений. Но мы ожидаем большего от вас. Вы должны bохдумать о представленном материале. Одной из ваших задач является задавание "правильных"вопросов после просмотра доказательств. Например, мы только что показали, что если каждое одноэлементное множество $\{a\}$, $\{b\}$ and $\{c\}$ принадлежит $\mathcal{T}$ и $X = \{a,b,c\}$, тогда $\mathcal{T}$ является дискретной топологией. Вы должны спросить, является ли это единичным примером или же частным случаем более общего феномена; то есть, если $(X, \mathcal{T})$ является топологическим пространством, содержащим каждое одноэлементное множество, обязательно ли $\mathcal{T}$ должна быть дискретной топологией? Ответ на этот вопрос положительный, что доказывается в Предложении 1.1.9.

1.1.9 Предложение. Если $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство такое, что для любого $x \in X$, одноэлементное множество $\{x\}$ принадлежит $\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}$ является дискретной топологией.

Доказательство.

Этот результат является обобщением Примера 1.1.8. Таким образом, вы можете ожидать, что и доказательство будет похожим. Однако мы не можем перечислить все подмножества X как мы сделали в Примере 1.1.8, так как X может быть бесконечным множеством. Тем не менее, мы должны доказать, что $\boxed{\text{каждое}}$ подмножество X принадлежит $\mathcal{T}$. У вас может появиться искушение доказать результат для некоторых частных случаев, например если X состоит из 4, 5 или даже 100 элементов. Но такой подход обречен на неудачу. Вспомните, что во введении к этой главе мы описали математическое доказательство как надежный аргумент. Мы не можем считать надежным довод, который рассматривает только несколько частных случаев, или даже большое число частных случаев. Надежный довод должен покрывать $\boxed{\text{все}}$ случаи. Поэтому мы должны рассмотреть случай произвольного непустого множества X. Каким-то образом мы должны доказать, что каждое подмножество X принадлежит $\mathcal{T}$. Возвращаясь к доказательству Примера 1.1.8, мы видим, что ключом к доказательству является то, что каждое подмножество X является объединением одноэлементных подмножеств X и, мы уже знаем, что все эти одноэлементные множества принадлежат $\mathcal{T}$. Это верно и в общем случае.

Мы начинаем доказательство с записи факта о том, что каждое множество является объединением своих одноэлементных подмножеств. Пусть S произвольное подмножество X. Тогда

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

Так как нам дано, что каждое множество $\{x\}$ принадлежит $\mathcal{T}$, Определения 1.1.1 (ii) и вышеприведенное тождество показывает, что $S \in \mathcal{T}$. Так как S произвольное подмножество X, мы имеем, что $\mathcal{T}$ является дискретной топологией. □

Утверждение о том, что каждое множество S является объединением своих одноэлементных подмножеств будет использовано в этой книге много раз, в совершенно различных контекстах. Заметьте, что это утверждение выполняется даже если $S = \emptyset$ так как тогда мы образуем то, что называется **пустым объединением** и получаем $\emptyset$ в качестве результата.

Упражнения 1.1

1. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Определите какие из следующих подмножеств X являются топологией на X:

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{a, f\},\ \{b, f\},\ \{a, b, f\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X,\ \emptyset,\ \{a, b, f\},\ \{a, b, d\},\ \{a, b, d, f\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X,\ \emptyset,\ \{f\},\ \{e, f\},\ \{a, f\}\}$.

2. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Какие из следующих подмножеств X являются топологией на X? (Объясните ответы.)

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X,\ \emptyset,\ \{c\},\ \{b, d, e\},\ \{b, c, d, e\},\ \{b\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b, d, e\},\ \{a, b, d\},\ \{a, b, d, e\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X,\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a, b, c\},\ \{d, e, f\},\ \{b, d, e, f\}\}$.

3. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $\mathcal{T}$ дискретная топология на X, которые из следующих утверждений являются верными?

(a) $X \in \mathcal{T}$; (b) $\{X\} \in \mathcal{T}$; (c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$; (d) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(e) $\emptyset \in X$; (f) $\{\emptyset\} \in X$; (g) $\{a\} \in \mathcal{T}$; (h) $a \in \mathcal{T}$;

(i) $\emptyset \subseteq X$; (j) $\{a\} \in X$; (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$; (l) $a \in X$;

(m) $X \subseteq \mathcal{T}$; (n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$; (o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$; (p) $a \subseteq \mathcal{T}$.

[Подсказка. Ровно шесть из вышеприведенных утверждений являются верными.]

4. Пусть $(X, \mathcal{T})$ произвольное топологическое пространство. Убедитесь, что пересечение произвольного конечного числа членов $\mathcal{T}$ также является членом $\mathcal{T}$.

   [Подсказка. Примените "математическую индукцию".]

5. Пусть $\mathbb{R}$ множество всех действительных чисел. Докажите, что каждое из следующих семейств подмножеств $\mathbb{R}$ является топологией.

   (i) $\mathcal{T}_1$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $(-n, n)$, где n произвольное положительное целое число;

   (ii) $\mathcal{T}_2$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $[-n, n]$, где n произвольное положительное целое число;

   (iii) $\mathcal{T}_3$ состоит их $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $[n, \infty)$, где n произвольное положительное целое число;

6. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех положительных целых чисел. Докажите, что каждое из следующих семейств подмножеств $\mathbb{N}$ является топологией.

   (i) $\mathcal{T}_1$ состоит из $\mathbb{N}$, $\emptyset$, и всех множеств вида $\{1, 2, \dots, n\}$, где n произвольное положительное целое число. (Эта топология называется **топологией начального сегмента**.)

   (ii) $\mathcal{T}_2$ состоит из $\mathbb{N}$, $\emptyset$, и всех множеств вида $\{n, n+1, \dots\}$, где n произвольное положительное целое число. (Эта топология называется **топологией конечного сегмента**.)

7. Перечислите все возможные топологии на следующих множествах:

(a) $X = \{a, b\}$;

(b) $Y = \{a, b, c\}$.

8. Пусть X бесконечное множество и $\mathcal{T}$ топология на X. Докажите, что если каждое бесконечное подмножество X принадлежит $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T}$ дискретная топология.

9.* Пусть $\mathbb{R}$ множество всех действительных чисел. В точности три из следующих десяти семейств подмножеств $\mathbb{R}$ являются топологиями. Найдите эти семейства и обоснуйте свой ответ.

(i) $\mathcal{T}_1$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида (a, b), где a и b произвольные действительные числа такие, что $a < b$;

(ii) $\mathcal{T}_2$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $(-r, r)$, где r произвольное положительное действительное число;

(iii) $\mathcal{T}_3$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $(-r, r)$, где r произвольное положительное рациональное число;

(iv) $\mathcal{T}_4$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $[-r, r]$, где r произвольное положительное рациональное число;

(v) $\mathcal{T}_5$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $(-r, r)$, где r произвольное положительное иррациональное число;

(vi) $\mathcal{T}_6$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $[-r, r]$, где r произвольное положительное иррациональное число;

(vii) $\mathcal{T}_7$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $[-r, r)$, где r произвольное положительное действительное число;

(viii) $\mathcal{T}_8$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, и всех интервалов вида $(-r, r]$, где r произвольное положительное действительное число;

(ix) $\mathcal{T}_9$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, всех интервалов вида $[-r, r]$ и $(-r, r)$, где r произвольное положительное действительное число;

(x) $\mathcal{T}_{10}$ состоит из $\mathbb{R}$, $\emptyset$, всех интервалов вида $[-n, n]$ и $(-r, r)$, где n произвольное положительное целое число, а r произвольное положительное действительное число.

1.2 Открытые Множества, Замкнутые Множества и Открыто-Замкнутые Множества

Вместо того, чтобы постоянно ссылаться на "множества из топологии $\mathcal{T}$ удобнее дать таким множествам специальное название. Мы будем называть из "открытыми множествами". У нас будет также специальное название для дополнений к открытым множествам. Они будут называться "замкнутыми множествами". Эта терминология не идеальна, она наследует эти названия от "открытых интервалов"и "замкнутых интервалов"на действительной прямой. Мы скажем больше по этому поводу в Главе 2.

1.2.1 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ произвольное топологическое пространство. Члены $\mathcal{T}$ называются **открытыми множествами**.

1.2.2 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ произвольное топологическое пространство, тогда

(i) X и $\emptyset$ являются открытыми множествами,

(ii) объединение любого (конечного или бесконечного) числа открытых множеств является открытым и

(iii) пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым.

Доказательство. Очевидно, что (i) и (ii) являются тривиальными следствиями Определения 1.2.1 и Определений 1.1.1 (i) и (ii). Условие (iii) следует из Определения 1.2.1 и Упражнения 1.1 #4. $\square$

При чтении Предложения 1.2.2 у вас может возникнуть вопрос: в то время как произвольные конечные или бесконечные объединения открытых множеств являются открытыми, мы утверждаем, что только $\boxed{\text{конечные}}$ пересечения открытых множеств открыты. Являются ли бесконечные пересечения открытых множеств всегда открытыми? Следующий пример показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен.

1.2.3 Пример. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех положительных целых чисел и пусть $\mathcal{T}$ состоит из $\emptyset$ и всех подмножеств S из $\mathbb{N}$ таких, что дополнение S в $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus S$ является конечным множеством. Легко проверить, что $\mathcal{T}$ удовлетворяет Определениям 1.1.1 и, таким образом, является топологией на $\mathbb{N}$. (В следующей секции мы обсудим эту топологию подробнее. Она называется конечно-замкнутой топологией.) Для каждого натурального n, определим множество S_n следующим образом:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

Очевидно, каждое S_n является открытым в топологии $\mathcal{T}$, так как дополнения к ним конечны. Однако,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\}. \tag{1}$$

Так как дополнение к $\{1\}$ не совпадает с $\mathbb{N}$ и не является конечным множеством, множество $\{1\}$ не открыто. Таким образом, (1) показывает, что пересечение открытых множеств S_n не является открытым. □

Вы можете также спросить: как удалось найти Пример 1.2.3? Ответ неутешителен — путем проб и ошибок!

Если бы мы проверили, например, дискретную топологию, мы бы обнаружили, что любое пересечение открытых множеств открыто. То же самое верно для антидискретной топологии. Поэтому, здесь нам была нужна разумная догадка.

Запомните, что для того чтобы доказать, что пересечение открытых множеств необязательно открыто, достаточно найти один контрпример!

1.2.4 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Подмножество S из X называется **замкнутым множеством** in $(X, \mathcal{T})$ если его дополнение в X, а именно $X \setminus S$, открыто в $(X, \mathcal{T})$.

в Примере 1.1.2, замкнутыми множествами являются

$$\emptyset, X, \{b, c, d, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, e, f\} \text{ and } \{a\}.$$

Если $(X, \mathcal{T})$ дискретное пространство, тогда очевидно, что каждое подмножество X замкнуто. Тогда как в антидискретном пространстве $(X, \mathcal{T})$ единственными замкнутыми множествами являются X и $\emptyset$.

1.2.5 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ произвольное топологическое пространство, тогда

(i) $\emptyset$ и X замкнутые множества,

(ii) пересечение любого (конечного или бесконечного) числа замкнутых множеств замкнуто и

(iii) объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. (i) Немедленно следует из Предложения 1.2.2 (i) и Определения 1.2.4, так как дополнением X является $\emptyset$ и дополнением $\emptyset$ является X.

Чтобы доказать (iii), предположим, что $S_1, S_2, \ldots, S_n$ замкнутые множества. Нам надо доказать, что и $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ замкнутое множество. По определению 1.2.4 достаточно показать, что множество $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$ открыто.

Так как $S_1, S_2, \ldots, S_n$ замкнутые множества, их дополнения $X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$, $\ldots$, $X \setminus S_n$ являются открытыми. Но

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n). \tag{1}$$

Так как правая часть (1) является конечным пересечением открытых множеств, это открытое множество. Поэтому левая часть (1) также открытое множество. Следовательно, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ замкнутое множество. Таким образом (iii) доказано.

Доказательство пункта (ii) аналогично доказательству (iii). [Однако, вы должны прочитать предупреждение в доказательстве Примера 1.3.9.] □

Предупреждение. Названия "открытое" и "замкнутое" часто являются источником ошибок для новичков. Несмотря на название, некоторые открытые множества в то же время являются и замкнутыми! Более того, некоторые множества не являются ни открытыми ни замкнутыми! Действительно, в Примере 1.1.2 мы увидели, что

(i) множество $\{a\}$ одновременно открыто и замкнуто.

(ii) множество $\{b, c\}$ ни открыто ни замкнуто;

(iii) множество $\{c, d\}$ открыто, но не замкнуто;

(iv) множество $\{a, b, e, f\}$ замкнуто, но не открыто.

В дискретном пространстве каждое множество одновременно открыто и замкнуто, в то время как в антидискретном пространстве $(X, \mathcal{T})$, все подмножества X кроме самого X и $\emptyset$ не являются ни открытыми ни замкнутыми. $\square$

Чтобы напомнить вам, что множества могут быть одновременно и открытыми и замкнутыми, мы вводим следующее определение.

1.2.6 Определение. Подмножество S топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется **открыто-замкнутым** если оно одновременно открыто и замкнуто в $(X, \mathcal{T})$.

В каждом топологическом пространстве $(X, \mathcal{T})$ оба множества X и $\emptyset$ являются открыто-замкнутыми[1].

В дискретном пространстве все подмножества X открыто-замкнуты.

В антидискретном пространстве единственными открыто-замкнутыми множествами являются X и $\emptyset$.

Примеры 1.2

[1]Мы признаем, что термин "открыто-замкнутый" уродлив, но он общепринят.

1. Перечислите все 64 подмножества множества X из Примера 1.1.2. Для каждого из множеств определите является ли оно (i) открыто-замкнутым; (ii) ни открытым ни замкнутым; (iii) открытым, но не замкнутым; (iv) замкнутым, но не открытым.

2. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство такое, что каждое его подмножество замкнуто. Докажите, что это дискретное пространство.

3. Заметьте, что если $(X, \mathcal{T})$ дискретное или антидискретное пространство, то каждое открытое множество является открыто-замкнутым. Найдите топологию $\mathcal{T}$ на множестве $X = \{a, b, c, d\}$, которая не является ни дискретной ни антидискретной, но в которой каждое открытое множество открыто-замкнуто.

4. Пусть X бесконечное множество. Пусть $\mathcal{T}$ топология на X такая, что каждое бесконечное подмножество X замкнуто. Докажите, что $\mathcal{T}$ дискретная топология.

5. Пусть X бесконечное множество, $\mathcal{T}$ топология на X такая, что единственным бесконечным открытым множеством является само X X. Обязательно ли $(X, \mathcal{T})$ антидискретное пространство?

6. (i) Пусть $\mathcal{T}$ топология на множестве X такая, что $\mathcal{T}$ состоит в точности из четырех множеств; то есть, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$, где A и B различные непустые собственные подмножества X. [A называется **собственным подмножеством** X если $A \subseteq X$ и $A \neq X$. Это обозначается посредством $A \subset X$.] Докажите, что A и B должны удовлетворять в точности одному из следующих условий:

$$(a)\ B = X \setminus A; \qquad (b)\ A \subset B; \qquad (c)\ B \subset A.$$

[Подсказка. Сначала покажите, что A и B удовлетворяют по крайней мере одному из условий, а затем покажите, что они не могут удовлетворять больше чем одному из условий.]

(ii) Используя (i) перечислите все топологии на $X = \{1, 2, 3, 4\}$, которые содержат в точности четыре множества.

1.3 Конечно-Замкнутая Топология

Как правило, топология на множестве задается определением открытых подмножеств этого множества. Впрочем, иногда более естественно дать описание замкнутых подмножеств. Следующее определение служит таким примером.

1.3.1 Определение. Пусть X произвольное непустое множество. Топология $\mathcal{T}$ на X называется **конечно-замкнутой топологией** или **ко-конечной топологией** если замкнутыми множествами X являются само X и все конечные подмножества X; то есть, открытыми множествами являются $\emptyset$ и все подмножества X , которые имеют конечные дополнения.

В очередной раз нам надо проверить, что $\mathcal{T}$ в Определении 1.3.1 действительно является топологией; то есть, удовлетворяет условиям Определения 1.1.1.

Заметьте, что Определение 1.3.1 не утверждает, что каждая топология, в которой X и все конечные подмножества X замкнуты является конечно-замкнутой топологией. Эти множества должны быть $\boxed{\text{единственными}}$ замкнутыми множествами. [Конечно, в дискретной топологии на произвольном множестве X, множество X и все конечные подмножества X замкнуты, но таковыми являются и любые другие подмножества X.]

В конечно-замкнутой топологии все конечные множества замкнуты. Однако, как показывает следующий пример, не все бесконечные множества обязаны быть открытыми.

1.3.2 Пример. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех положительных целых чисел, такие множества как $\{1\}$, $\{5,6,7\}$, $\{2,4,6,8\}$ являются конечными и, поэтому, замкнутыми в конечно-замкнутой топологии. Таким образом их дополнения

$$\{2,3,4,5,\dots\},\ \{1,2,3,4,8,9,10,\dots\},\ \{1,3,5,7,9,10,11,\dots\}$$

являются открытыми в конечно-замкнутой топологии. С другой стороны, множество всех положительных четных чисел не является замкнутым, так как не является конечным, следовательно дополнение к нему, множество всех нечетных положительных чисел, не является открытым в конечно-замкнутой топологии. Итак, в то время как все конечные множества замкнуты, не все бесконечные множества открыты. □

1.3.3 Пример. Пусть $\mathcal{T}$ конечно-замкнутая топология на множестве X. Докажите, что если X содержит по меньшей мере три различных открыто-замкнутых подмножества, то X конечное множество.

Доказательство.

Нам дано, что $\mathcal{T}$ открыто-замкнутая топология, и что существует по крайней мере 3 различных открыто-замкнутых подмножества.

Требуется доказать, что X конечное множество.

Вспомните, что то что $\mathcal{T}$ конечно-замкнутая топология означает, что семейство всех замкнутых множеств состоит из X и всех конечных подмножеств X. Вспомните также, что множество является открыто-замкнутым тогда и только тогда когда оно одновременно открыто и замкнуто.

И еще, каждое топологическое пространство содержит по крайней мере 2 открыто-замкнутых множества, а именно X и $\emptyset$. (Смотри комментарий сразу после Определения 1.2.6.) Но нам было сказано, что в пространстве $(X, \mathcal{T})$ существуют по крайней мере 3 открыто-замкнутых множества. Это означает, что существует открыто-замкнутое множество, отличное от $\emptyset$ и X. То есть нам надо обратить внимание именно на это открыто-замкнутое множество!

Так как в нашем пространстве $(X, \mathcal{T})$ имеется 3 различных открыто-замкнутых множества, мы знаем, что в нем должно быть открыто-замкнутое множество S такое, что $S \neq X$ and $S \neq \emptyset$. Так как S открыто в $(X, \mathcal{T})$, из Определения 1.2.4 следует, что дополнение к нему $X \setminus S$ замкнуто.

Таким образом, S и $X \setminus S$ замкнуты в конечно-замкнутой топологии $\mathcal{T}$. То есть, S и $X \setminus S$ оба конечны, поскольку ни одно из них не равно X. Но $X = S \cup (X \setminus S)$

следовательно X является объединением двух конечных множеств. Итак, мы показали, что X конечное множество. $\square$

Мы уже знаем три различные топологии, которые можно задать на произвольном бесконечном множестве, конечно же их на самом деле намного больше. Три топологии, с которыми мы ознакомились - это дискретная топология, антидискретная топология и конечно-замкнутая топология. Поэтому, говоря о топологии на множестве, мы всегда должны указывать, о какой топологии идет речь.

Например, множество $\{n : n \geq 10\}$ открыто в конечно-замкнутой топологии на множестве натуральных чисел, но не открыто в антидискретной топологии. Множество всех нечетных чисел открыто в дискретной топологии на множестве натуральных чисел, но не является таковым в конечно-замкнутой топологии.

Нам нужно дать несколько определений, с которыми вы, возможно, уже знакомы.

1.3.4 Определения. Пусть f функция из множества X в множество Y.

(i) Функция f называется **инъективной** если $f(x_1) = f(x_2)$ влечет $x_1 = x_2$, для $x_1, x_2 \in X$;

(ii) Функция f называется **сюръективной** если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$;

(iii) Функция f называется **биективной** если она одновременно инъективна и сюръективна.

1.3.5 Определения. Пусть f функция из множества X в множество Y. Функция f называется **обратимой** если существует функция g из Y в X такая, что $g(f(x)) = x$, для всех $x \in X$ и $f(g(y)) = y$, для всех $y \in Y$. Функция g называется **обратной функцией** к f.

Доказательство следующего предложения оставляется вам в качестве упражнения.

1.3.6 Предложение. Пусть f функция их множества X в множество Y.

(i) Функция f обратима тогда и только тогда, когда f биективна.

(ii) Пусть g_1 и g_2 функции из Y в X. Если g_1 и g_2 обе являются обратными к f, тогда $g_1 = g_2$; то есть, $g_1(y) = g_2(y)$, для всех $y \in Y$.

(iii) Пусть g функция из Y в X. Тогда g является обратной функцией к f тогда и только тогда, когда f является обратной к g.

Предупреждение. Иногда студенты делают ошибку считая, что функция инъективна если она отображает ‘‘одну точку в одну точку’’.

Все функции отображают одну точку в одну точку. На самом деле это часть определения функции.

Инъективная функция это функция, которая отображает различные точки в различные точки. □

Теперь мы обратимся к очень важному понятию, которое вы могли и не встречать раньше.

1.3.7 Определение. Пусть f функция из множества X в множество Y. Пусть S произвольное подмножество Y, тогда множество $f^{-1}(S)$ определяется как

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ and } f(x) \in S\}.$$

Подмножество $f^{-1}(S)$ множества X называется **прообразом** S.

Заметим, что обратная функция к $f\colon X \to Y$ существует тогда и только тогда, когда f биективна. В то время как прообраз произвольного подмножества Y существует даже если f не является ни инъективной ни сюръективной. Следующий пример иллюстрирует это.

1.3.8 Пример. Пусть f функция из множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в себя, заданная формулой $f(z) = |z|$, для любого $z \in \mathbb{Z}$.

Функция f не является инъективной, так как $f(1) = f(-1)$.

Она также не является сюрьективной, так как не существует $z \in \mathbb{Z}$ такого, что $f(z) = -1$. Таким образом f не является биекцией. Следовательно, как следует из Предложения 1.3.6 (i), f не имеет обратной функции. Однако прообразы определенно существуют. Например,

$$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1,-2,-3,1,2,3\}$$
$$f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\}) = \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}. \qquad \square$$

Мы заканчиваем этот раздел одним интересным примером.

1.3.9 Пример. Пусть $(Y, \mathcal{T})$ топологическое пространство и X непустое множество. Далее, пусть f функция из X в Y. Определим $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$. Докажите, что $\mathcal{T}_1$ топология на X.

Доказательство.

Наша задача показать, что семейство множеств $\mathcal{T}_1$ является топологией на X; то есть, мы должны показать, что $\mathcal{T}_1$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii) Определений 1.1.1.

$$X \in \mathcal{T}_1 \quad \text{так как} \quad X = f^{-1}(Y) \quad \text{и} \quad Y \in \mathcal{T}.$$
$$\emptyset \in \mathcal{T}_1 \quad \text{так как} \quad \emptyset = f^{-1}(\emptyset) \quad \text{и} \quad \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Следовательно $\mathcal{T}_1$ удовлетворяет условию (i) Определений 1.1.1.

Чтобы проверить условие (ii) Определений 1.1.1, предположим, что $\{A_j : j \in J\}$ семейство членов $\mathcal{T}_1$, где J некоторое множество индексов. Мы должны показать, что $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$. Так как $A_j \in \mathcal{T}_1$, из определения $\mathcal{T}_1$ следует, что $A_j = f^{-1}(B_j)$, где $B_j \in \mathcal{T}$. Также $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$. [Смотри упражнение 1.3 # 1.]

Далее, $B_j \in \mathcal{T}$, для всех $j \in J$, поэтому $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$, так как $\mathcal{T}$ топология на Y. Следовательно, по определению $\mathcal{T}_1$, $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \in \mathcal{T}_1$; то есть, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$.

Итак $\mathcal{T}_1$ удовлетворяет свойству (ii) Определений 1.1.1.

[**Предупреждение.** Напоминаем, что не все множества счетны. (Смотри Аппендикс.) Поэтому недостаточно, как это было сделано в вышеприведенном доказательстве, предполагать, что множества $A_1, A_2 \dots, A_n, \dots$ лежат в $\mathcal{T}_1$ и затем показать, что $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ принадлежит $\mathcal{T}_1$. Это доказывает только, что объединение $\boxed{\text{счетного}}$ числа множеств из $\mathcal{T}_1$ лежит в $\mathcal{T}_1$, но не показывает, что $\mathcal{T}_1$ обладает свойством (ii) Определений 1.1.1 – это условие требует чтобы $\boxed{\text{всевозможные}}$ объединения, счетные или несчетные, множеств из $\mathcal{T}_1$ лежали в $\mathcal{T}_1$.]

Наконец, пусть A_1 и A_2 принадлежат $\mathcal{T}_1$. Мы должны показать, что $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$.

As $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1,\ A_1 = f^{-1}(B_1)$ и $A_2 = f^{-1}(B_2)$, где $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$.

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2). \qquad \text{[Смотри Упражнения 1.3 \#1.]}$$

Так как $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$, мы имеем $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$. Следовательно $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$, и мы показали, что $\mathcal{T}_1$ удовлетворяет условию (iii) Определений 1.1.1.

Таким образом, $\mathcal{T}_1$ действительно является топологией на X. $\square$

Упражнения 1.3

1. Пусть f функция из множества X в множество Y. В Примере 1.3.9 мы утверждали, что
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \tag{1}$$
и
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \tag{2}$$
для любых подмножеств B_j из Y, и любого множества индексов J.

   (a) Докажите, что (1) верно.
   [Подсказка. Начните ваше доказательство с предположения, что x произвольный элемент множества из левой стороны формулы и покажите, что он принадлежит множеству из правой стороны. Затем проделайте это рассуждение в обратном направлении.]

(b) Докажите, что (2) верно.

(c) Найдите (конкретные) множества $A_1, A_2, X,$ и Y и функцию $f\colon X \to Y$ такую, что $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$, где $A_1 \subseteq X$ и $A_2 \subseteq X$.

2. Является ли топология $\mathcal{T}$ описанная в Упражнениях 1.1 #6 (ii) конечно-замкнутой топологией? (Обоснуйте ваш ответ.)

3. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется T_1-пространством если каждое одноэлементное множество $\{x\}$ замкнуто в $(X, \mathcal{T})$. Покажите, что в точности два из следующих девяти пространств являются T_1-пространствами. (Обоснуйте ваш ответ.)

   (i) дискретное пространство;

   (ii) антидискретное пространство, содержащее по крайней мере две точки;

   (iii) бесконечное множество с конечно-замкнутой топологией;

   (iv) Пример 1.1.2;

   (v) Примеры 1.1 #5 (i);

   (vi) Примеры 1.1 #5 (ii);

   (vii) Примеры 1.1 #5 (iii);

   (viii) Примеры 1.1 #6 (i);

   (ix) Примеры 1.1 #6 (ii).

4. Пусть $\mathcal{T}$ конечно-замкнутая топология на множестве X. Если $\mathcal{T}$ к тому же дискретная топология, докажите, что X конечно.

5. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется T_0-пространством если для каждой пары различных точек a, b из X, либо существует открытое множество, содержащее a, но не b, либо существует открытое множество, содержащее b, но не a.

   (i) Докажите, что каждое T_1-пространство является T_0-пространством.

   (ii) Какие из пространств (i)–(vi) из Упражнения 3 являются T_0-пространствами? (Обоснуйте ваш ответ.)

(iii) Определите топологию $\mathcal{T}$ на множестве $X = \{0, 1\}$ таким образом, чтобы $(X, \mathcal{T})$ являлось T_0-пространством, но не T_1-пространством. [Полученное пространство называется **пространством Серпинского**.]

(iv) Докажите, что каждое из топологических пространств, описанных в Упражнениях 1.1 #6 является T_0-пространством. (Обратите внимание на то, что в Упражнении 3 мы доказали, что ни одно из них не является T_1-пространством.)

6. Пусть X произвольное бесконечное множество. **Счетно-замкнутая топология** определяется как топология замкнутыми множествами которой являются только само X и все счетные подмножества X. Докажите, что это действительно топология на X.

7. Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологии на множестве X. Докажите каждое из следующих утверждений.

(i) Если $\mathcal{T}_3$ определяется как $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, тогда $\mathcal{T}_3$ не обязательно топология на X. (Обоснуйте ваш ответ, приведя конкретный пример.)

(ii) If $\mathcal{T}_4$ определяется как $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, тогда $\mathcal{T}_4$ топология на X. (Топология $\mathcal{T}_4$ называется **пересечением** топологий $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$.)

(iii) Если $(X, \mathcal{T}_1)$ и $(X, \mathcal{T}_2)$ T_1-пространства, то $(X, \mathcal{T}_4)$ тоже T_1-пространство.

(iv) Если $(X, \mathcal{T}_1)$ и $(X, \mathcal{T}_2)$ T_0-пространства, то $(X, \mathcal{T}_4)$ не обязательно T_0-пространство. (Обоснуйте ваш ответ, приведя конкретный пример.)

(v) Если $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$ топологии на множестве X, тогда $\mathcal{T} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ топология на X.

(vi) Если для каждого $i \in I$, где I некоторое множество индексов, каждое $\mathcal{T}_i$ является топологией на множестве X, тогда $\mathcal{T} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ топология на X.

1.4 Заключение

В этой главе мы ввели фундаментальное понятие топологического пространства. В качестве примеров мы изучали различные конечные топологические пространства[2], а также дискретные пространства, антидискретные пространства и пространства с конечно-замкнутой топологией. Ни одно из этих пространств не является особенно важным, когда дело касается приложений. Однако, в Примерах 4.3 #8, отмечено, что каждое бесконечное топологическое пространство "содержит" бесконечное топологическое пространство с одной из следующих топологий: антидискретная топология, дискретная топология, конечно-замкнутая топология, топология начального сегмента, или топология конечного сегмента из Упражнений 1.1 #6. В следующей главе мы определим очень важную Эвклидову топологию.

По ходу дела мы познакомились с терминами “открытое множество” и “замкнутое множество”, а также были предупреждены, что эти названия могут ввести в заблуждение. Множества могут одновременно быть и открытыми, и замкнутыми, ни открытыми, ни замкнутыми, открытыми, но не замкнутыми, или замкнутыми , но не открытыми. Важно запомнить, что мы не можем доказать, что множество открыто посредством доказания, что оно не замкнуто. Помимо определений топологии, топологического пространства, открытого множества и замкнутого множества, была затронута важная тема писания доказательств.

В начале главы мы указали на важность умения писать доказательства. В Примере 1.1.8, Предложении 1.1.9 и примере 1.3.3 мы увидели как “продумывать” доказательства. Очень важно развить собственную технику писания доказательств. Для этой цели очень хороши Упражнения 1.1 #8, Упражнения 1.2 #2,4, и Упражнения 1.3 #1,4.

Некоторых студентов смущает определение топологии, так как оно включает “множества множеств”. Чтобы проверить ваше понимание, проделайте упражнения 1.1 #3.

В этих упражнениях используются понятия T_0-пространства и T_1-пространства,

---

[2] Под **конечным топологическим пространством** мы подразумеваем топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ где множество X конечно.

которые формально будут введены позже. Эти понятия известны как **свойства отделимости**.

И наконец, мы делаем ударение на важности прообразов. Эта тема обсуждается в Упражнениях 1.3.9 и Упражнениях 1.3 #1. Наше определение непрерывности будет основанно на прообразах.

Глава 2

Эвклидова топология

Введение

В кинофильме или художественном произведении, обычно присутствуют несколько центральных персонажей, вокруг которых закручивается сюжет. В истории о топологии, одним из таких персонажей является эвклидова топология на действительной прямой. Действительно, это настолько богатый пример, что мы часто будем возвращаться к нему как к неисчерпаемому источнику примеров и вдохновения.

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество всех действительных чисел. В Главе 1 мы определили три топологии, которые могут быть определены на любом множестве: дискретная топология, антидискретная топология и конечно-замкнутая топология. Таким образом, мы уже знаем три топологии, которыми можно наделить $\mathbb{R}$. Еще шесть топологий на $\mathbb{R}$ были определены в упражнениях 1.1 #5 и #9. В этой главе мы опишем намного более важную и интересную топологию на $\mathbb{R}$, которая известна как эвклидова топология.

Анализ эвклидовой топологии приведет нас к понятию "базиса топологии". Из курса линейной алгебры мы знаем, что каждое векторное пространство имеет базис, и каждый вектор является линейной комбинацией членов этого базиса. Аналогично, в топологическом пространстве каждое открытое множество представимо как объединение элементов базиса. То есть, множество открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением членов базиса.

2.1 Эвклидова топология на $\mathbb{R}$

2.1.1 Определение. Подмножество S множества $\mathbb{R}$ является открытой в **эвклидовой топологии на** $\mathbb{R}$ если оно удовлетворяет следующему условию:

$(*)$ Для любого $x \in S$, существуют a, b из $\mathbb{R}$, $a < b$, такие что $x \in (a, b) \subseteq S$.

Соглашение. Когда бы мы ни упомянули топологическое пространство $\mathbb{R}$ без явного указания топологии, мы подразумеваем $\mathbb{R}$ с эвклидовой топологией.

2.1.2 Замечания. (i) "Эвклидова топология" $\mathcal{T}$ является топологией.

Доказательство.

Нам нужно показать, что $\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям (i), (ii), и (iii) Определений 1.1.1.

Нам дано, что множество принадлежит $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию $*$.

Сначала покажем, что $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Если мы положим $a = x - 1$ и $b = x + 1$, тогда $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$; то есть, $\mathbb{R}$ обладает свойством $*$ и, таким образом, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Далее, $\emptyset \in \mathcal{T}$ так как $\emptyset$ обладает свойством $*$ по определению.

Допустим $\{A_j : j \in J\}$, для некоторого множества индексов J, является семейством элементов $\mathcal{T}$. Мы должны показать, что $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$; то есть, что $\bigcup_{j \in J} A_j$ удовлетворяет условию $*$. Пусть $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Тогда $x \in A_k$, для некоторого $k \in J$. Так как $A_k \in \mathcal{T}$, существуют a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$, такие, что $x \in (a, b) \subseteq A_k$. Так как $k \in J$, $A_k \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ следовательно $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$. Таким образом $\bigcup_{j \in J} A_j$ удовлетворяет условию $*$ и поэтому принадежит $\mathcal{T}$, что и требовалось показать.

Наконец, пусть A_1 и A_2 принадлежат $\mathcal{T}$. Мы должны доказать, что $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Предположим, $y \in A_1 \cap A_2$. Тогда $y \in A_1$. Так как $A_1 \in \mathcal{T}$, существуют a и b из $\mathbb{R}$,$a < b$, такие, что $y \in (a, b) \subseteq A_1$. Также мы имеем, что $y \in A_2 \in \mathcal{T}$. Поэтому существуют

c и d из $\mathbb{R}$, $c < d$, такие, что $y \in (c,d) \subseteq A_2$. Обозначим через e наибольшее из чисел a и c, а через f наименьшее из чисел b and d. Легко проверить, что $e < y < f$, следовательно $y \in (e,f)$. Так как $(e,f) \subseteq (a,b) \subseteq A_1$ и $(e,f) \subseteq (c,d) \subseteq A_2$, мы заключаем, что $y \in (e,f) \subseteq A_1 \cap A_2$. Следовательно, $A_1 \cap A_2$ обладает свойством $*$ и поэтому принадлежит $\mathcal{T}$.

Таким образом $\mathcal{T}$ действительно является топологией на $\mathbb{R}$. $\square$

Далее мы продолжим описывать открытые и замкнутые множества в эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$. В частности, мы увидим, что все открытые интервалы являются открытыми множествами в этой топологии, а замкнутые интервалы являются замкнутыми множествами.

(ii) Пусть $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$. В эвклидовой топологии $\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$, открытый интервал (r,s) принадлежит $\mathcal{T}$ и поэтому является открытым множеством.

Доказательство.

Нам дан открытый интервал (r,s). Мы должны показать, что (r,s) открыт в эвклидовой топологии; то есть, (r,s) обладает свойством $(*)$ Определения 2.1.1.

Итак, мы должны начать, выбрав произвольную точку $x \in (r,s)$. Нам нужно найти a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$, такие, что $x \in (a,b) \subseteq (r,s)$.

Пусть $x \in (r,s)$. Выберем $a = r$ и $b = s$. Очевидно, что

$$x \in (a,b) \subseteq (r,s).$$

Следовательно, (r,s) является открытым множеством в эвклидовой топологии. $\square$

(iii) Для любого действительного числа r, открытые интервалы (r,∞) и $(-\infty,r)$ являются открытыми множествами в $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Сначала покажем, что (r, ∞) открытое множество; то есть удовлетворяет условию $(*)$.

Чтобы показать это, выберем произвольное $x \in (r, \infty)$ и найдем $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$x \in (a, b) \subseteq (r, \infty).$$

Пусть $x \in (r, \infty)$. Положим $a = r$ и $b = x + 1$. Тогда $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$ и поэтому $(r, \infty) \in \mathcal{T}$.

Аналогичное рассуждение показывает, что $(-\infty, r)$ является открытым множеством в $\mathbb{R}$. $\square$

(iv) Важно отметить, что в то время как каждый открытый интервал является открытым множеством в $\mathbb{R}$, Обратное неверно. Не все открытые множества в $\mathbb{R}$ являются интервалами. Например, множество $(1, 3) \cup (5, 6)$ открыто в $\mathbb{R}$, но не является открытым интервалом. Даже множество $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n + 1)$ является открытым в $\mathbb{R}$. $\square$

(v) Для любых c и d из $\mathbb{R}$, $c < d$, замкнутый интервал $[c, d]$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Мы должны показать, что $[c, d]$ не обладает свойством $(*)$.

Для этого достаточно найти какую-нибудь точку x такую, что не существует a, b, удовлетворяющих условию $(*)$.

Очевидно, c и d являются особыми точками интервала $[c, d]$. Поэтому мы выберем $x = c$ и покажем, что не существует a, b, удовлетворяющих требованию.

Мы используем метод доказательства, который называется **доказательством от противного**. Мы предположим, что a и b с требуемыми свойствами существуют и покажем, что это предположение ведет к противоречию. Следовательно, предположение ложно! Таких a и b не существует. Таким образом, $[c, d]$ не удовлетворяет условию $(*)$ и, поэтому, не является открытым множеством.

Заметим, что $c \in [c, d]$. Допустим существуют a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$, такие, что $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Тогда $c \in (a, b)$ влечет $a < c < b$ и, поэтому, $a < \frac{c+a}{2} < c < b$. Таким образом, $\frac{c+a}{2} \in (a, b)$ и $\frac{c+a}{2} \notin [c, d]$. Следовательно, $(a, b) \not\subseteq [c, d]$, , что является противоречием. Поэтому не существует a и b таких, что $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Мы показали, что $[c, d]$ не обладает свойством $(*)$, то есть $[c, d] \notin \mathcal{T}$. $\square$

(vi) Для любых a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$, замкнутый интервал $[a, b]$ является замкнутым множеством в эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что замкнутый интервал замкнут достаточно заметить, что его дополнение $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, будучи объединением двух открытых множеств, само является открытым множеством. $\square$

(vii) Каждое одноэлементное множество $\{a\}$ замкнуто в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Дополнение $\{a\}$ является объединением двух открытых множеств $(-\infty, a)$ и (a, ∞) и, следовательно, открытым. Поэтому $\{a\}$ замкнуто в $\mathbb{R}$.

[Пользуясь терминологией Упражнений 1.3 #3, можно сказать, что $\mathbb{R}$ является T_1-пространством.] $\square$

(viii) Заметим, что мы могли включить (vii) в (vi) просто заменив "$a < b$" на "$a \leq b$". Точка $\{a\}$ является вырожденным случаем замкнутого интервала $[a, b]$. $\square$

(ix) Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел является замкнутым множеством в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Дополнение к $\mathbb{Z}$ является объединением $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$ открытых подмножеств $(n, n+1)$ из $\mathbb{R}$ и, поэтому, является открытым в $\mathbb{R}$. Следовательно, $\mathbb{Z}$ замкнуто в $\mathbb{R}$. $\square$

(x) Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не является ни открытым, ни замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Мы покажем, что $\mathbb{Q}$ не является открытым множеством показав, что оно не удовлетворяет свойству $(*)$.

Для этого достаточно показать, что $\mathbb{Q}$ не содержит ни одного интервала (a, b), $a < b$.

Допустим, что $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$, где a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$. Между любыми двумя различными действительными числами существует иррациональное число. (Не могли бы вы это доказать?) Следовательно, существует $c \in (a, b)$ такое, что $c \notin \mathbb{Q}$. Это противоречит тому, что $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. Поэтому $\mathbb{Q}$ не содержит никакого интервала (a, b), то есть не является открытым множеством.

Чтобы доказать, что $\mathbb{Q}$ не является замкнутым множеством, достаточно показать, что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не является открытым. Используя то, что между двумя различными действительными числами существует рациональное число, легко видеть, что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не содержит никакого интервала (a, b), $a < b$. Поэтому $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не открыто в $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\mathbb{Q}$ не является замкнутым в $\mathbb{R}$. □

(xi) В Главе 3 мы докажем, что единственными открыто-замкнутыми подмножествами $\mathbb{R}$ являются $\mathbb{R}$ и $\emptyset$. □

Упражнения 2.1

1. Докажите, что если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ тогда ни $[a, b)$. ни $(a, b]$ не являются открытыми подмножествами $\mathbb{R}$. Также покажите, что ни одно из них не является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$.

2. Докажите, что множества $[a, \infty)$ и $(-\infty, a]$ являются замкнутыми подмножествами $\mathbb{R}$.

3. Покажите на примере, что объединение бесконечного числа замкнутых подмножеств $\mathbb{R}$ не обязательно является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$.

4. Докажите каждое из следующих предложений.

   (i) Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел не является открытым подмножеством $\mathbb{R}$.

   (ii) Множество S всех простых чисел является замкнутым, но не открытым подмножеством $\mathbb{R}$.

   (iii) Множество $\mathbb{P}$ всех иррациональных чисел не является ни открытым, ни замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$.

5. Пусть F непустое конечное подмножество $\mathbb{R}$. Покажите, что F замкнуто, но не открыто в $\mathbb{R}$.

6. Докажите, что если F непустое счетное подмножество $\mathbb{R}$, то F не является открытым множеством.

7. (i) Пусть $S = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Докажите, что множество S является замкнутым в
эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$.

   (ii) Is the set $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$ closed in $\mathbb{R}$?

   (iii) Является ли множество $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, n\sqrt{2}, \ldots\}$ замкнутым в $\mathbb{R}$?

8. (i) Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Подмножество S из X называется **F_σ-множеством** если оно является объединением счетного числа замкнутых множеств. Докажите, что все открытые интервалы (a, b) и все замкнутые интервалы $[a, b]$, являются F_σ-множествами в $\mathbb{R}$.

   (ii) Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Подмножество T из X называется **G_δ-множеством** если оно является пересечением счетного числа открытых множеств. Докажите, что все открытые интервалы (a, b) и все замкнутые интервалы $[a, b]$ являются G_δ-множествами в $\mathbb{R}$.

   (iii) Докажите, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является F_σ-множеством в $\mathbb{R}$. (В Упражнениях 6.5#3 мы докажем, что $\mathbb{Q}$ не является G_δ-множеством в $\mathbb{R}$.)

   (iv) Проверьте, что дополнение F_σ-множества является G_δ-множеством, а дополнение G_δ-множества является F_σ-множеством.

2.2 База Топологии

Ремарки 2.1.2 позволяют нам определить эвклидову топологию на $\mathbb{R}$ более удобным образом. Для этого мы вводим понятие базы топологии.

2.2.1 Предложение. Подмножество S из $\mathbb{R}$ открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением открытых интервалов.

Доказательство.

Нам надо доказать, что S открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением открытых интервалов; то есть, мы должны показать, что

(i) если S является объединением открытых интервалов, то оно открыто, и

(ii) если S открытое множество, то оно является объединением открытых интервалов.

Предположим, что S является объединением открытых интервалов; то есть, существуют открытые интервалы (a_j, b_j), где j принадлежит некоторому множеству индексов J, таким, что $S = \bigcup_{j \in J}(a_j, b_j)$. Согласно Замечаниям 2.1.2 (ii) каждый открытый интервал (a_j, b_j) является открытым множеством. Следовательно, S есть объединение открытых множеств и поэтому открыто.

Наоборот, предположим, что S открыто в $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $x \in S$, существует интервал $I_x = (a, b)$ такой, что $x \in I_x \subseteq S$. Мы утверждаем, что $S = \bigcup_{x \in S} I_x$.

Нам надо показать, что множества S и $\bigcup_{x\in S} I_x$ совпадают.

Чтобы показать равенство этих множеств, нам надо доказать:

(i) если $y \in S$, тогда $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, и

(ii) если $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$, тогда $z \in S$.

[заметим, что (i) эквивалентно утверждению $S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$, тогда как (ii) эквивалентно $\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$.]

Сначала допустим, что $y \in S$. Тогда $y \in I_y$. Поэтому $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, как и требовалось. Далее, пусть $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$. Тогда $z \in I_t$, для некоторого $t \in S$. Так как каждое $I_x \subseteq S$, мы видим, что $I_t \subseteq S$ и, поэтому, $z \in S$. Следовательно, $S = \bigcup_{x\in S} I_x$, и мы имеем, что S является объединением открытых интервалов, что и требовалось показать. □

Вышеприведенное Предложение утверждает, что для того чтобы описать топологию на $\mathbb{R}$ достаточно сказать, что все интервалы (a, b) являются открытыми множествами. Любое другое открытое множество является объединением этих открытых множеств. Это приводит нас к следующему определению.

2.2.2 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств X называется **базой** топологии $\mathcal{T}$, если каждое открытое множество является объединением некоторых членов $\mathcal{B}$.

Если $\mathcal{B}$ база топологии $\mathcal{T}$ на множестве X, тогда подмножество U множества X принадлежит $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторых членов $\mathcal{B}$. Таким образом $\mathcal{B}$ "порождает" топологию $\mathcal{T}$ в следующем смысле: если нам даны множества из $\mathcal{B}$, тогда мы можем определить множества из $\mathcal{T}$ – это всевозможные множества, являющиеся объединениями множеств из $\mathcal{B}$.

2.2.3 Пример. Пусть $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Тогда, согласно Предложению 2.2.1, $\mathcal{B}$ является базой эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$. □

2.2.4 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ дискретное пространство, а $\mathcal{B}$ семейство одноточечных подмножеств X; то есть, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Тогда, согласно Предложению 1.1.9, $\mathcal{B}$ является базой $\mathcal{T}$. □

2.2.5 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ и

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Тогда $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ является базой $\mathcal{T}_1$ так как $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$ каждый элемент $\mathcal{T}_1$ может быть представлен как объединение элементов $\mathcal{B}$. (Заметим, что $\emptyset$ является пустым объединением членов $\mathcal{B}$.)

Также отметим, что $\mathcal{T}_1$ само является базой для $\mathcal{T}_1$. □

2.2.6 Замечание. Заметьте, что если $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, тогда $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ является базой топологии $\mathcal{T}$. Так, например, множество всех подмножеств X является базой дискретной топологии на X.

Таким образом, мы видим, что существует много различных баз для одной и той же топологии. Действительно если $\mathcal{B}$ база топологии $\mathcal{T}$ на множестве X и $\mathcal{B}_1$ семейство подмножеств X такое, что $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$, тогда $\mathcal{B}_1$ также является базой для $\mathcal{T}$. [Проверьте это.] □

Как было отмечено выше, понятие "база топологии" позволяет нам определять топологии. Однако, следующий пример показывает, что мы должны быть осторожны при таком определении.

2.2.7 Пример. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Тогда $\mathcal{B}$ не является базой ни для какой топологии на X. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $\mathcal{B}$ является базой топологии $\mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных объединений множеств из $\mathcal{B}$; то есть,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

(Здесь опять мы пользуемся фактом, что $\emptyset$ является пустым объединением множеств из $\mathcal{B}$ и, поэтому, $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

Однако, $\mathcal{T}$не топология, так как $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ не лежит в $\mathcal{T}$ и поэтому $\mathcal{T}$ не удовлетворяет свойству (iii) Определений 1.1.1. Это противоречие показывает, что наше предположение было неверным. Таким образом, $\mathcal{B}$ не является базой ни для какой топологии на X. □

Это наводит нас на следующий вопрос: если $\mathcal{B}$ семейство подмножеств X, при каких условиях $\mathcal{B}$ является базой топологии? На этот вопрос мы отвечаем в Предложении 2.2.8.

2.2.8 Предложение. Пусть X непустое множество, и пусть $\mathcal{B}$ некоторое семейство подмножеств X. Тогда $\mathcal{B}$ является базой для топологии на X тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

(a) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, и

(b) для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, множество $B_1 \cap B_2$ является объединением членов из $\mathcal{B}$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}$ является базисом $\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}$ должно удовлетворять условиям (i), (ii) и (iii) Определений 1.1.1. В частности, X должно быть открытым множеством, и пересечение любых двух открытых множеств должно быть открыто. Так как открытые множества являются объединениями множеств из $\mathcal{B}$, условия (a) и (b) выполняются.

Наоборот, предположим, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям (a) и (b), и пусть $\mathcal{T}$ является семейством всех подмножеств X, являющихся объединениями множеств из $\mathcal{B}$. Мы должны показать, что $\mathcal{T}$ является топологией на X. (В таком случае $\mathcal{B}$ очевидно является базой топологии $\mathcal{T}$, и предложение истинно.)

По условию (a), $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ и, поэтому, $X \in \mathcal{T}$. Заметим, что $\emptyset$ является пустым пересечением $\mathcal{B}$, следовательно $\emptyset \in \mathcal{T}$. Таким образом, $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию (i) Определений 1.1.1.

Теперь предположим, что $\{T_j\}$ некоторое семейство членов из $\mathcal{T}$. Тогда каждое T_j есть объединение множеств из $\mathcal{B}$. Следовательно, объединение всех T_j также является объединением некоторых множеств из $\mathcal{B}$ и, поэтому, принадлежит $\mathcal{T}$. Итак $\mathcal{T}$ удовлетворяет также условию (ii) Определений 1.1.1.

Наконец, пусть C и D принадлежат $\mathcal{T}$. Нам надо проверить, что $C \cap D \in \mathcal{T}$. Но $C = \bigcup_{k\in K} B_k$, для некоторого множества индексов K и множеств $B_k \in \mathcal{B}$. Также $D = \bigcup_{j\in J} B_j$, для некоторого множества индексов J и $B_j \in \mathcal{B}$. Следовательно,

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{k\in K,\, j\in J} (B_k \cap B_j).$$

Вы должны проверить, что два выражения для $C \cap D$ действительно равны!

В конечном случае проверка использует тождества вида

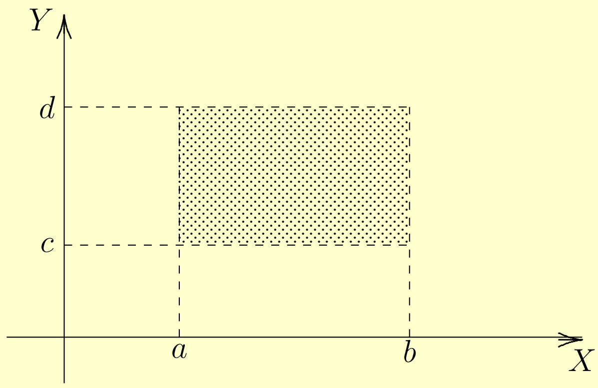
$$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4).$$

По предположению (b), каждое $B_k \cap B_j$ является объединением множеств из $\mathcal{B}$ и, поэтому, $C \cap D$ является объединением множеств из $\mathcal{B}$. Поэтому $C \cap D \in \mathcal{T}$. То есть $\mathcal{T}$ удовлетворяет свойству (iii) Определений 1.1.1. Следовательно, $\mathcal{T}$ действительно является топологией, а $\mathcal{B}$ база этой топологии. $\square$

Предложение 2.2.8 является очень полезным результатом. Оно позволяет нам определять топологию простым заданием базы. Зачастую это намного проще, чем описывать все открытые множества.

Мы собираемся использовать это Предложение, чтобы определить топологию на плоскости. Эта топология известна как ‘‘эвклидова топология’’.

2.2.9 Пример. Пусть $\mathcal{B}$ семейство всех ‘‘открытых прямоугольников’’ $\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b,\ c < y < d\}$ на плоскости, у которых каждая сторона параллельна либо оси X либо оси Y.



Тогда $\mathcal{B}$ является базой топологии на плоскости. Эта топология называется эвклидовой топологией.

Каждый раз когда мы используем символ $\mathbb{R}^2$, мы подразумеваем плоскость, и если мы ссылаемся на $\mathbb{R}^2$ как на топологическое пространство, не задавая топологию явно, мы имеем ввиду плоскость с эвклидовой топологией.

Чтобы увидеть, что $\mathcal{B}$ действительно является базой топологии, заметим, что (i) плоскость является объединением всех открытых прямоугольников, и (ii) пересечение любых двух прямоугольников является прямоугольником. [Под ‘‘прямоугольником’’ мы подразумеваем прямоугольник со сторонами параллельными координатным осям.] Таким образом условия Предложения 2.2.8 выполняются, и, следовательно, $\mathcal{B}$ является базой топологии. □

2.2.10 Замечание. Обобщая Пример 2.2.9, легко определить топологию на

$$\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots , x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots ,\ n\}, \quad \text{для любого } n > 2.$$

Мы определяем $\mathcal{B}$ как семейство всех подмножеств $\{\langle x_1, x_2, \dots , x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots , n\}$ $\mathbb{R}^n$ со сторонами параллельными осям координат. Это семейство $\mathcal{B}$ является базой **эвклидовой топологии** на $\mathbb{R}^n$. □

Упражнения 2.2

1. В этом упражнении надо доказать, что диск $\{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$ является открытым подмножеством $\mathbb{R}^2$, а затем, что каждый открытый диск на плоскости является открытым множеством.

   (i) Пусть $\langle a, b\rangle$ произвольная точка из диска (круга) $D = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$. Положим $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Пусть $R_{\langle a,b\rangle}$ открытый прямоугольник с вершинами в точках $\langle a \pm \frac{1-r}{8}, b \pm \frac{1-r}{8}\rangle$. Проверьте, что $R_{\langle a,b\rangle} \subset D$.

   (ii) Пользуясь (i), покажите, что
   $$D = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D} R_{\langle a,b\rangle}.$$

   (iii) Используя (ii), покажите, что D является открытым множеством в $\mathbb{R}^2$.

   (iv) Покажите, что произвольный диск $\{\langle x, y\rangle : (x-a)^2 + (y-b)^2 < c^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ является открытым в $\mathbb{R}^2$.

2. В этом упражнении вы должны показать, что семейство всех открытых дисков в $\mathbb{R}^2$ является базой топологии на $\mathbb{R}^2$. [Позже мы увидим, что это эвклидова топология.]

   (i) Пусть D_1 и D_2 произвольные открытые диски из $\mathbb{R}^2$, такие, что $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Если $\langle a, b\rangle$ произвольная точка из $D_1 \cap D_2$, покажите, что существует открытый диск $D_{\langle a,b\rangle}$ с центром в $\langle a, b\rangle$ такой, что $D_{\langle a,b\rangle} \subset D_1 \cap D_2$.
   [Подсказка: нарисуйте картинку и примените рассуждение, аналогичное рассуждению из Упражнения 1 (i).]

   (ii) Покажите, что
   $$D_1 \cap D_2 = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D_1 \cap D_2} D_{\langle a,b\rangle}.$$

   (iii) Пользуясь (ii) и Предложением 2.2.8, докажите, что семейство всех открытых дисков из $\mathbb{R}^2$ является базой топологии на $\mathbb{R}^2$.

3. Пусть $\mathcal{B}$ семейство всех открытых интервалов (a, b) in $\mathbb{R}$ где $a < b$ и a и b рациональные числа. Докажите, что $\mathcal{B}$ является базой эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$. [Сравните это утверждение с Предложением 2.2.1 и Упражнением 2.2.3 где a и b не обязательно рациональные числа.]

   [Подсказка: не пытайтесь использовать Предложением 2.2.8 так как это покажет только, что $\mathcal{B}$ является базой <u>некоторой</u> топологии, не обязательно эвклидовой.]

4. Говорят, что топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет **второй аксиоме счетности** если существует база $\mathcal{B}$ для $\mathcal{T}$ такая, что $\mathcal{B}$ содержит счетное число множеств.

   (i) Пользуясь Упражнением 3, покажите, что $\mathbb{R}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.

   (ii) Докажите, что дискретная топология на несчетном множестве не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

   [Подсказка. <u>Недостаточно</u> показать, что некоторая база несчетна. Вы должны доказать, что $\boxed{\text{каждая}}$ база этой топологии несчетна.]

   (iii) Докажите, что $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, для любого положительного n.

   (iv) Пусть $(X, \mathcal{T})$ множество целых чисел с конечно-замкнутой топологией. Удовлетворяет ли $(X, \mathcal{T})$ второй аксиоме счетности?

5. Докажите следующие утверждения.

   (i) Пусть m и c действительные числа, где $m \neq 0$. Тогда прямая $L = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$.

   (ii) Пусть $\mathbb{S}^1 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ единичная окружность. Докажите, что $\mathbb{S}^1$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$.

   (iii) Пусть $\mathbb{S}^n$ единичная n-сфера заданная выражением

$$\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

   Тогда $\mathbb{S}^n$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iv) Пусть B^n замкнутый единичный n-шар заданный выражением

$$B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Покажите, что B^n является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^n$.

(v) Кривая $C = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$.

6. Пусть $\mathcal{B}_1$ база топологии $\mathcal{T}_1$ на множестве X, и $\mathcal{B}_2$ база топологии $\mathcal{T}_2$ на множестве Y. множество $X \times Y$ состоит из всех упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, $x \in X$ и $y \in Y$. Пусть $\mathcal{B}$ семейство подиножеств $X \times Y$, состоящее из всех множеств вида $B_1 \times B_2$, где $B_1 \in \mathcal{B}_1$ и $B_2 \in \mathcal{B}_2$. Докажите, что $\mathcal{B}$ является базой топологии на $X \times Y$. Топология, определенная таким образом, называется **топологией произведения** на $X \times Y$.
[Подсказка. Смотри Упражнение 2.2.9.]

7. Используя Упражнение 3 и Упражнение 2.1 #8, докажите, что каждое открытое подмножество $\mathbb{R}$ является F_σ-множеством и G_δ-множеством.

2.3 База для Заданной Топологии

Предложение 2.2.8 говорит нам при каких условиях семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X является базой для некоторой топологии на X. Иногда для заданной топологии $\mathcal{T}$ на X нам надо выяснить является ли $\mathcal{B}$ базой для этой топологии $\mathcal{T}$. Чтобы проверить, что $\mathcal{B}$ является базой для $\mathcal{T}$, мы можем напрямую применить Определение 2.2.2 и показать, что каждый элемент $\mathcal{T}$ является объединением элементов из $\mathcal{B}$. Однако, Предложение 2.3.2 дает нам альтернативный метод для этого.

Но сначала мы дадим пример, который показывает, что существует отличие между утверждением, что семейство $\mathcal{B}$ подмножеств X является базой для некоторой топологии, и утверждением, что оно является базой для заданной топологии.

2.3.1 Пример. Пусть $\mathcal{B}$ семейство всех полуоткрытых интервалов вида $(a, b]$, $a < b$, где $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$. Тогда $\mathcal{B}$ является базой для топологии на $\mathbb{R}$, так как $\mathbb{R}$ является объединением всех членов $\mathcal{B}$, и пересечение любых двух полуоткрытых интервалов является полуоткрытым интервалом.

Однако, топология $\mathcal{T}_1$, имеющая в качестве базы $\mathcal{B}$, не является эвклидовой топологией на $\mathbb{R}$. Для этого достаточно заметить, что $(a, b]$ открытое множество в $\mathbb{R}$ с топологией $\mathcal{T}_1$, в то время как $(a, b]$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}$ с эвклидовой топологией. (См. Упражнение 2.1 #1.) Таким образом, $\mathcal{B}$ база для некоторой топологии, но не база для эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$. □

2.3.2 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств X является базой для $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для любой точки x, принадлежащей произвольному открытому множеству U, существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subseteq U$.

Доказательство.

Нам нужно доказать, что
(i) если $\mathcal{B}$ база для $\mathcal{T}$ и $x \in U \in \mathcal{T}$, то тогда существует множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subseteq U$,
и
(ii) если для каждого $U \in \mathcal{T}$ и $x \in U$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subseteq U$, тогда $\mathcal{B}$ является
базой для $\mathcal{T}$.

Предположим, что $\mathcal{B}$ база для $\mathcal{T}$ и $x \in U \in \mathcal{T}$. Так как $\mathcal{B}$ база для $\mathcal{T}$, открытое множество U является объединением членов из $\mathcal{B}$; то есть, $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, где $B_j \in \mathcal{B}$, для каждого j из некоторого множества индексов J. Но из $x \in U$ следует $x \in B_j$, для некоторого $j \in J$. Таким образом $x \in B_j \subseteq U$, как и требовалось.

В обратную сторону, предположим что для каждого множества $U \in \mathcal{T}$ и каждой точки $x \in U$, существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subseteq U$. Нам надо показать, что каждое открытое множество является объединением элементов из $\mathcal{B}$. Пусть V произвольное открытое множество. Тогда для каждой точки

$x \in V$, существует $B_x \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B_x \subseteq V$. Очевидно, что $V = \bigcup_{x \in V} B_x$. (Проверьте это!) Итак, V является объединением членов из $\mathcal{B}$. $\square$

2.3.3 Предложение. Пусть $\mathcal{B}$ база топологии $\mathcal{T}$ на множестве X. Подмножество U множества X открыто тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ существует множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subseteq U$.

Доказательство. Пусть U некоторое подмножество X. Предположим, что для каждой точки $x \in U$ существует $B_x \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B_x \subseteq U$. Очевидно, что $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Таким образом, U является объединением открытых множеств и, следовательно, тоже открыто. Обратное утверждение следует из Предложения 2.3.2. $\square$

Заметьте, что свойство базы, описанное в Предложении 2.3.3, было использовано при <u>определении</u> нами эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$. Мы сказали, что подмножество U $\mathbb{R}$ открыто тогда и только тогда, когда для каждой $x \in U$, существуют такие a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$, что $x \in (a, b) \subseteq U$.

Предупреждение. Убедитесь, что вы понимаете разницу между Предложением 2.2.8 и Предложением 2.3.2. Предложение 2.2.8 дает условия при которых семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X является базой для <u>некоторой</u> топологии на X. В то время как Предложение 2.3.2 дает условия при которых семейство $\mathcal{B}$ подмножеств топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ является базой для <u>заданной</u> топологии $\mathcal{T}$.

Мы уже видели, что топология может иметь множество различных баз. Следующее утверждение говорит нам когда две различные базы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ на множестве X определяют одну и ту же топологию.

2.3.4 Предложение. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ базы топологий $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, соответственно, на непустом множестве X. Тогда $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ тогда и только тогда, когда

(i) для каждого $B \in \mathcal{B}_1$ и каждой точки $x \in B$, существует $B' \in \mathcal{B}_2$ такое, что $x \in B' \subseteq B$, и

(ii) для каждого $B \in \mathcal{B}_2$ и каждой точки $x \in B$, существует $B' \in \mathcal{B}_1$ такое, что $x \in B' \subseteq B$.

Доказательство.

Нам надо показать, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ являются базами для одной и той же топологии тогда и только тогда, когда (i) и (ii) верны.

Сначала мы предположим, что они являются базами для одной и той же топологии, то есть $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, и покажем, что условия (i) и (ii) выполнены.

Далее, мы предположим, что (i) и (ii) выполнены и покажем, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Сперва мы предположим, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Тогда (i) и (ii) немедленно следуют из Предложения 2.3.2.

Обратно, предположим, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Согласно Предложению 2.3.2, (i) влечет, что каждое $B \in \mathcal{B}_1$ открыто в $(X, \mathcal{T}_2)$; то есть, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Так как каждый член $\mathcal{T}_1$ является объединением членов из $\mathcal{T}_2$, мы имеем $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Аналогично ,(ii) влечет $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Следовательно $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

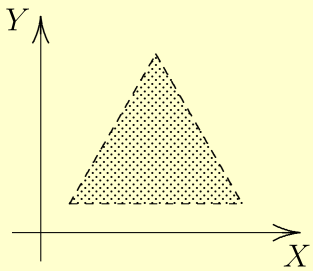
2.3.5 Пример. Покажите, что множество $\mathcal{B}$ всех "открытых равносторонних треугольников" с основаниями, параллельными оси X, является базой эвклидовой топологии на $\mathbb{R}^2$. (Говоря "открытый треугольник", мы подразумеваем, что граница не включена.)

Набросок Доказательства. (Здесь мы дадим только набросок доказательства в рисунках. Написание детального доказательства оставляются читателю.)

Нам надо показать, что $\mathcal{B}$ является базой эвклидовой топологии.

Мы применим Предложение 2.3.4, но сначала нам надо показать, что $\mathcal{B}$ является базой <u>некоторой</u> топологии на $\mathbb{R}^2$.

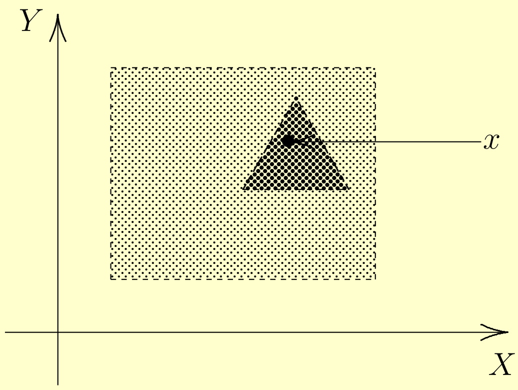
Для этого мы покажем, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям Предложения 2.2.8.



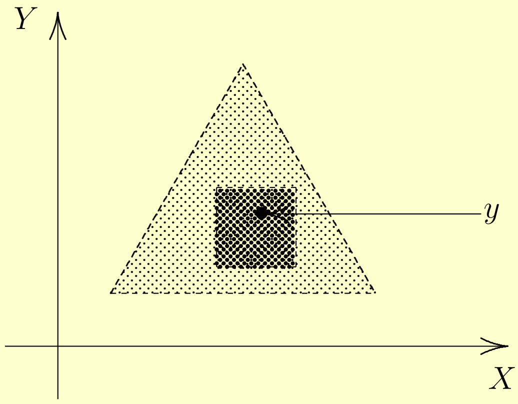
Сначала заметим, что $\mathcal{B}$ является базой для некоторой топологии, потому что оно удовлетворяет условиям Предложения 2.2.8. (Чтобы убедиться, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям Предложения 2.2.8, заметим, что $\mathbb{R}^2$ является объединением всех открытых равносторонних треугольников с основаниями, параллельными оси , и пересечение двух таких треугольников есть треугольник этого же вида.)

Далее мы должны показать, что выполнены условия (i) и (ii) Предложения 2.3.4.

Сначала проверим условие (i). Пусть R открытый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, а x произвольная точка из R. Мы должны показать, что существует открытый равносторонний треугольник T с основанием, параллельным оси X, такой что $x \in T \subseteq R$. Это легко видеть на рисунке.



Теперь проверим условие (ii) Предложения 2.3.4. Пусть T' открытый равносторонний треугольник T с основанием, параллельным оси X, и пусть y некоторая точка из T'. Тогда существует открытый прямоугольник R' такой, что $y \in R' \subseteq T'$. На рисунке это легко видеть.



Итак условия Предложения 2.3.4 выполнены. Таким образом $\mathcal{B}$ действительно является базой эвклидовой топологии на $\mathbb{R}^2$. □

В Упражнении 2.2.9 мы определили базу эвклидовой топологии как семейство всех ‘‘открытых прямоугольников’’ (со сторонами, параллельными осям координат). Упражнение 2.3.5 показывает, что ‘‘открытые прямоугольники’’ могут быть заменены ‘‘открытыми равносторонними треугольниками’’ (с основаниями, параллельными оси X) без изменения топологии. В упражнениях 2.3 #1 мы увидим, что вышеприведенные условия в скобках могут быть опущены без изменения топологии. А также, что ‘‘открытые прямоугольники’’ могут быть заменены на "открытые диски"[1].

Упражнения 2.3

1. Определите, какие из следующих семейств образуют базис эвклидовой топологии на $\mathbb{R}^2$:

   (i) семейство всех "открытых" квадратов со сторонами, параллельными осям координат;

   (ii) семейство всех "открытых" дисков;

   (iii) семейство всех "открытых" квадратов;

   (iv) семейство всех "открытых" прямоугольников.

   (v) семейство всех "открытых" треугольников

2. (i) Пусть $\mathcal{B}$ база топологии $\mathcal{T}$ на непустом множестве X. Докажите, что если $\mathcal{B}_1$ есть семейство подмножеств X такое, что $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$, то $\mathcal{B}_1$ также является базой для $\mathcal{T}$.

   (ii) Выведите из (i), что существует несчетное число различных баз для эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$.

3. Пусть $\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Как мы увидели в Упражнении 2.3.1, $\mathcal{B}$ является базой топологии $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}$ и $\mathcal{T}$ <u>не</u> является эвклидовой топологией на $\mathbb{R}$. Тем не менее, покажите, что каждый интервал (a, b) открыт в $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

4.* Пусть $C[0, 1]$ множество всех непрерывных действительно-значных функций на $[0, 1]$.

   (i) Покажите, что семейство $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \{M(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1]$ и ε положительное действительное число$\}$ и $M(f, \varepsilon) = \left\{g : g \in C[0, 1] \text{ and } \int_0^1 |f - g| < \varepsilon\right\}$, является базой топологии $\mathcal{T}_1$ на $C[0, 1]$.

[1] На самом деле, большинство книг описывают эвклидову топологию на $\mathbb{R}^2$ в терминах открытых дисков.

(ii) Покажите, что семейство $\mathcal{U}$, где $\mathcal{U} = \{U(f, \varepsilon) : f \in C[0,1]$ и ε положительное действительное число$\}$ и $U(f, \varepsilon) = \{g : g \in C[0,1]$ и $\sup_{x \in [0,1]} | f(x) - g(x) | < \varepsilon\}$, является базой топологии $\mathcal{T}_2$ on $C[0,1]$.

(iii) Докажите, что $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

5. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Непустое семейство $\mathcal{S}$ открытых подмножеств X называется **предбазой** для $\mathcal{T}$ если семейство всех конечных пересечений членов из $\mathcal{S}$ образует базу для $\mathcal{T}$.

   (i) Докажите, что семейство всех открытых интервалов вида (a, ∞) or $(-\infty, b)$ является предбазой для эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$.

   (ii) Докажите, что $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ является предбазой для топологии $\mathcal{T}_1$ из Примера 1.1.2.

6. Пусть $\mathcal{S}$ предбаза для топологии $\mathcal{T}$ на множестве $\mathbb{R}$. (См. Упражнение 5 выше.) Докажите, что если все замкнутые интервалы $[a, b]$, с $a < b$, принадлежат $\mathcal{S}$, то $\mathcal{T}$ дискретная топология.

7. Пусть X непустое множество, и $\mathcal{S}$ семейство всех множеств вида $X \setminus \{x\}$, $x \in X$. Докажите, что $\mathcal{S}$ предбаза для конечно-замкнутой топологии на X.

8. Пусть X некоторое бесконечное множество, и $\mathcal{T}$ дискретная топология на X. Найдите предбазу $\mathcal{S}$ для $\mathcal{T}$ такую, что $\mathcal{S}$ не содержит одноэлементных множеств.

9. Пусть $\mathcal{S}$ семейство всех прямых плоскости $\mathbb{R}^2$. Какой будет топология $\mathcal{T}$, если $\mathcal{S}$ предбаза для $\mathcal{T}$ на множестве $\mathbb{R}^{\,2}$?

10. Пусть $\mathcal{S}$ семейство всех прямых плоскости, параллельных оси X. Если $\mathcal{S}$ предбаза топологии $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}^2$, какими будут открытые множества в $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.?

11. Пусть $\mathcal{S}$ семейство всех окружностей на плоскости. Если $\mathcal{S}$ предбаза топологии $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}^2$, какими будут открытые множества в $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.?

12. Пусть $\mathcal{S}$ семейство всех окружностей на плоскости с центрами на оси X. Если $\mathcal{S}$ предбаза топологии $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}^2$, какими будут открытые множества в $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.?

2.4 Заключение

В этой главе мы определили очень важное топологическое пространство – $\mathbb{R}$, множество всех действительных чисел с эвклидовой топологией, и потратили некоторое время на его изучение. Мы заметили, что в этой топологии открытые интервалы на самом деле являются открытыми множествами (а замкнутые интервалы - замкнутыми множествами). Однако, не все открытые множества являются открытыми интервалами. Тем не менее, каждое открытое множество в $\mathbb{R}$ есть объединение открытых интервалов. Это привело нас к понятию "базы для топологии", и мы установили, что семейство всех открытых интервалов является базой для эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$.

Во введении к Главе 1 мы описали математическое доказательство как надежную систему аргументов и подчеркнули важность написания доказательств. В этой главе мы познакомились с доказательством посредством сведения к противоречию в Замечаниях 2.1.2 (v) и Упражнении 2.2.7. Доказательство "необходимых и достаточных" условий, было объяснено в Предложении 2.2.1, с дальнейшими примерами в Предложениях 2.2.8, 2.3.2, 2.3.3, и 2.3.4.

База топологии сама по себе является важным понятием. Мы видели, например, что семейство всех одноэлементных множеств является базой для дискретной топологии. Предложение 2.2.8 дает необходимые и достаточные условия при которых семейство подмножеств множества X является базой для <u>некоторой</u> топологии на X. Это контрастирует с Предложением 2.3.2,которое дает необходимые и достаточные условия при которых семейство подмножеств множества X является базой для <u>заданной</u> топологии на X. Было отмечено, что два различных семейства $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ могут быть базой для одной и той же топологии. Необходимые и достаточные условия для этого даны в Предложении 2.3.4.

Мы определили эвклидову топологию на $\mathbb{R}^n$, для произвольного натурального n. Мы увидели, что семейство всех открытых дисков является базой для $\mathbb{R}^2$, так же как и семейство всех открытых квадратов, или семейство всех открытых прямоугольников.

В Упражнениях вы познакомились с тремя интересными идеями. Упражнения

2.1 #8 рассматривают понятия F_σ-множества и G_δ-множества, которые играют важную роль в теории меры. Упражнения 2.3 #4 определяют пространство непрерывных действительнозначных функций . Такие пространства называются пространствами функций и являются центральным объектом изучения в функциональном анализе. Функциональный анализ является смесью (классического) анализа и топологии, и некоторое время назывался современным анализом, cf. Simmons [29]. И наконец, Упражнения 2.3 #5–12 оперируют понятием предбазы.

Глава 3

Предельные Точки

Введение

На действительной прямой мы имеем понятие “близости”. Например, каждая точка последовательности $.1, .01, .001, .0001, .00001, \ldots$ ближе к 0 чем предыдущая. Действительно, в некотором смысле, 0 является предельной точкой этой последовательности. Интервал $(0, 1]$ не замкнут, так как не содержит предельную точку 0. В произвольном топологическом пространстве у нас нет “функции расстояния”, мы должны действовать по-другому. Мы должны определить понятие предельной точки, не опирающееся на расстояние. Даже при новом определении предельной точки, точка 0 по-прежнему окажется предельной точкой $(0, 1]$. Введение понятия предельной точки приведет нас к лучшему пониманию понятия замкнутого множества.

Другим очень важным топологическим понятием, определенным в этой главе, является понятие связности. Рассмотрим топологическое пространство $\mathbb{R}$. В то время как об обоих множествах $[0, 1] \cup [2, 3]$ и $[4, 6]$ можно сказать, что они имеют длину 2, очевидно, что это разные типы множеств $\ldots$ первое состоит из двух раздельных кусков, второе же из одного куска. Разница между ними “топологическая”, что будет показано при помощи понятия связности.

3.1 Предельные Точки и Операция Замыкания

Если $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, то элементы множества X обычно называются **точками.**

3.1.1 Определение. Пусть A подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Точка $x \in X$ называется **предельной точкой** (или **точкой сходимости** A), если каждое открытое множество U, содержащее x, содержит точку из A, отличную от x.

3.1.2 Пример. Рассмотрим топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ на множестве $X = \{a, b, c, d, e\}$, с топологией $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$, и $A = \{a, b, c\}$. Тогда b, d, и e являются предельными точками A, а a и c не являются предельными точками A.

Доказательство.

Точка a является предельной точкой A тогда и только тогда, когда каждое открытое множество,содержащее a, содержит точку из A, отличную от a.

Таким образом, чтобы показать, что a $\boxed{\text{не}}$ является предельной точкой A, достаточно найти хотя бы одно множество, которое содержит a, но не содержит других точек из A.

Множество $\{a\}$ не содержит других точек из A. Таким образом, a не является предельной точкой A.

Множество $\{c, d\}$ открыто и содержит точку c, но не содержит других точек из A. Поэтому c не является предельной точкой A.

Чтобы показать, что b предельная точка A, нам надо показать, что каждое открытое множество, содержащее b, содержит некоторую точку из A, отличную от b.

Для этого нам надо выписать $\boxed{\text{все}}$ открытые множества, содержащие b, и проверить, что каждое из них содержит некоторую точку из A, отличную от b.

Единственными открытыми множествами, содержащими b, являются X и $\{b, c, d, e\}$, и оба содержат другие точки из A, а именно точку c. Поэтому, b - предельная точка A.

Точка d является предельной точкой A несмотря на то, что не принадлежит A. Это так потому, что каждое открытое множество, содержащее d, содержит точку из A. Аналогично, e также является предельной точкой A несмотря на то, что не принадлежит A. $\square$

3.1.3 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - дискретное пространство и A некоторое подмножество X. Тогда у A нет предельных точек, так как для каждой точки $x \in X$ существует открытое множество $\{x\}$, не содержащее точек из A, отличных от x. $\square$

3.1.4 Пример. Рассмотрим подмножество $A = [a, b)$ множества $\mathbb{R}$. Легко проверить, что каждый элемент из $[a, b)$ является предельной точкой A. Более того, точка b также является предельной точкой A. $\square$

3.1.5 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - антидискретное пространство и A - некоторое подмножество X, содержащее по крайней мере два элемента. Легко видеть, что каждая точка X является предельной точкой для A. (Как вы думаете, почему нужно условие, что A содержит по крайней мере две точки?) $\square$

Следующее предложение дает удобный критерий, чтобы проверить является ли множество замкнутым или нет.

3.1.6 Предложение. Пусть A подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Множество A замкнуто в $(X, \mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.

Доказательство.

Нам надо доказать, что A замкнуто в $(X, \mathcal{T})$ тогда и только тогда когда A содержит все свои предельные точки; то есть, нам надо показать, что

(i) если A - замкнутое множество, то оно содержит все свои предельные точки, и

(ii) если A содержит все свои предельные точки, то оно замкнуто.

Предположим, что A замкнуто в $(X, \mathcal{T})$. Допустим, что p - предельная точка A, принадлежащая $X \setminus A$. Тогда $X \setminus A$ открытое множество, содержащее предельную точку p множества A. То есть, $X \setminus A$ содержит некоторый элемент множества A. Что конечно же неверно. Полученное противоречие показывает, что каждая предельная точка A принадлежит A.

В обратную сторону, предположим, что A содержит все свои предельные точки. Из этого предположения следует, что для каждой точки $z \in X \setminus A$, существует открытое множество $U_z \ni z$ такое, что $U_z \cap A = \emptyset$; то есть, $U_z \subseteq X \setminus A$. Следовательно, $X \setminus A = \bigcup_{z \in X \setminus A} U_z$. (Проверьте это!) Поэтому $X \setminus A$ есть объединение открытых множеств и, следовательно, само открыто, а его дополнение A замкнуто. $\square$

3.1.7 Пример. Следующие утверждения являются немедленными следствиями Предложения 3.1.6:

(i) множество $[a, b)$ не является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$, так как b предельная точка, но $b \notin [a, b)$;

(ii) множество $[a, b]$ замкнуто в $\mathbb{R}$, так как все предельные точки $[a, b]$ принадлежат $[a, b]$;

(iii) (a, b) не является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$, так как не содержит предельной точки a;

(iv) $[a, \infty)$ - замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. □

3.1.8 Предложение. Пусть A - замкнутое подмножество $(X, \mathcal{T})$, и A' множество всех предельных точек A. Тогда $A \cup A'$ - замкнутое множество.

Доказательство. Как следует из предложения 3.1.6, достаточно показать, что множество $A \cup A'$ содержит все $\boxed{\text{свои}}$ предельные точки или, эквивалентно, что не существует элемента из $X \setminus (A \cup A')$ который являлся бы предельной точкой $A \cup A'$.

Пусть $p \in X \setminus (A \cup A')$. Так как $p \notin A'$, существует открытое множество U, содержащее p такое, что $U \cap A = \{p\}$ или $\emptyset$. Но $p \notin A$, поэтому $U \cap A = \emptyset$. Мы также утверждаем, что $U \cap A' = \emptyset$. Потому что если $x \in U$, тогда так как U открыто и $U \cap A = \emptyset$, $x \notin A'$. Таким образом, $U \cap A' = \emptyset$. То есть $U \cap (A \cup A') = \emptyset$, и $p \in U$. Отсюда следует, что p не является предельной точкой $A \cup A'$ и, поэтому, $A \cup A'$ замкнутое множество. □

3.1.9 Определение. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Тогда множество $A \cup A'$, состоящее из A и всех предельных точек A, называется **замыканием** A и обозначается как $\overline{A}$.

3.1.10 Замечание. Как следует из Предложения 3.1.8, множество $\overline{A}$ является замкнутым. Согласно Предложению 3.1.6 и Упражнениям 3.1 #5 (i), каждое замкнутое множество, содержащее A, должно также содержать множество A'. Поэтому, $A \cup A' = \overline{A}$ является наименьшим множеством, содержащим A. Отсюда следует, что $\overline{A}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. □

3.1.11 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$ и

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Покажите, что $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$, и $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

Доказательство.

Чтобы найти замыкание некоторого множества, мы должны найти все замкнутые множества, содержащие это множество, и выбрать наименьшее из них. Таким образом, мы начинаем с выписывания <u>всех</u> замкнутых множеств – то есть дополнений ко всем открытым множествам.

Замкнутыми множествами являются $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ и $\{a\}$. Поэтому наименьшее множество, содержащее $\{b\}$, это $\{b, e\}$; то есть, $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. Аналогично, $\overline{\{a, c\}} = X$, и $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. □

3.1.12 Пример. Пусть $\mathbb{Q}$ подмножество $\mathbb{R}$, состоящее из всех рациональных чисел. Докажите, что $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Доказательство. $\boxed{\text{Предположим}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. Тогда должна существовать точка $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Так как $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ открыто в $\mathbb{R}$, существуют a, b , $a < b$ такие, что $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Но каждый интервал (a, b) содержит некоторое рациональное число q; то есть, $q \in (a, b)$. Поэтому $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ и, следовательно, $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Это противоречие, так как $q \in \mathbb{Q}$. Таким образом, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

3.1.13 Определение. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Множество A называется **плотным** в X или **всюду плотным** в X если $\overline{A} = X$.

Теперь мы можем переформулировать Пример 3.1.12 следующим образом: $\mathbb{Q}$ есть плотное подмножество $\mathbb{R}$.

Заметьте, что в примере 3.1.11 мы показали, что $\{a, c\}$ is dense in X.

3.1.14 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - дискретное пространство. Тогда каждое подмножество X замкнуто (как дополнение открытого). Следовательно, единственным плотным подмножеством X является само X, так как каждое подмножество X является собственным замыканием. $\square$

3.1.15 Предложение. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Множество A плотно в X тогда и только тогда, когда каждое непустое открытое подмножество X имеет непустое пересечение с A (то есть, если $U \in \mathcal{T}$ и $U \neq \emptyset$, то $A \cap U \neq \emptyset$.)

Доказательство. Сначала предположим, что каждое непустое открытое подмножество X имеет непустое пересечение с A. Если $A = X$, тогда очевидно, что A плотно в X. Если $A \neq X$, пусть $x \in X \setminus A$. Если $U \in \mathcal{T}$ и $x \in U$, то $U \cap A \neq \emptyset$. Поэтому, x предельная точка A. Так как x произвольная точка из $X \setminus A$, каждая точка $X \setminus A$ является предельной точкой A. Поэтому $A' \supseteq X \setminus A$ и, следовательно, по Определению 3.1.9, $\overline{A} = A' \cup A = X$; то есть, A плотно в X.

В обратную сторону, предположим, что A плотно в X. Пусть U произвольное непустое открытое подмножество X. $\boxed{\text{Допустим}}$ $U \cap A = \emptyset$. Тогда если $x \in U$, то $x \notin A$ и x <u>не</u> является предельной точкой A, так как U открытое множество, содержащее x, и не содержащее никаких элементов из A. Это противоречие, так как из того, что A плотно в X следует, что каждый элемент множества $X \setminus A$ является предельной точкой A. Следовательно, $U \cap A \neq \emptyset$, как и требовалось доказать. $\square$

Упражнения 3.1

1. (a) В Примере 1.1.2 найдите все предельные точки следующих множеств:

   (i) $\{a\}$,

   (ii) $\{b, c\}$,

   (iii) $\{a, c, d\}$,

   (iv) $\{b, d, e, f\}$.

   (b) Найдите замыкание каждого из вышеприведенных множеств.

   (c) Найдите замыкание каждого из вышеприведенных множеств, используя метод из Примера 3.1.11.

2. Пусть $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ множество целых чисел с конечно-замкнутой топологией. Перечислите все предельные точки следующих множеств:

   (i) $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$,

   (ii) Множество E, состоящее из всех четных чисел.

3. Найдите все предельные точки открытого интервала (a, b) в $\mathbb{R}$, где $a < b$.

4. (a) Найдите замыкание в $\mathbb{R}$ каждого из следующих множеств.

   (i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$,

   (ii) множество целых чисел $\mathbb{Z}$,

   (iii) множество всех иррациональных чисел $\mathbb{P}$.

   (b) Пусть S - подмножество $\mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $a \in \overline{S}$ тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа n, существует $x_n \in S$ такое, что $|x_n - a| < \frac{1}{n}$.

5. Пусть S и T непустые подмножества топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ такие, что $S \subseteq T$.

   (i) Если p - предельная точка множества S, проверьте, что p также предельная точка множества T.

   (ii) Выведите из(i) что $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

(iii) Докажите, что если S плотно в X, то T плотно в X.

(iv) Используя (iii), покажите, что $\mathbb{R}$ имеет несчетное число различных счетных подмножеств.

[Подсказка. Несчетные множества обсуждаются в Приложении 2.]

(v)* Опять используя (iii), докажите, что $\mathbb{R}$ имеет несчетное число различных счетных плотных подмножеств и $2^{\mathfrak{c}}$ различных несчетных плотных подмножеств.
[Подсказка. Заметьте, что $\mathfrak{c}$ обсуждается в Приложении 1.]

3.2 Окрестности

3.2.1 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, N - подмножество X и p - точка из N. Тогда N называется **окрестностью** точки p если существует открытое множество U, такое, что $p \in U \subseteq N$.

3.2.2 Пример. Замкнутый интервал $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$ является окрестностью точки $\frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$. □

3.2.3 Пример. Интервал $(0, 1]$ из $\mathbb{R}$ является окрестностью точки $\frac{1}{4}$, так как $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, 1]$. Но $(0, 1]$ не является окрестностью точки 1. (Докажите это.) □

3.2.4 Пример. Если $(X, \mathcal{T})$ - произвольное топологическое пространство и $U \in \mathcal{T}$, тогда, как следует из Определения 3.2.1, U является окрестностью каждой точки $p \in U$. Так, например, каждый открытый интервал (a, b) из $\mathbb{R}$ является окрестностью каждой точки, которую этот интервал содержит. □

3.2.5 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, и N - некоторая окрестность точки p. Если S - произвольное подмножество X такое, что $N \subseteq S$, то S является окрестностью p. $\square$

Следующее предложение легко проверяется, поэтому мы оставляем доказательство в качестве упражнения для читателя.

3.2.6 Предложение. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Точка $x \in X$ является предельной точкой A тогда и только тогда, когда каждая окрестность x содержит точку из A, отличную от x. $\square$

Так как множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, мы получаем следующее:

3.2.7 Следствие. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Множество A является замкнутым тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X \setminus A$ существует такая окрестность N точки x, что $N \subseteq X \setminus A$. $\square$

3.2.8 Следствие. Пусть U - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. $U \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ существует окрестность N точки x такая, что $N \subseteq U$. $\square$

Следующее следствие легко выводится из Следствия 3.2.8.

3.2.9 Следствие. Пусть U - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. $U \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ существует $V \in \mathcal{T}$ такое, что $x \in V \subseteq U$. $\square$

Следствие 3.2.9 дает удобный критерий для проверки является ли множество открытым или нет. Оно утверждает, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно содержит открытое множество "вокруг"каждой из своих точек.

Упражнения 3.2

1. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что A плотно в X тогда и только тогда, когда каждая окрестность каждой точки из $X \setminus A$ имеет непустое пересечение с A.

2. (i) Пусть A и B - подмножества топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Аккуратно докажите, что
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$
(ii) Постройте пример для которого
$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

3. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Докажите, что $\mathcal{T}$ является конечно-замкнутой топологией на X тогда и только тогда, когда (i) $(X, \mathcal{T})$ является T_1-пространством, и (ii) каждое бесконечное подмножество X плотно в X.

4. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **сепарабельным** если у него есть счетное плотное подмножество. Определите, какие из следующих пространств являются сепарабельными:
   (i) множество $\mathbb{R}$ с обычной топологией;
   (ii) счетное множество с дискретной топологией;
   (iii) счетное множество с конечно-замкнутой топологией;
   (iv) $(X, \mathcal{T})$ где X конечно;
   (v) $(X, \mathcal{T})$ где $\mathcal{T}$ конечно;

(vi) несчетное множество с дискретной топологией;

(vii) несчетное множество с конечно-замкнутой топологией;

(viii) пространство $(X, \mathcal{T})$, удовлетворяющее второй аксиоме счетности.

5. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - произвольное топологическое пространство и A - произвольное подмножество X. Наибольшее открытое множество, содержащееся в A называется **внутренностью** A и обозначается $\mathrm{Int}(A)$. [Это объединение всех открытых множеств X, которые полностью лежат в A.]

(i) Докажите, что в $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}([0,1]) = (0,1)$.

(ii) Докажите, что в $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}((3,4)) = (3,4)$.

(iii) Покажите, что если A открыто в $(X, \mathcal{T})$, то $\mathrm{Int}(A) = A$.

(iv) Проверьте, что в $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(\{3\}) = \emptyset$.

(v) Покажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - антидискретное пространство, то для всех собственных подмножеств A множества X, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

(vi) Покажите, что для каждого счетного подмножества A множества $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

6. Покажите, что если A - произвольное подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$, то $\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. (По поводу определения Int см. Упражнение 5 выше.)

7. Используя Упражнение 6, проверьте, что A плотно в $(X, \mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \emptyset$.

8. Используя определение Int из Упражнения 5, определите какие из следующих утверждений являются верными для произвольных подмножеств A_1 и A_2 топологического пространства $(X, \mathcal{T})$?

(i) $\mathrm{Int}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \cap \mathrm{Int}(A_2)$,

(ii) $\mathrm{Int}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \cup \mathrm{Int}(A_2)$,

(iii) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

(В случаях, когда утверждение "верно", вы должны дать доказательство. В противном случае, приведите контрпример.)

9.* Пусть S - плотное подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что для каждого открытого подмножества U из X, $\overline{S \cap U} = \overline{U}$.

10. Пусть S и T - плотные подмножества пространства $(X, \mathcal{T})$. Если T к тому же открыто, выведите из Упражнения 9, что $S \cap T$ плотно в X.

11. Пусть $\mathcal{B} = \{[a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$. Докажите каждое из следующих утверждений.

   (i) $\mathcal{B}$ является базой $\mathcal{T}_1$ для топологии на $\mathbb{R}$. (Пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ называется **прямой Соргенфрея**.)

   (ii) Если $\mathcal{T}$ - эвклидова топология на $\mathbb{R}$, то $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$.

   (iii) Для всех $a, b \in \mathbb{R}$ с $a < b$, $[a, b)$ является открыто-замкнутым множеством в $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$.

   (iv) Прямая Соргенфрея является сепарабельным пространством.

   (v)* Прямая Соргенфрея не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

3.3 Связность

3.3.1 Замечание. Здесь мы перечислим некоторые определения и факты с которыми вы должно быть знакомы. Пусть S - некоторое множество действительных чисел. Если существует элемент b из S такой, что $x \leq b$, для всех $x \in S$, то b называется **наибольшим элементом** множества S. Аналогично, если S содержит элемент a такой, что $a \leq x$, для всех $x \in S$, то a называется **наименьшим элементом** множества S. Множество S действительных чисел называется **ограниченным сверху** если существует действительное число c такое, что $x \leq c$, для всех $x \in S$, и c называется **верхней границей** для S. Аналогично определяются термины "**ограниченный снизу**" и "**нижняя граница**". Множество, ограниченное и снизу и сверху, называется **ограниченным.** □

Аксиома о Наименьшей Верхней Границе: Пусть S - непустое множество действительных чисел. Если S ограничено сверху, то у него есть наименьшая верхняя граница. □

Наименьшая верхняя граница, также называемая **супремумом** множества S, и обозначаемая как $\sup(S)$, может принадлежать или не принадлежать S. Действительно, супремум S является элементом S тогда и только тогда, когда S имеет наибольший элемент. Например, супремумом открытого интервала $S = (1,2)$ является 2, но $2 \notin (1,2)$, в то время как супремумом $[3,4]$ является точка 4, которая лежит в $[3,4]$ и 4 является наибольшим элементом множества $[3,4]$. Произвольное множество S действительных чисел, которое ограничено снизу имеет **наибольшую нижнюю границу** которая также называется **инфимумом** и обозначается как $\inf(S)$.

3.3.2 Лемма. Пусть S - подмножество $\mathbb{R}$, ограниченное сверху, и пусть p - супремум множества S. Если S - замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, то $p \in S$.

Доказательство. $\boxed{\text{Предположим}}$ $p \in \mathbb{R} \setminus S$. Так как $\mathbb{R} \setminus S$ открыто, существуют действительные числа a и b, $a < b$, такие, что $p \in (a,b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Так как p - $\boxed{\text{наименьшая}}$ верхняя граница для S и $a < p$, то очевидно, что существует точка $x \in S$ такая, что $a < x$. Также $x < p < b$, и, поэтому, $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Но это противоречие, так как $x \in S$. Следовательно, наше предположение было ложным и $p \in S$. □

3.3.3 Предложение. Пусть T - открыто-замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. Тогда или $T = \mathbb{R}$, или $T = \emptyset$.

Доказательство. $\boxed{\text{Допустим}}$ $T \neq \mathbb{R}$ и $T \neq \emptyset$. Тогда существуют элементы $x \in T$ и $z \in \mathbb{R} \setminus T$. Не ограничивая общности, предположим, что $x < z$. Положим

$S = T \cap [x, z]$. Тогда S, будучи пересечением двух замкнутых множеств, замкнуто. Оно также ограничено сверху, так как z, очевидно, является его верхней границей. Пусть p - супремум S. По Лемме 3.3.2, $p \in S$. Так как $p \in [x, z]$, $p \leq z$. Также $z \in \mathbb{R} \setminus S$, $p \neq z$ и поэтому $p < z$.

Заметим, что T также является открытым множеством и $p \in T$. Значит существуют a и b из $\mathbb{R}$, $a < b$, такие, что $p \in (a, b) \subseteq T$. Пусть t такое, что $p < t < \min(b, z)$, где $\min(b, z)$ обозначает наименьшее из b и z. Таким образом, $t \in T$ и $t \in [p, z]$. Следовательно, $t \in T \cap [x, z] = S$. Это противоречие, так как $t > p$ и p есть супремум S. Поэтому наше предположение неверно и $T = \mathbb{R}$ or $T = \emptyset$. □

3.3.4 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Оно называется **связным** если единственными открыто-замкнутыми подмножествами X являются само X и $\emptyset$.

Переформулируя Предложение 3.3.3, мы получим:

3.3.5 Предложение. Топологическое пространство $\mathbb{R}$ связно. □

3.3.6 Пример. Если $(X, \mathcal{T})$ - произвольное дискретное пространство с более, чем одним элементом, то $(X, \mathcal{T})$ не является связным так как каждое одноэлементное множество в нем открыто-замкнуто. □

3.3.7 Пример. Если $(X, \mathcal{T})$ - произвольное антидискретное пространство, то оно связно так как единственными открыто-замкнутыми множествами являются X и $\emptyset$. (В действительности, единственными открытыми множествами являются X и $\emptyset$.) □

3.3.8 Пример. Если $X = \{a, b, c, d, e\}$ и

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

то $(X, \mathcal{T})$ - не связно так как $\{b, c, d, e\}$ является открыто-замкнутым подмножеством.

□

3.3.9 Замечание. Из Определения 3.3.4 следует, что топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ не является связным (или **несвязно**) тогда и только тогда, когда существуют непустые открытые множества A и B такие, что $A \cap B = \emptyset$ and $A \cup B = X$.[1] (См. Упражнение 3.3 #3.)

В заключение отметим, что $\mathbb{R}^2$ (и на самом деле, $\mathbb{R}^n$, для любого $n \geq 1$) есть связное множество. Однако, мы отложим доказательство до Главы 5.

Связность является очень важным понятием, о котором мы скажем намного больше в следующих главах.

Упражнения 3.3

1. Пусть S некоторое множество действительных чисел и $T = \{x : -x \in S\}$.

   (a) Докажите, что действительное число a является инфимумом S тогда и только тогда, когда $-a$ является супремумом T.

   (b) Используя (a) и Аксиому о Наименьшей Верхней Границе, докажите, что каждое непустое множество действительных чисел, ограниченное снизу, имеет наибольшую нижнюю границу.

2. Для каждого из следующих множеств действительных чисел найдите наибольший элемент и наименьшую верхнюю границу, если они существуют.

   (i) $S = \mathbb{R}$.

   (ii) $S = \mathbb{Z} =$ множество всех целых чисел.

[1] Большинство книг используют это свойство для определения связности.

(iii) $S = [9, 10)$.

(iv) $S =$ множество всех действительных чисел вида $1 - \frac{3}{n^2}$, где n - произвольное положительное целое число.

(v) $S = (-\infty, 3]$.

3. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - некоторое топологическое пространство. Докажите, что $(X, \mathcal{T})$ не является связным тогда и только тогда, когда оно имеет различные собственные непустые открытые подмножества A и B такие, что $A \cup B = X$.

4. Является ли пространство $(X, \mathcal{T})$ из Примера 1.1.2 связным?

5. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - некоторое бесконечное множество с конечно-замкнутой топологией. Является ли$(X, \mathcal{T})$ связным?

6. Пусть $(X, \mathcal{T})$ некоторое бесконечное множество с счетно-замкнутой топологией. Является ли $(X, \mathcal{T})$ связным?

7. Какие из топологических пространств из Упражнений 1.1 #9 являются связными?

3.4 Заключение

В этой главе мы ввели понятие предельной точки и показали что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки. Затем, в Предложении 3.1.8 мы увидели, что для произвольного множества A существует наименьшее замкнутое множество $\overline{A}$, содержащее его. Это множество $\overline{A}$ называется замыканием A.

Подмножество A топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется плотным в X если $\overline{A} = X$. Мы заметили, что $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, и множество $\mathbb{P}$ всех иррациональных чисел также плотно в $\mathbb{R}$. Мы ввели понятие окрестности точки и понятие связности топологического пространства. Мы доказали важный результат, а именно, что $\mathbb{R}$ связно. Позже, мы скажем намного больше о связности.

В упражнениях мы ввели понятие внутренности множества, которое дополняет понятие замыкания.

Глава 4

Гомеоморфизмы

Введение

В любой области математики важно различать, когда две структуры эквивалентны. Например, два множества эквивалентны в теории множеств, если существует биективная функция, которая отображает одно множество на другое. Две группы эквивалентны, или, пользуясь алгебраической терминологией, изоморфны, если существует биективный гомоморфизм одной группы на другую. Два топологических пространства эквивалентны, или гомеоморфны, если между ними существует гомеоморфизм.

4.1 Подпространства

4.1.1 Определение. Пусть Y - непустое подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Семейство $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ подмножеств Y является топологией на Y, называемой **топологией подпространства** (или **относительной топологией**, или **индуцированной топологией**, или **топологией, индуцированной на Y топологией $\mathcal{T}$**). Топологическое пространство $(Y, \mathcal{T}_Y)$ называется **подпространством** пространства $(X, \mathcal{T})$.

Конечно же вы должны проверить, что $\mathcal{T}_Y$ действительно является топологией на Y.

4.1.2 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

, and $Y = \{b, c, e\}$. Тогда топологией подпространства на Y является

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}. \qquad \square$$

4.1.3 Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

and $Y = \{a, d, e\}$. Тогда индуцированной топологией на Y является

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}. \qquad \square$$

4.1.4 Пример. Пусть $\mathcal{B}$ - база топологии $\mathcal{T}$ на X и пусть Y некоторое подмножество X. Нетрудно показать, что семейство $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ является базой для топологии подпространства $\mathcal{T}_Y$ на Y. [Упражнение: проверьте это.]

Рассмотрим подмножество $(1, 2)$ из $\mathbb{R}$. Базой индуцированной топологии на $(1, 2)$ является семейство $\{(a, b) \cap (1, 2) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$; то есть, $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ 1 \leq a < b \leq 2\}$ является базой индуцированной топологии на $(1, 2)$. $\square$

4.1.5 Пример. Рассмотрим подмножество $[1, 2]$ из $\mathbb{R}$. Базой для топологии подпространства $\mathcal{T}$ на $[1, 2]$ является

$$\{(a, b) \cap [1, 2] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\};$$

то есть,

$$\{(a, b) : 1 \leq a < b \leq 2\} \cup \{[1, b) : 1 < b \leq 2\} \cup \{(a, 2] : 1 \leq a < 2\} \cup \{[1, 2]\}$$

база для $\mathcal{T}$.

Здесь мы можем сделать удивительные наблюдения; например, $[1, 1\frac{1}{2})$ определенно **не** является открытым множеством в $\mathbb{R}$, но $[1, 1\frac{1}{2}) = (0, 1\frac{1}{2}) \cap [1, 2]$, открыто в подпространстве $[1, 2]$.

Также $(1, 2]$ не открыто в $\mathbb{R}$, но открыто в $[1, 2]$. Даже $[1, 2]$ не открыто в $\mathbb{R}$, но открыто в $[1, 2]$.

Итак, когда бы мы не говорили об открытом множестве, мы должны точно указать пространство и топологию, в которых это множество открыто. $\square$

4.1.6 Пример. Пусть $\mathbb{Z}$ подмножество $\mathbb{R}$, состоящее из всех целых чисел. Докажите, что топология на $\mathbb{Z}$, индуцированная эвклидовой топологией на $\mathbb{R}$, является дискретной.

Доказательство.

> Чтобы доказать, что индуцированная топология $\tau_{\mathbb{Z}}$ на $\mathbb{Z}$ дискретна, достаточно показать, по Предложению 1.1.9, что каждое одноэлементное множество из $\mathbb{Z}$ открыто в $\tau_{\mathbb{Z}}$; то есть, если $n \in \mathbb{Z}$, то $\{n\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$.

Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{Z}$. Но $(n-1, n+1)$ открыто в $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\{n\}$ открыто в индуцированной топологии на $\mathbb{Z}$. Таким образом, каждое одноэлементное множество из $\mathbb{Z}$ открыто в индуцированной топологии на $\mathbb{Z}$. Поэтому, индуцированная топология дискретна. □

Соглашение. Когда мы ссылаемся на следующие множества:

$\mathbb{Q}$ = множество всех рациональных чисел,

$\mathbb{Z}$ = множество всех целых чисел,

$\mathbb{N}$ = множество всех натуральных чисел,

$\mathbb{P}$ = множество всех иррациональных чисел,

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), или $[a, \infty)$

как топологические пространства, без явного указания топологий, мы подразумеваем топологии, индуцированные эвклидовой топологией на $\mathbb{R}$. (Иногда мы будем называть эти топологии "**обычными топологиями**".)

Упражнения 4.1

1. Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$ и $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$. Перечислите все члены индуцированных топологий $\mathcal{T}_Y$ на $Y = \{a, c, e\}$ и $\mathcal{T}_Z$ на $Z = \{b, c, d, e\}$.

2. Опишите топологию, индуцированную на множестве $\mathbb{N}$ of натуральных чисел, эвклидовой топологией на $\mathbb{R}$.

3. Укажите базу для обычной топологии на каждом из следующих множеств:

   (i) $[a, b)$, где $a < b$;

   (ii) $(a, b]$, где $a < b$;

   (iii) $(-\infty, a]$;

   (iv) $(-\infty, a)$;

   (v) (a, ∞);

   (vi) $[a, \infty)$.

   [Подсказка: см. Примеры 4.1.4 и 4.1.5.]

4. Пусть $A \subseteq B \subseteq X$ и на X задана топология $\mathcal{T}$. Пусть $\mathcal{T}_B$ - топология подпространства на B. Далее, пусть $\mathcal{T}_1$ - топология, индуцированная на A топологией $\mathcal{T}$, и $\mathcal{T}_2$ топология, индуцированная на A топологией $\mathcal{T}_B$. Докажите, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. (Таким образом подпространство подпространства само является подпространством.)

5. Пусть $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - подпространство пространства $(X, \mathcal{T})$. Покажите, что подмножество Z множества Y замкнуто в $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тогда и только тогда, когда $Z = A \cap Y$, где A - некоторое замкнутое подмножество $(X, \mathcal{T})$.

6. Покажите, что произвольное подпространство дискретного пространства дискретно.

7. Покажите, что произвольное подпространство антидискретного пространства антидискретно.

8. Покажите что подпространство $[0, 1] \cup [3, 4]$ пространства $\mathbb{R}$ имеет по крайней мере 4 открыто-замкнутых подмножества. Укажите в точности, сколько открыто-замкнутых подмножеств оно содержит.

9. Верно ли, что каждое подпространство связного пространства связно?

10. Пусть $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - подпространство пространства $(X, \mathcal{T})$. Покажите, что $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $Y \in \mathcal{T}$.

    [Подсказка: Вспомните, что $Y \in \mathcal{T}_Y$.]

11. Пусть A и B - связные подпространства топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Если $A \cap B \neq \emptyset$, докажите, что подпространство $A \cup B$ связно.

12. Пусть $(Y, \mathcal{T}_1)$ - подпространство T_1-пространства $(X, \mathcal{T})$. Покажите, что $(Y, \mathcal{T}_1)$ также является T_1-пространством.

13. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **Хаусдорфовым** (или T_2-пространством) если для любой пары различных точек a, b из X существуют открытые множества U и V такие, что $a \in U$, $b \in V$, и $U \cap V = \emptyset$.

    (i) Покажите, что $\mathbb{R}$ Хаусдорфово.

    (ii) Докажите, что каждое дискретное пространство Хаусдорфово.

    (iii) Покажите, что любое T_2-пространство является также T_1-пространством.

    (iv) Покажите, что $\mathbb{Z}$, снабженная конечно-замкнутой топологией, является T_1-пространством, но не T_2-пространством.

    (v) Докажите, что произвольное подпространство T_2-пространства является T_2-пространством.

14. Пусть $(Y, \mathcal{T}_1)$ - подпространство топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Покажите, что если $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также удовлетворяет второй аксиоме счетности.

15. Пусть a и b - точки из $\mathbb{R}$, где $a < b$. Докажите, что $[a, b]$ связно.

    [Подсказка: В утверждении и доказательства Предложения 3.3.3 замените всюду $\mathbb{R}$ на $[a, b]$.]

16. Пусть $\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел с обычной топологией, а $\mathbb{P}$ - множество всех иррациональных чисел с обычной топологией.

    (i) Докажите, что ни $\mathbb{Q}$, ни $\mathbb{P}$ не являются дискретными пространствами.

(ii) Являются ли $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{P}$ связными пространствами?

(iii) Являются ли $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{P}$ Хаусдорфовыми пространствами?

(iv) Являются ли $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{P}$ пространствами с конечно-замкнутой топологией?

17. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **регулярным пространством** если для любого замкнутого подмножества A из X любой точки $x \in X \setminus A$, существуют открытые множества U и V такие, что $x \in U$, $A \subseteq V$, и $U \cap V = \emptyset$. Если $(X, \mathcal{T})$ - регулярно и является T_1-пространством, то оно называется T_3-пространством. Докажите следующие утверждения.

(i) Каждое подпространство регулярного пространства регулярно.

(ii) Пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$, и $\mathbb{R}^2$ регулярны.

(iii) Если $(X, \mathcal{T})$ - регулярное T_1-пространство, то оно является T_2-пространством.

(iv) Прямая Соргенфрея является регулярным пространством.

(v)* Пусть X - множество $\mathbb{R}$, всех действительных чисел и $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Определите множество $C \subseteq \mathbb{R}$ как замкнутое если $C = A \cup T$, где A замкнуто в эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$, а T - произвольное подмножество S. Дополнения этиэ замкнутых множеств образуют топологию $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}$, которая Хаусдорфова но не регулярна.

4.2 Гомеоморфизмы

Теперь мы обратимся к понятию эквивалентности топологических пространств. Рассмотрим следующий пример:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

и

$$\mathcal{T}_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

Понятно, что в интуитивном смысле $(X, \mathcal{T})$ "эквивалентно" $(Y, \mathcal{T}_1)$. Функция $f \colon X \to Y$, определенная как $f(a) = g$, $f(b) = h$, $f(c) = i$, $f(d) = j$, и $f(e) = k$, дает нам эту эквивалентность. Теперь дадим формальное определение.

4.2.1 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства. Эти пространства **гомеоморфны** если существует отображение $f : X \to Y$ со следующими свойствами:

(i) f - инъективно (то есть $f(x_1) = f(x_2)$ влечет $x_1 = x_2$),

(ii) f - сюръективно (то есть, для любой точки $y \in Y$ существует $x \in X$ такая, что $f(x) = y$),

(iii) для любого $U \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, и

(iv) для любого $V \in \mathcal{T}$, $f(V) \in \mathcal{T}_1$.

Отображение f называется **гомеоморфизмом** между $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$. Мы будем писать $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. □

Далее мы покажем, что "$\cong$" является отношением эквивалентности и используем это чтобы показать, что все открытые интервалы (a, b) гомеоморфны друг другу. Пример 4.2.2 является первым шагом и показывает, что "$\cong$" является транзитивным отношением.

4.2.2 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}_1)$ и $(Z, \mathcal{T}_2)$ - топологические пространства. Докажите, что если $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ и $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$, то $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$.

Доказательство.

Нам дано, что $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$; то есть, существует гомеоморфизм $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. Нам также дано, что $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$; то есть, существует гомеоморфизм $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$.

Нам надо доказать, что $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$; то есть, нам надо найти гомеоморфизм $h : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$. Мы докажем, что суперпозиция $g \circ f : X \to Z$ является искомым гомеоморфизмом.

Так как $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ и $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$, существуют гомеоморфизмы $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ и $g : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$. Рассмотрим суперпозицию $g \circ f : X \to Z$.

[Таким образом, $g \circ f(x) = g(f(x))$, для всех $x \in X$.] Легко проверить, что $g \circ f$ является инъективным и сюръективным. Пусть $U \in \mathcal{T}_2$. Тогда, так как g - гомеоморфизм, $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$. Используя то, что f гомеоморфизм, мы получаем $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$. Но $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Поэтому, $g \circ f$ обладает свойством (iii) Определения 4.2.1. Далее, пусть $V \in \mathcal{T}$. Тогда $f(V) \in \mathcal{T}_1$ и, поэтому, $g(f(V)) \in \mathcal{T}_2$; то есть $g \circ f(V) \in \mathcal{T}_2$ и мы видим, что $g \circ f$ обладает свойством (iv) Определения 4.2.1. Следовательно, $g \circ f$ является гомеоморфизмом. $\square$

4.2.3 Замечание. Пример 4.2.2 показывает, что "$\cong$" является транзитивным бинарным отношением. На самом деле, легко проверить, что это также отношение эквивалентности; так как,

(i) $(X, \mathcal{T}) \cong (X, \mathcal{T})$ (Рефлексивность);

(ii) $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ влечет $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T})$ (Симметричность);

[Заметим, что если $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ гомеоморфизм, то обратное отображение $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T})$ тоже гомеоморфизм.]

(iii) $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ и $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$ влечет $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$ (Транзитивность).

$\square$

Следующие три примера показывают, что все открытые интервалы в $\mathbb{R}$ гомеоморфны. Длина определенно не является топологическим свойством. В частности, открытый интервал конечной длины, например $(0, 1)$, гомеоморфен интервалу бесконечной длины, как, например, $(-\infty, 1)$. На самом деле все открытые интервалы гомеоморфны $\mathbb{R}$.

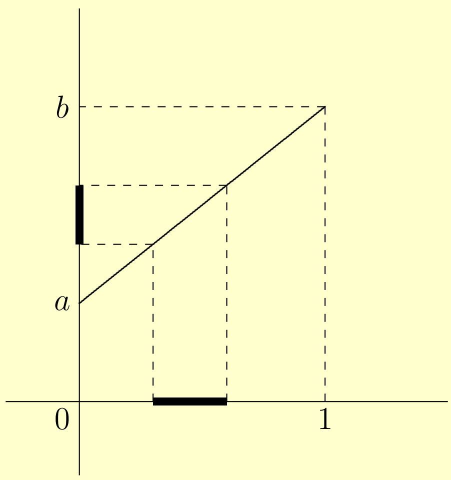
4.2.4 Пример. Докажите, что любые два непустых открытых интервала (a,b) и (c,d) - гомеоморфны.

Набросок Доказательства.

Как следует из Замечания 4.2.3, достаточно показать, что (a,b) гомеоморфно $(0,1)$ и (c,d) гомеоморфно $(0,1)$. Но так как a и b произвольны (за исключением того, что $a < b$), если (a,b) гомеоморфно $(0,1)$, то и (c,d) гомеоморфно $(0,1)$. Чтобы доказать, что (a,b) гомеоморфно $(0,1)$, достаточно найти гомеоморфизм $f : (0,1) \to (a,b)$.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, где $a < b$. Рассмотрим отображение $f : (0,1) \to (a,b)$, заданное соотношением

$$f(x) = a(1-x) + bx.$$



Очевидно, что $f : (0,1) \to (a,b)$ взаимно-однозначно. Из рисунка также ясно, что образ любого открытого интервала из $(0,1)$ при отображении f является открытым интервалом из (a,b); то есть,

$$f(\text{открытый интервал из } (0,1)) = \text{открытый интервал из } (a,b).$$

Но любое открытое множество из $(0,1)$ есть объединение открытых интервалов из $(0,1)$ и, поэтому

$$\begin{aligned} f(\text{открытое множество из } (0,1)) &= f(\text{объединение открытых интервалов из } (0,1)) \\ &= \text{объединение открытых интервалов из } (a,b) \\ &= \text{открытое множество из } (a,b). \end{aligned}$$

То есть условие (iv) Определения 4.2.1 удовлетворено. Аналогично, мы видим, что f^{-1} (открытое множество из (a,b)) есть открытое множество из $(0,1)$. Поэтому условие (iii) Определения 4.2.1 также удовлетворено.

[Упражнение: аккуратно проделайте предыдущее доказательство.]

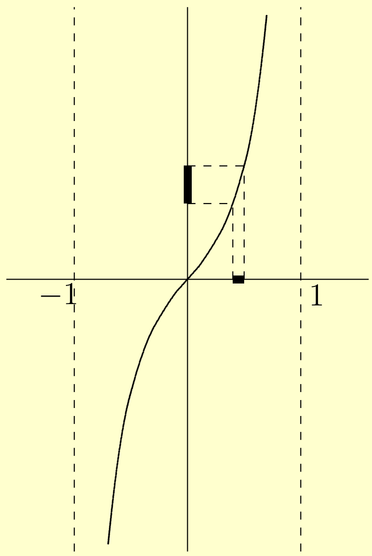
Итак, f - гомеоморфизм и $(0,1) \cong (a,b)$, для всех $a, b \in \mathbb{R}$, где $a < b$. Откуда немедленно следует, что $(a,b) \cong (c,d)$. □

4.2.5 Пример. Докажите, что пространство $\mathbb{R}$ гомеоморфно открытому интервалу $(-1,1)$ с обычной топологией.

Набросок доказательства. Определим $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ как

$$f(x) = \frac{x}{1- \mid x \mid}.$$

Легко проверить, что f взаимно-однозначно, а рисунок, также как в Примере 4.2.2, показывает, что f - гомеоморфизм.



[Упражнение: аккуратно докажите, что f - гомеоморфизм.] □

4.2.6 Пример. Докажите, что каждый открытый интервал (a,b), где $a < b$, гомеоморфен $\mathbb{R}$.

Доказательство. Немедленно следует из Примеров 4.2.5, 4.2.4 и Замечания 4.2.3. □

4.2.7 Замечание. Аналогично можно доказать, что любые два интервала $[a, b]$ и $[c, d]$, где $a < b$ и $c < d$, гомеоморфны. □

Упражнения 4.2

1. (i) Пусть $a, b, c,$ и d - произвольные действительные числа, где $a < b$ и $c < d$. Докажите, что $[a, b] \cong [c, d]$.

   (ii) Если a и b - произвольные действительные числа, докажите, что
$$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a, \infty) \cong [b, \infty).$$

   (iii) Пусть c, d, e, и f произвольные действительные числа, где $c < d$ и $e < f$. Докажите, что
$$[c, d) \cong [e, f) \cong (c, d] \cong (e, f].$$

   (iv) Выведите, что для любых действительных чисел a и b, где $a < b$,
$$[0, 1) \cong (-\infty, a] \cong [a, \infty) \cong [a, b) \cong (a, b].$$

2. Докажите, что $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$

3. Пусть m и c - действительные числа, отличные от нуля, X - подпространство из $\mathbb{R}^2$ заданное как $X = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$. Докажите, что X гомеоморфно $\mathbb{R}$.

4. (i) Пусть X_1 и X_2 - замкнутые прямоугольные области из $\mathbb{R}^2$, определенные следующим образом
$$X_1 = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_1 \text{ and } |y| \leq b_1\}$$
$$X_2 = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_2 \text{ and } |y| \leq b_2\}$$
где a_1, b_1, a_2 и b_2 - положительные действительные числа. Если на X_1 и X_2 определены топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ соответственно, индуцированные топологией на $\mathbb{R}^2$, покажите, что $X_1 \cong X_2$.

(ii) Пусть D_1 и D_2 - замкнутые диски из $\mathbb{R}^2$, определенные следующим образом

$$D_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_1\}$$

$$D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_2\}$$

где c_1 и c_2 - положительные действительные числа. Докажите, что $D_1 \cong D_2$, где D_1 и D_2 рассматриваются с индуцированными топологиями.

(iii) Докажите, что $X_1 \cong D_1$.

5. Пусть X_1 и X_2 - подпространства $\mathbb{R}$, заданные как $X_1 = (0,1) \cup (3,4)$ и $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$. Верно ли, что $X_1 \cong X_2$? (Обоснуйте ответ.)

6. (**Группа Гомеоморфизмов**) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - произвольное топологическое пространство и G - множество всех гомеоморфизмов X на себя.

   (i) Покажите, что G - группа с операцией суперпозиции функций.

   (ii) Если $X = [0,1]$ покажите, что G бесконечна.

   (iii) Если $X = [0,1]$, является ли G абелевой группой?

7. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - гомеоморфные топологические пространства. Докажите, что

   (i) Если $(X, \mathcal{T})$ является T_0-пространством, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также есть T_0-пространство.

   (ii) Если $(X, \mathcal{T})$ является T_1-пространством, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также есть T_1-пространство.

   (iii) Если $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также Хаусдорфово пространство.

   (iv) Если $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также удовлетворяет второй аксиоме счетности.

   (v) Если $(X, \mathcal{T})$ - сепарабельное пространство, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также сепарабельное пространство.

8.* Пусть $(X, \mathcal{T})$ - дискретное топологическое пространство. Докажите, что $(X, \mathcal{T})$ гомеоморфно некоторому подпространству $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда X счетно.

4.3 Негомеоморфные пространства

Чтобы доказать, что два топологических пространства гомеоморфны, мы должны найти гомеоморфизм между ними.

Доказательство того, что два топологических пространства не гомеоморфны часто намного сложнее, так как нам надо показать, что гомеоморфизма между этими пространствами не существует. Следующий пример дает нам представление о том, как это можно показать.

4.3.1 Пример. Докажите, что $[0,2]$ негомеоморфно подпространству $[0,1]\cup[2,3]$ из $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $(X,\mathcal{T})=[0,2]$ и $(Y,\mathcal{T}_1)=[0,1]\cup[2,3]$. Тогда

$$[0,1]=[0,1]\cap Y \Rightarrow [0,1] \text{ замкнуто в } (Y,\mathcal{T}_1)$$

and
$$[0,1]=(-1,1\tfrac{1}{2})\cap Y \Rightarrow [0,1] \text{ открыто в } (Y,\mathcal{T}_1).$$

Таким образом, Y несвязно, так как $[0,1]$ является его собственным непустым открыто-замкнутым подмножеством.

Предположим, что $(X,\mathcal{T})\cong(Y,\mathcal{T}_1)$. Тогда должен существовать гомеоморфизм $f\colon (X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$. Поэтому $f^{-1}([0,1])$ - открыто-замкнутое подмножество X, и, следовательно, X несвязно. Но это неверно, так как $[0,2]=X$ связно. (См. Упражнения 4.1 #15.) Итак мы получили противоречие, и поэтому $(X,\mathcal{T})\not\cong(Y,\mathcal{T}_1)$. □

Чему мы научились из предыдущего примера?

4.3.2 Предложение. Топологическое пространство гомеоморфное связному пространству связно. □

Предложение 4.3.2 указывает нам один способ доказательства негомеоморфности двух топологических пространств ... посредством нахождения свойства, "сохраняемого при гомеоморфизмах", такого, что одно из пространств обладает им, а другое - нет.

В упражнениях мы встретили много свойств, "сохраняемых при гомеоморфизмах":

(i) T_0-пространство;

(ii) T_1-пространство;

(iii) T_2-пространство или Хаусдорфовость;

(iv) регулярность;

(v) T_3-пространство;

(vi) вторая аксиома счетности;

(vii) сепарабельность. [См. Упражнения 4.2 #7.]

А также некоторые другие свойства, как:

(viii) дискретность;

(ix) антидискретность;

(x) конечно-замкнутость;

(xi) счетно-замкнутость.

Итак, вместе со связностью мы уже знаем двенадцать свойств, сохраняемых при гомеоморфизмах. Также, два пространства $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ не могут быть гомеоморфными если X и Y имеют разные мощности (например, X - счетно, а Y несчетно), или если $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_1$ имеют разные мощности.

Тем не менее, столкнувшись с конкретной проблемой, может оказаться, что ни одно из этих свойств не может быть использовано для доказательства негомеоморфности. Например, попробуйте доказать, что $(0,1)$ негомеоморфно $[0,1]$, или что $\mathbb{R}$ негомеоморфно $\mathbb{R}^2$. Чуть позже мы увидим, что эти пространства действительно негомеоморфны.

Но сначала давайте ответим на следующий вопрос: какие из подпространств $\mathbb{R}$ являются связными?

4.3.3 Определение. Подмножество S множества $\mathbb{R}$ называется **интервалом** если оно обладает следующим свойством: если $x \in S$, $z \in S$, и $y \in \mathbb{R}$ такие, что $x < y < z$, то $y \in S$.

4.3.4 Замечания. Заметьте, что любое одноэлементное множество является интервалом.

(ii) Каждый интервал имеет одну из следующих форм: $\{a\}, [a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

(iii) Как следует из Примера 4.2.6, Замечания 4.2.7, И Упражнений 4.2 #1, каждый интервал гомеоморфен $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$, или $\{0\}$. В Упражнениях 4.3 #1 мы будем в состоянии сделать более сильное утверждение.

4.3.5 Предложение. Подпространство S пространства $\mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является интервалом.

Доказательство. То что все интервалы связны может быть доказано аналогично Предложению 3.3.3, простой заменой в доказательстве интервала $\mathbb{R}$ на интервал, связность которого мы хотим доказать.

В обратную сторону, пусть S связно. Предположим $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$, и $y \notin S$. Тогда $(-\infty, y) \cap S = (-\infty, y] \cap S$ являются открытым и замкнутым подмножествами S. То есть S имеет открыто-замкнутое подмножество, а именно, $(-\infty, y) \cap S$. Чтобы показать, что S несвязно, нам надо проверить, что это открыто-замкнутое подмножество является собственным и непустым. Оно непустое, так как содержит x. Оно собственное так как $z \in S$, но $z \notin (-\infty, y) \cap S$. Итак S несвязно, что противоречит нашему предположению. Следовательно, S - интервал. $\square$

Мы теперь видим причину по которой используется термин “связность”. Подпространства из $\mathbb{R}$ такие, как $[a, b]$, (a, b), и т.п. связны, тогда как пространства вида

$$X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [5, 6]$$

которые являются объединениями “несвязных” кусков, несвязны.

Давайте теперь займемся проблемой негомеоморфности $(0, 1) \not\cong [0, 1]$. Сначала сделаем на первый взгляд тривиальное наблюдение.

4.3.6 Замечание. Пусть $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - гомеоморфизм. И пусть $a \in X$, так что $X \setminus \{a\}$ подпространство пространства X с индуцированной топологией $\mathcal{T}_2$. Также, пусть $Y \setminus \{f(a)\}$ подпространство пространства Y с индуцированной топологией $\mathcal{T}_3$. Тогда $(X \setminus \{a\}, \mathcal{T}_2)$ гомеоморфно $(Y \setminus \{f(a)\}, \mathcal{T}_3)$.

Набросок доказательства. Определим отображение $g \colon X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{f(a)\}$ как $g(x) = f(x)$, для всех $x \in X \setminus \{a\}$. Легко проверить, что g гомеоморфизм. (Докажите это.) $\square$

Как немедленное следствие предыдущего замечания, мы имеем:

4.3.7 Следствие. Если a, b, c и d - действительные числа такие, что $a < b$ и $c < d$, то

(i) $(a, b) \not\cong [c, d)$,

(ii) $(a, b) \not\cong [c, d]$, и

(iii) $[a, b) \not\cong [c, d]$.

Доказательство. (i) Пусть $(X, \mathcal{T}) = [c, d)$ и $(Y, \mathcal{T}_1) = (a, b)$. $\boxed{\text{Допустим}}$, что $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. Тогда $X \setminus \{c\} \cong Y \setminus \{y\}$, для некоторой точки $y \in Y$. Но, $X \setminus \{c\} = (c, d)$ - интервал, и поэтому связен, тогда как независимо от выбора точки y из (a, b)

в результате ее удаления, мы получим несвязное пространство. То есть, как следует из Предложения 4.3.2,

$$X \setminus \{c\} \not\cong Y \setminus \{y\}, \text{ для всех } y \in Y.$$

Полученное противоречие доказывает, что $[c, d) \not\cong (a, b)$.

(ii) $[c, d] \setminus \{c\}$ связно, тогда как $(a, b) \setminus \{y\}$ несвязно для всех $y \in (a, b)$. Таким образом, $(a, b) \not\cong [c, d]$.

(iii) $\boxed{\text{Допустим}}$, что $[a, b) \cong [c, d]$. Тогда $[c, d] \setminus \{c\} \cong [a, b) \setminus \{y\}$ для некоторой точки $y \in [a, b)$. Поэтому $([c, d] \setminus \{c\}) \setminus \{d\} \cong ([a, b) \setminus \{y\}) \setminus \{z\}$, для некоторой точки $z \in [a, b) \setminus \{y\}$; то есть, $(c, d) \cong [a, b) \setminus \{y, z\}$, для некоторых различных y и z из $[a, b)$. Но (c, d) связно, тогда как $[a, b) \setminus \{y, z\}$, для любых двух различных y и z из $[a, b)$, несвязно. Полученное противоречие доказывает, что $[a, b) \not\cong [c, d]$. □

Упражнения 4.3

1. Докажите, что каждый интервал гомеоморфен одному и только одному из следующих пространств:

$$\{0\}; \qquad (0, 1); \qquad [0, 1]; \qquad [0, 1).$$

2. Выведите из Предложения 4.3.5 , что каждое счетное подпространство $\mathbb{R}$, с более чем одной точкой, несвязно. (В частности, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ несвязны.)

3. Пусть X - единичная окружность в $\mathbb{R}^2$; то есть, $X = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$, с индуцированной топологией.

   (i) Покажите, что $X \setminus \{\langle 1, 0\rangle\}$ гомеоморфно открытому интервалу $(0, 1)$.

   (ii) Докажите, что $X \not\cong (0, 1)$ и $X \not\cong [0, 1]$.

   — (iii)] Заметив, что для любой точки $a \in X$, подпространство $X \setminus \{a\}$ связно, покажите, что $X \not\cong [0, 1)$.

   (iv) Докажите, что X не гомеоморфно никакому интервалу.

4. Пусть Y - подпространство пространства $\mathbb{R}^2$, заданное как

$$Y = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

   (i) Является ли Y гомеоморфным пространству X из вышеприведенного Упражнения 3?

   (ii) Является ли Y гомеоморфным некоторому интервалу?

5. Пусть Z - подпространство пространства $\mathbb{R}^2$, заданное как

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-3/2)^2 + y^2 = 1\}.$$

   Покажите, что

   (i) Z не гомеоморфно никакому интервалу, и

   (ii) Z не гомеоморфно пространствам X или Y, описанным в вышеприведенных Упражнениях 3 и 4.

6. Докажите, что прямая Соргенфрея не гомеоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\,2}$, или произвольному подпространству любого из этих пространств.

7. (i) Докажите, что топологическое пространство из Упражнений 1.1 #5 (i) не гомеоморфно пространству из Упражнений 1.1 #9 (ii).

   (ii)* В Упражнениях 1.1 #5, верно ли, что $(X, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T}_2)$?

   (iii)* В Упражнениях 1.1 # 9, верно ли, что $(X, \mathcal{T}_2) \cong (X, \mathcal{T}_9)$?

8. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, где X - бесконечное множество. Докажите каждое из следующих утверждений (доказанные первоначально Джоном Гинзбургом и Биллом Сендсом).

   (i)* $(X, \mathcal{T})$ имеет подпространство, гомеоморфное $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$, где $\mathcal{T}_1$ является либо антидискретной топологией, либо $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ - T_0-пространство.

   (ii)** Пусть $(X, \mathcal{T})$ - T_1-пространство. Тогда $(X, \mathcal{T})$ имеет подпространство гомеоморфное $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$, где $\mathcal{T}_2$ либо конечно-замкнутая топология, либо дискретная топология.

(iii) Выведите из (ii), что произвольное Хаусдорфово пространство содержит бесконечное дискретное подпространство и, следовательно, подпространство, гомеоморфное $\mathbb{N}$ с дискретной топологией.

(iv)** Пусть $(X, \mathcal{T})$ - T_0-пространство, которое не является T_1-пространством. Тогда пространство $(X, \mathcal{T})$ имеет подпространство, гомеоморфное $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$, где $\mathcal{T}_3$ состоит из $\mathbb{N}$, $\emptyset$ и всех множеств вида $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ или $\mathcal{T}_3$ состоит из $\mathbb{N}$, $\emptyset$, и всех множеств вида $\{n, n+1, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(v) Выведите из предыдущего, что каждое бесконечное топологическое пространство имеет подпространство, гомеоморфное $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_4)$ где $\mathcal{T}_4$ либо антидискретная топология, либо дискретная топология, либо конечно-замкнутая топология, либо одна из двух топологий, описанных (iv), и известных как **топология начального сегмента** и **топология конечного сегмента**, соответственно. Более того, никакие две из этих пяти топологий на $\mathbb{N}$ не гомеоморфны.

9. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется **локальным гомеоморфизмом** если любая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность U такую, что f отображает U гомеоморфно на открытое подпространство V из $(Y, \mathcal{T}_1)$; то есть, если топология, индуцированная на U посредством $\mathcal{T}$ есть $\mathcal{T}_2$ и топология, индуцированная на $V = f(U)$ посредством $\mathcal{T}_1$ есть $\mathcal{T}_3$, то f - гомеоморфизм пространства $(U, \mathcal{T}_2)$ на $(V, \mathcal{T}_3)$. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **локально гомеоморфным** пространству $(Y, \mathcal{T}_1)$ если существует локальный гомеоморфизм пространства $(X, \mathcal{T})$ на $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(i) Докажите, что если пространства $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ гомеоморфны, то они локально гомеоморфны.

(ii) Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - открытое подпространство $(Y, \mathcal{T}_1)$, то $(X, \mathcal{T})$ локально гомеоморфно $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(iii)* Докажите, что если $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - локальный гомеоморфизм, то f отображает каждое открытое подмножество $(X, \mathcal{T})$ на открытое подмножество $(Y, \mathcal{T}_1)$.

4.4 Заключение

Существует три важных конструкции для создания новых топологических пространств из уже существующих: подпространства, произведения, фактор-пространства. Мы изучим все три в надлежащее время. Подпространства изучались в этой главе. Это позволило нам определить такие важные пространство как $\mathbb{Q}$, $[a,b]$, (a,b), и т.п.

Мы определили центральное для топологии понятие гомеоморфизма и отметили, что "$\cong$" является отношением эквивалентности. Свойство называется **топологическим** если оно сохраняется при гомеоморфизмах; то есть, если $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ и $(X,\mathcal{T})$ обладает этим свойством, то $(Y,\mathcal{T}_1)$ тоже должно обладать этим свойством. Было показано, что связность является топологическим свойством. Поэтому любое пространство, гомеоморфное связному, само связно. (Также было указано большое число других топологических свойств.) Мы формально определили понятие интервала на $\mathbb{R}$, и показали, что интервалы являются единственными связными подпространствами $\mathbb{R}$.

Если даны два топологических пространства $(X,\mathcal{T})$ и $(Y,\mathcal{T}_1)$ интересно выяснить являются ли они гомеоморфными или нет. Мы доказали, что каждый интервал из $\mathbb{R}$ гомеоморфен одному и только одному из подпространств $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$ и $\{0\}$. В следующей главе мы покажем, что $\mathbb{R}$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^2$. Намного труднее доказать, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Это будет сделано позже при помощи теоремы Жордана. Более общим фактом является следующий $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда $n = m$. Его лучше всего доказывать при помощи алгебраической топологии, которая только слегка упоминается в этой книге.

В Упражнениях 4.2 #6 было введено понятие группы гомеоморфизмов, которое само по себе является важным предметом для изучения.

Глава 5

Непрерывные Отображения

Введение

Во многих областях чистой математики мы изучаем то что в теории категорий называется ‘‘объектами’’ и ‘‘стрелками’’. В линейной алгебре объектами являются векторные пространства, а стрелками - линейные отображения. В теории групп объектами являются группы , а стрелками - гомоморфизмы, тогда как в теории множеств объектами являются множества, а стрелками - отображения. В топологии объектами являются топологические пространства. Теперь мы определим стрелки ... непрерывные отображения.

5.1 Непрерывные отображения

Конечно же вы уже знакомы [1] с понятием непрерывной функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной** если для произвольного $a \in \mathbb{R}$ и произвольного положительного действительного числа ε, существует положительное действительное число δ такое, что $| x-a |< \delta$ влечет $| f(x)-f(a) |< \varepsilon$.

Совершенно неочевидно, как обобщить это определение на случай общих топологических пространств, где у нас не определены ‘‘абсолютное значение’’

[1] В начале этой главы предполагается, что вы обладаете некоторыми познаниями в области действительного анализа и, в частности, знакомы с ε–δ определением непрерывности. Если это не так, тогда сразу переходите к Определению 5.1.3.

или “вычитание”. Поэтому нам надо найти другое (эквивалентное) определение непрерывности, которое может быть обобщено.

Легко видеть, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbb{R}$ и каждого интервала $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \in (f(a) - \varepsilon\,,\, f(a) + \varepsilon)$ для всех $x \in (a - \delta\,,\, a + \delta)$.

Это определение подходит больше, так как не использует понятия “абсолютное значение”, но по-прежнему использует “вычитание”. Следующая лемма показывает, как избавиться от вычитания.

5.1.1 Лемма. Пусть f функция, отображающая $\mathbb{R}$ в себя. f непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого $a \in \mathbb{R}$ и каждого открытого множества U, содержащего $f(a)$, существует открытое множество V, содержащее a такое, что $f(V) \subseteq U$.

Доказательство. Предположим, что f непрерывна. Пусть $a \in \mathbb{R}$, и пусть U - произвольное открытое множество, содержащее $f(a)$. Тогда существуют действительные числа c и d такие, что $f(a) \in (c, d) \subseteq U$. Положим ε равным наименьшему из двух чисел $d - f(a)$ и $f(a) - c$ так, что

$$(f(a) - \varepsilon\,,\, f(a) + \varepsilon) \subseteq U.$$

Так как функция f непрерывна, существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \in (f(a)-\varepsilon\,,\, f(a)+\varepsilon)$ для всех $x \in (a - \delta\,,\, a + \delta)$. Пусть V есть открытое множество $(a - \delta\,,\, a + \delta)$. Тогда $a \in V$ и $f(V) \subseteq U$, как и требовалось.

В обратную сторону, предположим, что для каждого $a \in \mathbb{R}$ и каждого открытого множества U, содержащего $f(a)$, существует открытое множество V, содержащее a, такое, что $f(V) \subseteq U$. Нам надо показать, что f - непрерывная функция. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и ε - произвольное положительное действительное число. Положим $U = (f(a) - \varepsilon\,,\, f(a) + \varepsilon)$. Тогда U - открытое множество, содержащее $f(a)$. Следовательно существует открытое множество V, содержащее a, такое, что $f(V) \subseteq U$. Так как V - открытое множество, содержащее a, существуют действительные числа c и d такие, что $a \in (c, d) \subseteq V$. Положим δ равным наименьшему из двух чисел $d - a$ и $a - c$, так что $(a - \delta\,,\, a + \delta) \subseteq V$. Тогда для всех $x \in (a - \delta\,,\, a + \delta)$, $f(x) \in f(V) \subseteq U$, как и требовалось. То есть, f непрерывна.$\square$

Мы можем использовать свойство, описанное в Лемме 5.1.1, чтобы определить непрерывность, однако следующая Лемма позволяет дать более элегантное определение.

5.1.2 Лемма. Пусть f - отображение топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ в топологическое пространство $(Y, \mathcal{T}')$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(i) для любого $U \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$,

(ii) для любого $a \in X$ и любого $U \in \mathcal{T}'$ с $f(a) \in U$, существует $V \in \mathcal{T}$ такое, что $a \in V$ и $f(V) \subseteq U$.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (i). Пусть $a \in X$ и $U \in \mathcal{T}'$ с $f(a) \in U$. Тогда $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Положим $V = f^{-1}(U)$, тогда $a \in V$, $V \in \mathcal{T}$, и $f(V) \subseteq U$. То есть условие (ii) выполнено.

В обратную сторону, предположим, что условие (ii) выполнено. Пусть $U \in \mathcal{T}'$. Если $f^{-1}(U) = \emptyset$, то очевидно $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Если $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, то пусть $a \in f^{-1}(U)$. Тогда $f(a) \in U$. Следовательно существует $V \in \mathcal{T}$ такое, что $a \in V$ и $f(V) \subseteq U$. Поэтому для каждого $a \in f^{-1}(U)$ существует $V \in \mathcal{T}$ такое, что $a \in V \subseteq f^{-1}(U)$. Из Следствия 3.2.9 мы получаем, что $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. То есть, условие (i) выполнено. □

Из Лемм 5.1.1 и 5.1.2 мы видим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого открытого подмножества U из $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ - открытое множество.

Это позволяет нам определить понятие непрерывного отображения между двумя топологическими пространствами следующим образом:

5.1.3 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства и f - отображение из X в Y. Тогда $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ называется **непрерывным отображением** если для каждого $U \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Из вышеприведенных замечаний мы видим, что это определение непрерывности совпадает с обычным определением когда $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}_1) = \mathbb{R}$.

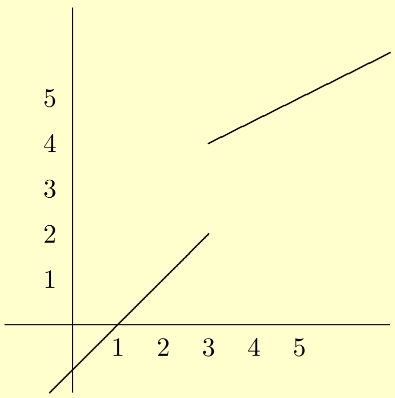
Давайте обратимся к нескольким простым примерам, чтобы увидеть, как удобно пользоваться этим определением на практике.

5.1.4 Пример. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную как $f(x) = x$, для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого открытого множества U in $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U) = U$ и, поэтому, открыто. Следовательно, f - непрерывна. □

5.1.5 Пример. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана посредством $f(x) = c$, где c - константа, а $x \in \mathbb{R}$. Пусть U - произвольное открытое множество из $\mathbb{R}$. Ясно, что $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ если $c \in U$ и $\emptyset$ если $c \notin U$. В обоих случаях, $f^{-1}(U)$ открыто. Поэтому f - непрерывна. □

5.1.6 Пример. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную как

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{if } x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x + 5), & \text{if } x > 3. \end{cases}$$



Вспомните, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества открыт.

Поэтому, чтобы показать, что f **не** непрерывна, мы должны найти только одно открытое множество U такое, что $f^{-1}(U)$ не открыто.

Тогда $f^{-1}((1,3)) = (2,3]$, не является открытым. Следовательно, f не непрерывна.

□

Отметим, что Лемма 5.1.2 может быть переформулирована следующим образом.[2]

5.1.7 Предложение. Пусть f - отображение топологического пространства $(X,\mathcal{T})$ в пространство $(Y,\mathcal{T}')$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ и каждого $U \in \mathcal{T}'$ с $f(x) \in U$, существует $V \in \mathcal{T}$ такое, что $x \in V$ и $f(V) \subseteq U$. □

5.1.8 Предложение. Пусть $(X,\mathcal{T}), (Y,\mathcal{T}_1)$ и $(Z,\mathcal{T}_2)$ - топологические пространства. Если $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ и $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ непрерывные отображения, то суперпозиция $g \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ тоже непрерывна.

Доказательство.

Чтобы показать, что композиция $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\tau_2)$ непрерывна, нам надо показать, что если $U \in \tau_2$, то $(g \circ f)^{-1}(U) \in \tau$.

Но $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Пусть U открыто в $(Z,\mathcal{T}_2)$. Так как g непрерывно, $g^{-1}(U)$ открыто в $\mathcal{T}_1$. Тогда $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в $\mathcal{T}$ так как f непрерывно. Но $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Поэтому $g \circ f$ непрерывно. □

[2]Если вы не читали Лемму 5.1.2 и ее доказательство, вам следует сделать это сейчас.

Следующий результат показывает, что непрерывность может быть, при желании, описана в терминах замкнутых множеств вместо открытых.

5.1.9 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства. Отображение $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого подмножества S из Y, $f^{-1}(S)$ есть замкнутое подмножество X.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из того, что

$$f^{-1}(\text{дополнение к } S) = \text{дополнение к } f^{-1}(S). \qquad \square$$

5.1.10 Замечание. Существует связь между непрерывными отображениями и гомеоморфизмами : если $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - гомеоморфизм, то это непрерывное отображение. конечно же не всякое непрерывное отображение является гомеоморфизмом.

Однако следующее предложение, чье доказательство следует из определений "непрерывности" и "гомеоморфизма" полностью раскрывает эту связь.

5.1.11 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}')$ - топологические пространства, а f - отображение из X в Y. f является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда

(i) f непрерывно,

(ii) f - взаимно-однозначно; то есть, существует обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$, и

(iii) f^{-1} тоже непрерывно. $\square$

Полезным результатом является следующее предложение, которое утверждает, что ограничение непрерывного отображения непрерывно. Рутинное доказательство оставляется читателю – см также Упражнения 5.1 #8.

5.1.12 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - непрерывное отображение, A - подмножество X, а $\mathcal{T}_2$ - индуцированная топология на A. Далее, пусть $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - ограничение f на A; то есть, $g(x) = f(x)$, для всех $x \in A$. Тогда g непрерывно.

Упражнения 5.1

1. (i) Пусть $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - постоянная функция. Покажите, что f непрерывна.

   (ii) Пусть $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ - тождественная функция. Покажите, что f непрерывна.

2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определено как

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   (i) Докажите, используя метод из Примера 5.1.9, что f не является непрерывным.

   (ii) Найдите $f^{-1}\{1\}$ и, используя Предложение 5.1.9, выведите, что f не является непрерывным.

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определено как

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1. \end{cases}$$

   Является ли f непрерывным? (Обоснуйте ваш ответ.)

4. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - подпространство пространства $\mathbb{R}$, определенное как $X = [0, 1] \cup [2, 4]$. Определим отображение $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ посредством

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x \in [0, 1] \\ 2, & \text{if} \quad x \in [2, 4]. \end{cases}$$

   Докажите, что f непрерывно. (Удивились?)

5. Пусть $(X,\mathcal{T})$ и $(Y,\mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а $\mathcal{B}_1$ - база топологии $\mathcal{T}_1$. Покажите, что отображение $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$, для любого $U\in\mathcal{B}_1$.

6. Пусть $(X,\mathcal{T})$ и $(Y,\mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а f отображение из X в Y. Докажите, что если $(X,\mathcal{T})$ - дискретное пространство, то f непрерывно.

7. Пусть $(X,\mathcal{T})$ и $(Y,\mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а f - отображение из X в Y. Докажите, что если $(Y,\mathcal{T}_1)$ - антидискретное пространство, то f непрерывно.

8. Пусть $(X,\mathcal{T})$ и $(Y,\mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ - непрерывное отображение. Пусть A - подмножество X, $\mathcal{T}_2$ - индуцированная топология на A, $B=f(A)$, $\mathcal{T}_3$ - индуцированная топология на B, а $g:(A,\mathcal{T}_2)\to(B,\mathcal{T}_3)$ - ограничение f на A. докажите, что g непрерывно.

9. Пусть f - отображение пространства $(X,\mathcal{T})$ в пространство $(Y,\mathcal{T}')$. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $x\in X$ и каждой окрестности N точки $f(x)$ существует окрестность M точки x такая, что $f(M)\subseteq N$.

10. Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ - две топологии на множестве X. Топология $\mathcal{T}_1$ называется **измельчением** топологии $\mathcal{T}_2$ если $\mathcal{T}_1\supseteq\mathcal{T}_2$. Докажите, что

    (i) Эвклидова топология на $\mathbb{R}$ является измельчением конечно-замкнутой топологии на $\mathbb{R}$;

    (ii) тождественное отображение $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}_1$ является измельчением $\mathcal{T}_2$.

11. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывная функция такая, что $f(q)=0$ для любого рационального числа q. Докажите, что $f(x)=0$ для каждого $x\in\mathbb{R}$.

12. Пусть $(X,\mathcal{T})$ и $(Y,\mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ - непрерывное отображение. Докажите, что если f инъективно, то

    (i) Хаусдорфовость $(Y,\mathcal{T}_1)$ влечет Хаусдорфовость $(X,\mathcal{T})$.

    (ii) Если $(Y,\mathcal{T}_1)$ - T_1-пространство, то $(X,\mathcal{T})$ тоже T_1-пространство.

13. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а f - отображение из $(X, \mathcal{T})$ в $(Y, \mathcal{T}_1)$. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого подмножества A из X, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

    [Подсказка: Используйте предложение 5.1.9.]

5.2 Теорема о Промежуточном Значении

5.2.1 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - сюръективно и непрерывно. Если $(X, \mathcal{T})$ - связно, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ тоже связно.

Доказательство. Предположим, что $(Y, \mathcal{T}_1)$ не связно. Тогда у него есть открыто-замкнутое подмножество U такое, что $U \neq \emptyset$ and $U \neq Y$. Тогда $f^{-1}(U)$ является открытым множеством, так как f непрерывно, а также является замкнутым множеством, что следует из Предложения 5.1.9; то есть, $f^{-1}(U)$ - открыто-замкнутое подмножество X. Далее, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ так как f сюръективно и $U \neq \emptyset$. Также $f^{-1}(U) \neq X$, так как в противном случае U было бы равно Y, по сюръективности f. Таким образом, $(X, \mathcal{T})$ не связно. Полученное противоречие доказывает, что $(Y, \mathcal{T}_1)$ тоже связно. □

5.2.2 Замечания. (i) Предыдущее предложение окажется неверным, если опустить условие сюръективности. (Постройте соответствующий пример.)

(ii) Проще говоря, Предложение 5.2.1 утверждает: непрерывный образ связного множества связен.

(iii) Предложение 5.2.1 говорит нам, что если $(X, \mathcal{T})$ - связное множество, а $(Y, \mathcal{T}')$ не связное, то не существует непрерывного отображения из $(X, \mathcal{T})$ на $(Y, \mathcal{T}')$. Например, тогда как существует бесконечно много отображений из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$ (или на $\mathbb{Z}$), ни одно из них не является непрерывным. Действительно, в Упражнениях 5.2 # 10 мы увидели, что единственными непрерывными отображениями $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{Q}$ (или в $\mathbb{Z}$) являются постоянные отображения. □

Часто бывает полезной следующая усиленная форма понятия связности.

5.2.3 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **линейно-связным** если для каждой пары различных точек a и b из X существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to (X, \mathcal{T})$ такое, что $f(0) = a$ и $f(1) = b$. Отображение f называется **путем, соединяющим** a **и** b.

5.2.4 Пример. Легко видеть, что каждый интервал линейно-связен. □

5.2.5 Пример. Для любого $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ линейно-связно. □

5.2.6 Предложение. Любое линейно-связное пространство связно.

Доказательство. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - линейно-связное пространство, не являющееся связным.

Тогда у него есть непустое собственное открыто-замкнутое подмножество U. Итак, должны существовать точки a и b такие, что $a \in U$ и $b \in X \setminus U$. Так как $(X, \mathcal{T})$ линейно-связно, существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to (X, \mathcal{T})$ такое, что $f(0) = a$ и $f(1) = b$.

Однако, $f^{-1}(U)$ - открыто-замкнутое подмножество $[0,1]$. Так как $a \in U$, $0 \in f^{-1}(U)$, поэтому $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Так как $b \notin U$, $1 \notin f^{-1}(U)$, поэтому $f^{-1}(U) \neq [0,1]$. Следовательно, $f^{-1}(U)$ - непустое собственное открыто-замкнутое подмножество $[0,1]$, что противоречит связности $[0,1]$.

Следовательно $(X, \mathcal{T})$ связно. □

5.2.7 Замечание. Утверждение, обратное Предложению 5.2.6, неверно; то есть, не каждое связное пространство является линейно-связным. Примером такого пространства является подпространство $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \le 1\} \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \le y \le 1\}.$$

[В Упражнении 5.2 #6 показывается, что X связно. В том, что X не линейно-связно, можно убедиться, показав, что не существует пути, соединяющего $\langle 0, 0\rangle$ с, скажем, точкой $\langle 1/\pi, 0\rangle$. Нарисуйте картинку и постарайтесь убедить себя в этом.] $\square$

Теперь мы можем доказать, что $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$.

5.2.8 Пример. Очевидно, что $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$ - линейно-связно и, следовательно, по предложению 5.2.6, связно. Однако, как следует из Предложения 4.2.5, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, для произвольного $a \in \mathbb{R}$, несвязно. Следовательно, $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$. $\square$

Далее, мы собираемся представить Теорему Вейерштрасса о Промежуточном Значении, которая является замечательным приложением топологии к теории функций действительного переменного. Решающим топологическим фактором в доказательстве является связность.

5.2.9 Теорема. (Теорема Вейерштрасса о Промежуточном Значении) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, и пусть $f(a) \ne f(b)$. Тогда для любого действительного числа p между $f(a)$ и $f(b)$ существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = p$.

Доказательство. Так как $[a, b]$ - связное множество, а f - непрерывная функция, из Предложения 5.2.1 следует, что $f([a, b])$ - тоже связно. Из Предложения 4.3.5 следует, что $f([a, b])$ - интервал. Ясно, что $f(a)$ и $f(b)$ принадлежат $f([a, b])$. Поэтому, если p находится между $f(a)$ и $f(b)$, $p \in f([a, b])$, то есть, $p = f(c)$, для некоторого $c \in [a, b]$. $\square$

5.2.10 Следствие. Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция такая, что $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$, то существует действительное число $x \in [a,b]$ такое, что $f(x) = 0$. $\square$

5.2.11 Следствие. (Теорема о неподвижной точке) Пусть f - непрерывное отображение из $[0,1]$ в $[0,1]$. Тогда существует точка $z \in [0,1]$ такая, что $f(z) = z$. (Точка z называется **неподвижной точкой**.)

Доказательство. Если $f(0) = 0$ или $f(1) = 1$, то теорема, очевидно, верна. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$.

Пусть функция $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ определена следующим образом $g(x) = x - f(x)$. Очевидно, что g непрерывна, $g(0) = -f(0) < 0$ и $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Следовательно, согласно Следствию 5.2.10, существует точка $z \in [0,1]$ такая, что $g(z) = 0$; то есть, $z - f(z) = 0$ или $f(z) = z$. $\square$

5.2.12 Замечание. Следствие 5.2.11 является частным случаем очень важной теоремы, которая называется Теоремой Брауэра о Неподвижной Точке, и которая утверждает, что если вы непрерывно отображаете куб размерности n в себя, то у этого отображения должна быть неподвижная точка. [Существует много доказательств этой теоремы, большинство из них опираются на методы алгебраической топологии. Элементарное доказательство можно найти в книге K. Куратовского "Введение в теорию множеств и топологию".

Упражнения 5.2

1. Докажите, что непрерывный образ линейно-связного пространства линейно-связен.

2. Пусть f - непрерывное отображение интервала $[a,b]$ в себя, где a и $b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Докажите, что у этого отображения есть неподвижная точка.

3. (i) Покажите, что Следствие 5.2.11 будет неверным, если в формулировке заменить $[0,1]$ на $(0,1)$.

   (ii) Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ обладает **свойством неподвижной точки** если каждое непрерывное отображение $(X, \mathcal{T})$ в себя имеет неподвижную точку. Покажите, что среди интервалов только замкнутые интервалы обладают этим свойством.

   (iii) Пусть X - множество с, по крайней мере, двумя точками. Докажите, что дискретное пространство $(X, \mathcal{T})$ и антидискретное пространство $(X, \mathcal{T}')$ не обладают свойством неподвижной точки.

   (iv) Обладает ли пространство с конечно-замкнутой топологией свойством неподвижной точки?

   (v) Докажите, что если пространство $(X, \mathcal{T})$ обладает свойством неподвижной точки, а пространство $(Y, \mathcal{T}_1)$ - гомеоморфно $(X, \mathcal{T})$, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ также обладает свойством неподвижной точки.

4. Пусть $\{A_j : j \in J\}$ - семейство связных подпространств топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Если $\bigcap\limits_{j \in J} A_j \neq \emptyset$, покажите, что $\bigcup\limits_{j \in J} A_j$ - связно.

5. Пусть A - связное подпространство топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что $\overline{A}$ также связно. На самом деле покажите, что если $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, то B - связно.

6. (i) Покажите, что подпространство $Y = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\}$ of $\mathbb{R}^2$ связно.

   [Подсказка: Используйте предложение 5.2.1.]

   (ii) Проверьте, что $\overline{Y} = Y \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}$

   (iii) Используя Упражнение 5, покажите, что $\overline{Y}$ связно.

7. Пусть E - множество всех точек из $\mathbb{R}^2$ у которых обе координаты рациональны. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^2 \setminus E$ - линейно-связно.

8.* Пусть C - произвольное счетное подмножество $\mathbb{R}^2$. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^2 \setminus C$ - линейно-связно.

9. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а a - произвольная точка из X. **Связная компонента a в X**, $C_X(a)$ определяется как объединение всех связных подмножеств X, содержащих a. Покажите, что

 (i) $C_X(a)$ - связное множество. (Используйте Упражнение 4.)

 (ii) $C_X(a)$ - наибольшее связное множество, содержащее a.

 (iii) $C_X(a)$ замкнуто в X. (Используйте Упражнение 5.)

10. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **всюду несвязным**, если каждое его непустое связное подмножество является одноэлементным. Докажите следующие утверждения.

 (i) $(X, \mathcal{T})$ - всюду несвязно тогда и только тогда, когда для любого $a \in X$, $C_X(a) = \{a\}$. (См. обозначения из Упражнения 9.)

 (ii) Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел с обычной топологией является всюду несвязным.

 (iii) Докажите, что если f непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{Q}$, то существует $c \in \mathbb{Q}$ такое, что $f(x) = c$, для всех $x \in \mathbb{R}$.

 (iv) Любое подмножество всюду несвязного множества space является всюду несвязным.

 (v) Каждое счетное подмножество $\mathbb{R}^2$ является всюду несвязным.

 (vi) Прямая Соргенфрея является всюду несвязным множеством.

11. (i) Используя Определение 9, дайте определение ‘‘линейно-связной компоненты’’ точки в топологическом пространстве.

 (ii) Докажите, что в произвольном топологическом пространстве, каждая линейно-связная компонента линейно-связна.

 (iii) Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - топологическое такое, что каждая точка из X обладает линейно-связной окрестностью, то каждая линейно-связная компонента является открытым множеством. Выведите отсюда, что каждая линейно-связная компонента является также замкнутым множеством.

(iv) Используя (iii) покажите, что открытое подмножество $\mathbb{R}^2$ связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

12.* Пусть A и B - подмножества топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Если A и B оба одновременно открыты или одновременно замкнуты, а $A \cup B$ и $A \cap B$ - связны, то A и B связны.

13. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **нуль-размерным** если у него есть база топологии, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Докажите следующие утверждения.

(i) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{P}$ являются нуль-размерными пространствами.

(ii) Подпространство нуль-размерного пространства нуль-размерно.

(iii) Нуль-размерное Хаусдорфово пространство является всюду несвязным. (См. Упражнение 10.)

(iv) Каждое антидискретное пространство является нуль-размерным.

(v) Каждое дискретное пространство является нуль-размерным.

(vi) Антидискретное пространство с более, чем одной точкой не является всюду несвязным.

(vii) Нуль-размерное T_0-пространство является Хаусдорфовым.

(viii)* Подпространство $\mathbb{R}$ является нуль-размерным тогда и только тогда, когда оно всюду несвязно.

14. Покажите, что локальный гомеоморфизм является непрерывным отображением. (См. Упражнения 4.3#9.)

5.3 Заключение

В этой главе мы назвали отображение между топологическими пространствами "непрерывным" если прообраз каждого открытого множества при этом отображении открыт. Это элегантное определение, которое легко понять. Оно контрастирует с определением, которое мы встречаем в анализе, упомянутое в начале этой главы. Мы обобщили определение из анализа не ради обобщения, а для того, чтобы понять, как все обстоит на самом деле.

Теорема Вейерштрасса о Промежуточном Значении выглядит интуитивно очевидной, но мы увидели, что она следует из того, что $\mathbb{R}$ связное множество, и непрерывный образ связного множества связен.

Мы ввели более сильное понятие, чем связность, а именно, линейную связность. Во многих случаях недостаточно утверждать, что пространство связно, оно должно быть линейно-связным. Это свойство играет важную роль в алгебраической топологии.

Мы вернемся к Теореме Брауэра о Неподвижной точке в должное время. Это очень важная теорема. Теоремы о неподвижных точках играют важную роль в различных областях математики, включая топологию, функциональный анализ и дифференциальные уравнения. Эти теоремы по сей день являются предметом активного изучения.

В Упражнениях 5.2 #9 и #10 мы познакомились с понятиями "компоненты связности" и "всюду несвязности". Оба этих понятия важны для понимания связности.

Глава 6

Метрические пространства

Введение

Наиболее важным классом топологических пространств являются метрические пространства. Метрические пространства служат богатым источником примеров для топологии. Более того, большинство приложений топологии в анализе возникает через метрические пространства.

Впервые понятие метрического пространства было введено в 1906 году Морисом Фреше, было развито и получило название в 1914 году в работе Феликса Хаусдорфа (Hausdorff [14]).

6.1 Метрические Пространства

6.1.1 Определение. Пусть X - непустое множество, а d - действительнозначная функция, определенная на $X \times X$ такая, что для $a, b \in X$:

(i) $d(a,b) \geq 0$ и $d(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$; и

(iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, [неравенство треугольника] для всех a, b и c из X.

Тогда d называется **метрикой** на X, (X,d) называется **метрическим пространством** а $d(a,b)$ - **расстоянием** между a и b.

6.1.2 Пример. Функция $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная как

$$d(a, b) = |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

является метрикой на $\mathbb{R}$ так как

(i) $|a - b| \geq 0$, для всех a и b из $\mathbb{R}$, и $|a - b| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$,

(ii) $|a - b| = |b - a|$, и

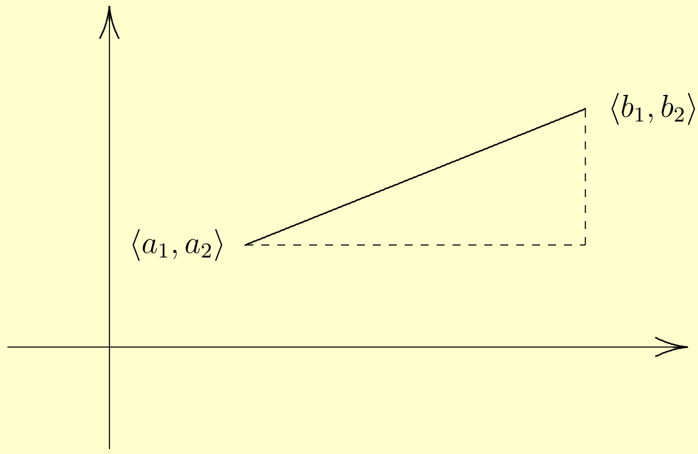
(iii) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$. (Выведите это из неравенства $|x + y| \leq |x| + |y|$.)

Метрика d называется **эвклидовой метрикой на** $\mathbb{R}$. □

6.1.3 Пример. Функция $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определенная как

$$d(\langle a_1, a_2 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

является метрикой на $\mathbb{R}^2$, называемой **эвклидовой метрикой на** $\mathbb{R}^2$.



□

6.1.4 Пример. Пусть X - непустое множество, а d - функция из $X \times X$ в $\mathbb{R}$, определенная как

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b \\ 1, & \text{если } a \neq b. \end{cases}$$

Тогда d является метрикой на X и называется **дискретной метрикой**. □

Важными примерами метрических пространств являются “пространства функций". Для этих пространств множеством X, на котором определяется метрика, является некоторое множество функций.

6.1.5 Пример. Пусть C$[0,1]$ - множество непрерывных функций из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$. Определим метрику на этом пространстве определяется следующим образом

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

где f и g взяты из C$[0,1]$.

Небольшое размышление подскажет вам, что $d(f,g)$ есть площадь области, лежащей между графиками функций, и ограниченная вертикальными прямыми $x = 0$ и $x = 1$, как показано ниже.

□

6.1.6 Пример. Как и раньше, пусть C$[0,1]$ - множество непрерывных функций из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$. Определим другую метрику на C$[0,1]$ следующим образом:

$$d^*(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Очевидно, что $d^*(f,g)$ максимальное расстояние по вертикали между графиками функций f и g.

□

6.1.7 Пример. Мы можем определить другую метрику на $\mathbb{R}^2$, определив

$$d^*(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

где $\max\{x,y\}$ есть наибольшее из двух чисел x и y. □

6.1.8 Пример. Еще одна метрика на $\mathbb{R}^2$ определяется как

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|. \qquad \square$$

Богатым источником примеров метрических пространств служит семейство нормированных векторных пространств.

6.1.9 Пример. Пусть V - векторное пространство над полем действительных или комплексных чисел. **Нормой** $\| \ \|$ на V называется отображение : $V \to \mathbb{R}$ такое, что для всех $a, b \in V$ и λ из поля

(i) $\| a \| \geq 0$ и $\| a \| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$,

(ii) $\| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|$, и

(iii) $\| \lambda a \| = |\lambda| \, \| a \|$.

Нормированное векторное пространство $(V, \| \ \|)$ это векторное пространство V с нормой $\| \ \|$.

Пусть $(V, \| \ \|)$ - произвольное нормированное векторное пространство. Тогда соответствующая метрика, d, на множестве V определяется как $d(a, b) = \| a - b \|$, для a и b из V.

Легко проверить, что d действительно метрика. Итак, каждое нормированное векторное пространство в естественном смысле является метрическим пространством.

Например, $\mathbb{R}^3$ будет нормированным векторным пространством, если мы определим норму

$$\| \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \text{для } x_1, x_2, \text{ и } x_3 \text{ из } \mathbb{R}.$$

Следовательно $\mathbb{R}^3$ станет метрическим пространством, если определить

$$\begin{aligned} d(\langle a_1, b_1, c_1 \rangle, \langle a_2, b_2, c_2 \rangle) &= \| (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2) \| \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}\,. \end{aligned}$$

На самом деле, $\mathbb{R}^n$, для любого положительного n, будет нормированным векторным пространством, если мы определим норму как

$$\| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

То есть $\mathbb{R}^n$ становится метрическим пространством, если определить метрику как

$$\begin{aligned} d(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle, \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle) &= \| \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n\rangle \| \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}\,. \end{aligned}$$ □

В нормированном векторном пространстве $(N, \| \ \|)$ **открытый шар с центром a и радиусом r** определяется как множество

$$B_r(a) = \{x : x \in N \text{ и } \| x - a \| < r\}.$$

Аналогичное определение можно дать в произвольном метрическом пространстве :

6.1.10 Определение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а r - произвольное положительное действительное число. Тогда **открытый шар с центром $a \in X$ и радиусом r** определяется как множество $B_r(a) = \{x : x \in X \text{ и } d(a, x) < r\}$.

6.1.11 Пример. На действительной прямой $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой, $B_r(a)$ - это открытый интервал $(a - r, a + r)$. □

6.1.12 Пример. В $\mathbb{R}^2$ с эвклидовой метрикой, $B_r(a)$ - это открытый круг с центром a и радиусом r.

□

6.1.13 Пример. В $\mathbb{R}^2$ с метрикой d^*, определенной как

$$d^*(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\},$$

открытый шар $B_1(\langle 0, 0\rangle)$ выглядит следующим образом

□

6.1.14 Пример. В $\mathbb{R}^2$ с метрикой d_1, определенной как

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|,$$

открытый шар $B_1(\langle 0, 0\rangle)$ выглядит следующим образом

□

Доказательство следующей леммы достаточно простое (особенно, если нарисовать картинку) и, поэтому, оставляется читателю.

6.1.15 Лемма. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а a и b - точки из X. Далее, пусть δ_1 и δ_2 - положительные действительные числа. Если $c \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$, то существует $\delta > 0$ такое, что $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$. □

Нижеприведенное следствие очевидным образом выводится из Леммы 6.1.15.

6.1.16 Следствие. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а B_1 и B_2 - открытые шары в (X, d). Тогда $B_1 \cap B_2$ является объединением открытых шаров из (X, d). □

Теперь мы можем связать метрические пространства с топологическими.

6.1.17 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство. Семейство открытых шаров из (X, d) является базой некоторой топологии $\mathcal{T}$ на X.

[Топология $\mathcal{T}$ называется **топологией, индуцированной метрикой** d, а $(X, \mathcal{T})$ называется **индуцированным топологическим пространством**, или **соответствующим топологическим пространством**, или **ассоциированным топологическим пространством**.]

Доказательство. Следует из Предложения 2.2.8 и Следствия 6.1.16. □

6.1.18 Пример. Если d - эвклидова метрика на $\mathbb{R}$, то базой топологии $\mathcal{T}$, индуцированной метрикой d, является семейство всех открытых шаров. Заметим, что $B_\delta(a) = (a-\delta\,,\, a+\delta)$. Поэтому очевидно, что $\mathcal{T}$ - эвклидова топология на $\mathbb{R}$. Таким образом, эвклидова метрика на $\mathbb{R}$ индуцирует эвклидову топологию на $\mathbb{R}$. □

6.1.19 Пример. Из Упражнений 2.3 #1 (ii) и Примера 6.1.12 следует, что эвклидова метрика на $\mathbb{R}^2$ индуцирует эвклидову топологию на $\mathbb{R}^2$. $\square$

6.1.20 Пример. Из Упражнений 2.3 #1 (i) и Примера 6.1.13 следует, что метрика d^* также индуцирует эвклидову топологию на $\mathbb{R}^2$. $\square$

Докажите, в качестве упражнения, что метрика d_1 из Примера 6.1.14 также индуцирует эвклидову топологию $\mathbb{R}^2$.

6.1.21 Пример. Если d - дискретная метрика на множестве X, то для каждого $x \in X, B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. Таким образом, все одноэлементные множества открыты в топологии $\mathcal{T}$, индуцированной на X метрикой d. Следовательно, $\mathcal{T}$ - дискретная топология. $\square$

В Примерах 6.1.19, 6.1.20 и 6.1.14 были определены $\boxed{\text{три различные метрики}}$, индуцирующие одну и ту же топологию.

6.1.22 Определение. Метрики на множестве X называются **эквивалентными** если они индуцируют одну и ту же топологию на X.

Таким образом, метрики d, d^* и d_1 из Примеров 6.1.3, 6.1.13 и 6.1.14 эквивалентны на множестве $\mathbb{R}^2$.

6.1.23 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на X метрикой d. Тогда множество U из X открыто в $(X, \mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда для каждого $a \in U$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что открытый шар $B_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Доказательство. Предположим, что $U \in \mathcal{T}$. Тогда, согласно Предложениям 2.3.2 и 6.1.17, для любого $a \in U$ существуют $b \in X$ и $\delta > 0$ такие, что

$$a \in B_\delta(b) \subseteq U.$$

Пусть $\varepsilon = \delta - d(a,b)$. Легко видеть, что

$$a \in B_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

В обратную сторону, предположим, что U - подмножество X со свойством, что для любого $a \in U$ существует $\varepsilon_a > 0$ такое, что $B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq U$. Тогда, по Предложениям 2.3.3 и 6.1.17, U - открытое множество. □

Мы уже знаем, что каждая метрика на множестве X индуцирует на нем топологию. Однако, мы сейчас покажем, что не каждая топология индуцируется некоторой метрикой. Сначала дадим определение, которое уже приводилось в упражнениях. (См. Упражнения 4.1 #13.)

6.1.24 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **Хаусдорфовым** (или T_2-пространством) если для каждой пары различных точек a и b из X, существуют открытые множества U и V такие, что $a \in U$, $b \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Конечно же $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ и все дискретные пространства являются примерами Хаусдорфовых пространств, тогда как любое множество с антидискретной топологией и по крайней мере с двумя точками не является Хаусдорфовым. Легко также проверить, что $\mathbb{Z}$ с конечно-замкнутой топологией также не является Хаусдорфовым пространством. (Убедите себя в этом.)

6.1.25 Предложение. Пусть (X, d) - произвольное метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на X метрикой d. Тогда $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство.

Доказательство. Пусть a и b - произвольные точки из X, где $a \neq b$. Тогда $d(a,b) > 0$. Положим $\varepsilon = d(a,b)$. Рассмотрим открытые шары $B_{\varepsilon/2}(a)$ и $B_{\varepsilon/2}(b)$. Это открытые множества в $(X, \mathcal{T})$, где $a \in B_{\varepsilon/2}(a)$ и $b \in B_{\varepsilon/2}(b)$. Чтобы показать, что $\mathcal{T}$ Хаусдорфово, нам достаточно доказать, что $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b) = \emptyset$.

Предположим, что $x \in B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b)$. Тогда $d(x,a) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $d(x,b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

То есть мы получили $d(a,b) < \varepsilon$, что неверно. Следовательно не существует точки x из $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b)$; то есть, $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b) = \emptyset$, как и требовалось. □

6.1.26 Замечание. Из Предложения 6.1.25 и предшествующих ему комментариев, мы видим, что топология антидискретного пространства с по крайней мере двумя точками не может быть индуцирована некоторой метрикой. Также верно в отношении $\mathbb{Z}$ с конечно-замкнутой топологией. □

6.1.27 Определение. Пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **метризуемым** если существует метрика d на множестве X, индуцирующая топологию d.

Так, например, множество $\mathbb{Z}$ wc конечно-замкнутой топологией не является метризуемым пространством.

Предупреждение. Не следует думать, что любое Хаусдорфово пространство метризуемо. Позже мы сможем строить (используя бесконечные произведения) примеры неметризуемых Хаусдорфовых пространств. [По поводу необходимых и достаточных условий метризуемости топологических пространств см. Теорему 9.1 из книги Dugundji [8].]

Упражнения 6.1

1. Докажите, что метрика d_1 из Примера 6.1.8 индуцирует эвклидову топологию на $\mathbb{R}^2$.

2. Пусть d - метрика на непустом множестве X.

(i) Покажите, что функция e, определенная как $e(a,b) = \min\{1, d(a,b)\}$, где $a, b \in X$, также является метрикой на X.

(ii) Докажите, что d и e эквивалентны.

(iii) Метрическое пространство (X, d) называется **ограниченным**, а d называется **ограниченной метрикой**, если существует положительное действительное число M такое, что $d(x,y) < M$, для всех $x, y \in X$. Используя (ii) выведите, что каждая метрика эквивалентна некоторой ограниченной метрике.

3. (i) Пусть d - некоторая метрика на непустом множестве X. Покажите, что функция e, определенная как

$$e(a,b) = \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)}$$

где $a, b \in X$, также является метрикой на X.

(ii) Докажите, что d и e эквивалентны.

4. Пусть d_1 и d_2 - метрики на множествах X и Y соответственно. Докажите, что

(i) d - метрика на $X \times Y$, где

$$d(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}.$$

(ii) e - метрика на $X \times Y$, где

$$e(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

(iii) d и e эквивалентны.

5. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - соответствующая топология на X. Зафиксируем точку $a \in X$. Докажите, что отображение $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, определенное как $f(x) = d(a, x)$, непрерывно.

6. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на X посредством d. Пусть Y - подмножество X, а d_1 - метрика на Y,

являющаяся ограничением d на Y; то есть, $d_1(a,b) = d(a,b)$ для всех a и b из Y. Докажите, что если $\mathcal{T}_1$ - топология, индуцированная на Y метрикой d_1, а $\mathcal{T}_2$ топология подпространства Y (индуцированная $\mathcal{T}$ на X), то $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. [Это показывает, что каждое подпространство метризуемого пространства метризуемо.]

7. (i) Пусть ℓ_1 - множество всех последовательностей действительных чисел

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится. Определим

$$d_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

для всех x и y из ℓ_1. Докажите, что (ℓ_1, d_1) - метрическое пространство.

(ii) Пусть ℓ_2 - множество всех последовательностей действительных чисел

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится. Определим

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

для всех x и y из ℓ_2. Докажите, что (ℓ_2, d_2) - метрическое пространство.

(iii) Пусть ℓ_∞ - множество всех ограниченных последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Определим

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

где $x, y \in \ell_\infty$. Докажите, что (ℓ_∞, d_∞) - метрическое пространство.

(iv) Пусть c_0 - подмножество ℓ_∞, состоящее из всех последовательностей, которые сходятся к нулю, и пусть d_0 - метрика на c_0, полученная ограничением метрики d_∞ на ℓ_∞, как в Упражнении 6. Докажите, что c_0 - замкнутое подмножество (ℓ_∞, d_∞).

(v) Докажите, что каждое из пространств (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), и (c_0, d_0) - сепарабельно.

(vi)* Является ли (ℓ_∞, d_∞) а сепарабельным пространством?

(vii) Покажите, что каждое из вышеупомянутых метрических пространств является нормированным векторным пространством в естественном смысле.

8. Пусть f - непрерывное отображение метризуемого пространства $(X, \mathcal{T})$ на топологическое пространство $(Y, \mathcal{T}_1)$. Обязательно ли $(Y, \mathcal{T}_1)$ будет метризуемым? (Обоснуйте ваш ответ.)

9. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **нормальным пространством** если для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют открытые множества U и V такие, что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, и $U \cap V = \emptyset$. Докажите, что

   (i) Каждое метризуемое пространство нормально.

   (ii) Каждое пространство, являющееся одновременно T_1-пространством и и нормальным, является Хаусдорфовым. [Нормальное Хаусдорфово пространство называется **T_4-пространством**.]

10. Пусть (X, d) и (Y, d_1) - метрические пространства. Тогда (X, d) называется **изометричным** пространству (Y, d_1) если существует сюръективное

    отображение $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ такое, что для всех x_1 и x_2 из X,

$$d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2)).$$

    Такое отображение f называется **изометрией** . Докажите, что каждая изометрия является гомеоморфизмом соответствующих топологических пространств. (Таким образом, изометричные топологические пространства гомеоморфны!)

11. Говорят, что топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет **первой аксиоме счетности** если для каждого $x \in X$ существует счетное множество $\{U_i(x)\}$ открытых множеств, содержащих x, такое, что каждое открытое множество V, содержащее x, содержит (по крайней мере) одно

из множеств $U_i(x)$ в качестве подмножества. Счетное семейство $\{U_i(x)\}$ называется **счетной базой** в x. Докажите следующее:

(i) Каждое метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(ii) Каждое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, также удовлетворяет первой аксиоме счетности.

12. Пусть X есть множество $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. Определим функцию $f : \mathbb{R} \to X$ как

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ 1, & \text{if } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Далее, определим топологию $\mathcal{T}$ на X как

$$\mathcal{T} = \{U : U \subseteq X \text{ и } f^{-1}(U) \text{ открыто в эвклидовой топологии } \mathbb{R}.\}$$

Докажите следующее:

(i) f непрерывна.

(ii) Каждая открытая окрестность 1 в $(X, \mathcal{T})$ имеет вид $(U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$, где U открыто в $\mathbb{R}$.

(iii) $(X, \mathcal{T})$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

[Подсказка. Пусть $(U_1 \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, (U_2 \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, \dots, (U_n \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, \dots$ - счетная база в 1. Покажите, что для каждого положительного целого n, мы можем выбрать $x_n \in U_n \setminus \mathbb{N}$ такое, что $x_n > n$. Проверьте, что множество $U = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ открыто в $\mathbb{R}$. Отсюда выведите, что $V = (U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$ является открытой окрестностью 1, не содержащей ни одного из множеств $(U_n \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. То есть $(X, \mathcal{T})$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности.]

(iv) $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство.

(v) Непрерывный Хаусдорфов образ $\mathbb{R}$ не обязательно удовлетворяет первой аксиоме счетности.

13. Подмножество S метрического пространства (X, d) называется **вполне ограниченным** если для каждого $\varepsilon > 0$, существует $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X такие, что $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$; то есть, S может быть покрыто $\boxed{\text{конечным}}$ числом открытых шаров радиуса ε.

    (i) Покажите, что каждое вполне ограниченное метрическое пространство ограничено. (См Упражнение 2 вверху.)

    (ii) Докажите, что $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой не является вполне ограниченным, но для каждых $a, b \in \mathbb{R}$ с $a < b$, замкнутый интервал $[a, b]$ - вполне ограничен.

    (iii) Пусть (Y, d) - подпространство метрического пространства (X, d_1) с индуцированной метрикой. Если (X, d_1) - вполне ограничено, то (Y, d) также вполне ограничено; то есть, каждое подпространство вполне ограниченного множества вполне ограничено.
    [Подсказка. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. Если $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap Y$, то из неравенства треугольника $B_\varepsilon(x_i) \subseteq B_{2\varepsilon}(y_i)$.]

    (iv) Из (iii) и (ii) выведите, что вполне ограниченное метрическое пространство $(0, 1)$ гомеоморфно $\mathbb{R}$, которое не вполне ограничено. То есть "вполне ограниченность" не является топологическим свойством.

    (v) Из (iii) и (ii) выведите, что для каждого $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ с эвклидовой метрикой не является вполне ограниченным.

    (vi) Заметив, что для всех $a, b \in \mathbb{R}$, замкнутый интервал $[a, b]$ вполне ограничен, покажите, что метрическое подпространство $\mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

    (vii) Покажите, что для каждого $n > 1$, метрическое подпространство $\mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

14. Покажите, что всякое вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно. (См. Упражнение 13 вверху и Упражнения 3.2#4.)

15. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **локально эвклидовым** если существует положительное целое число n такое, что каждая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому шару вокруг

точки 0 из $\mathbb{R}^n$ с эвклидовой метрикой. Локально эвклидово Хаусдорфово пространство называется **топологическим многообразием**.[1]

(i) Докажите, что каждый непустой интервал (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, локально эвклидов.

(ii) Пусть $\mathbb{T}$ - подмножество комплексной плоскости, состоящее из комплексных чисел с модулем 1. Рассмотрите комплексную плоскость как $\mathbb{R}^2$ и пусть $\mathbb{T}$ имеет топологию подпространства. Покажите, что $\mathbb{T}$ - локально эвклидово.

(iii) Покажите, что каждое топологическое пространство локально гомеоморфное $\mathbb{R}^n$, для некоторого положительного целого n, локально эвклидово. (См. Упражнения 4.3 #9.)

(iv)* Найдите пример локально эвклидового пространства, не являющегося многообразием.

---

[1] В литературе существуют различные определения топологического многообразия (cf. Kunen and Vaughan [19]; Lee [21]). В частности, некоторые определения накладывают дополнительное условие связности на пространство – что мы будем называть **связным многообразием** – старые определения накладывали также условие метризуемости. Хаусдорфово пространство в котором каждая точка обладает открытой окрестностью, гомеоморфной либо $\mathbb{R}^n$ или замкнутому полупространству $\{< x_1, x_2, \ldots, x_n >: x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$ из $\mathbb{R}^n$, для некоторого положительного целого n, называется **многообразием с границей**. Существует обширная литература по многообразиям с дополнительными структурами на них, например **дифференцируемым многообразиям** (Gadea and Masque [11]; Barden and Thomas [3]), **гладким многообразиям** (Lee [22]), **Римановым многообразиям**, **многообразиям Коши-Римана** или **КР-многообразиям**.

6.2 Сходимость Последовательностей

Вы конечно же знакомы с понятием сходимости последоватклььности действительных чисел. Оно определяется следующим образом. Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ действительных чисел **сходится** к действительному числу x если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Очевидно, что это определение можно перенести на любое метрическое пространство.

6.2.1 Определения. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек из X. Эта последовательность **сходится к** $x \in X$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \varepsilon$. Это обозначается следующим образом $x_n \to x$.
Последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ точек из (X, d) называется **сходящейся** если существует точка $y \in X$ такая, что $y_n \to y$.

Следующее предложение легко доказывается, поэтому доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

6.2.2 Предложение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек в метрическом пространстве (X, d). Далее, пусть x и y точки из (X, d) такие, что $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Тогда $x = y$. $\square$

Для удобства мы будем говорить, что подмножество A метрического пространства (X, d) замкнуто (открыто) в метрическом пространстве (X, d), если оно замкнуто (открыто) в топологии $\mathcal{T}$, индуцированной на X метрикой d.

Следующее предложение показывает, что топология метрического пространства может быть полностью описана в терминах сходящихся последовательностей.

6.2.3 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство. Подмножество A из X замкнуто в (X, d) тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся последовательность точек из A сходится к некоторой точке из A. (Другими словами, A замкнуто в (X, d) тогда и только тогда, когда $a_n \to x$, где $x \in X$ и $a_n \in A$ для всех n влечет $x \in A$.)

Доказательство. Предположим, что A замкнуто в (X, d), и пусть $a_n \to x$, где $a_n \in A$ для всех натуральных n. Предположим, что $x \in X \setminus A$. Тогда, так как $X \setminus A$ - открытое множество, содержащее x, существует открытый шар $B_\varepsilon(x)$ такой, что $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Заметив, что каждое $a_n \in A$, заключаем, что $d(x, a_n) > \varepsilon$ для всех n. Следовательно последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ не сходится к x. Противоречие.

В обратную сторону, предположим, что каждая сходящаяся последовательность точек из A сходится к некоторой точке из A. Также допустим, что $X \setminus A$ - не открыто. тогда существует точка $y \in X \setminus A$ такая, что для каждого $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. Для каждого натурального n выберем x_n как произвольную точку из $B_{1/n}(y) \cap A$. Тогда $x_n \to y$. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольное положительное ε, а в качестве n_0 возьмем произвольное натуральное число большее чем $1/\varepsilon$. Тогда для любого $n \geq n_0$,

$$x_n \in B_{1/n}(y) \subseteq B_{1/n_0}(y) \subseteq B_\varepsilon(y).$$

Поэтому $x_n \to y$ и, по нашему предположению, $y \in A$. Это противоречие доказывает, что $X \setminus A$ - открыто, то есть A - замкнуто в (X, d). □

Убедившись, что топология метрического пространства может быть описана в терминах сходящихся последовательностей, следует ожидать, что и непрерывные отображения можно определить подобным образом.

6.2.4 Предложение. Пусть (X, d) и (Y, d_1) - метрические пространства, а f - отображение из X в Y. Также пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_1$ - топологии, индуцированные метриками d и d_1, соответственно. Тогда $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - непрерывно тогда и только тогда, когда $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$; то есть, если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек из (X, d), сходящаяся к x, то последовательность точек $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ из (Y, d_1) сходится к $f(x)$.

Доказательство. Допустим, что $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Чтобы проверить, что f непрерывно, достаточно показать, что прообраз каждого замкнутого множества из $(Y, \mathcal{T}_1)$ замкнут в $(X, \mathcal{T})$. Пусть A - замкнуто в $(Y, \mathcal{T}_1)$. И пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек из $f^{-1}(A)$, сходящаяся к точке $x \in X$. Так как $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$. Но так как каждое $f(x_n) \in A$ и A замкнуто, из Предложения 6.2.3 мы заключаем, что $f(x) \in A$. То есть, $x \in f^{-1}(A)$. Итак мы показали, что каждая сходящаяся последовательность точек из $f^{-1}(A)$ сходится к точке из $f^{-1}(A)$. Поэтому $f^{-1}(A)$ - замкнуто, а f, следовательно, непрерывно.

В обратную сторону, пусть f - непрерывно, и пусть $x_n \to x$. Выберем произвольное положительное ε. Тогда открытый шар $B_\varepsilon(f(x))$ открыт в $(Y, \mathcal{T}_1)$. Так как f непрерывно, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ - открыто в $(X, \mathcal{T})$ и содержит x. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$x \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))).$$

Так как $x_n \to x$, существует натуральное n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$, $x_n \in B_\delta(x)$. Следовательно,

$$f(x_n) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)), \text{ для всех } n \geq n_0.$$

Поэтому, $f(x_n) \to f(x)$. □

Следующее следствие легко выводится из Предложения 6.2.4.

6.2.5 Следствие. Пусть (X, d) и (Y, d_1) - метрические пространства, f - отображение из X в Y, а $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_1$ - топологии, индуцированные d и d_1, соответственно. Тогда $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любых $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $x \in X$ и $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. □

Упражнения 6.2

1. Пусть C$[0, 1]$ и d такие же как в Упражнении 6.1.5. Определим последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ в $(\mathrm{C}[0, 1], d)$ следующим образом

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad x \in [0, 1].$$

Проверьте, что $f_n \to f_0$, где $f_0(x) = 0$, для всех $x \in [0, 1]$.

2. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность такая, что $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Докажите, что $x = y$.

3. (i) Пусть (X, d) - метрическое пространство, $\mathcal{T}$ - индуцированная топология на X, а $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
   - последовательность точек из X. Докажите, что $x_n \to x$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \ni x$, существует натуральное n_0 такое, что $x_n \in U$ для всех $n \geq n_0$.

   (ii) Пусть X - некоторое множество, а d и d_1 - эквивалентные метрики на X. Выведите из (i), что если $x_n \to x$ в (X, d), то $x_n \to x$ в (X, d_1).

4. Докажите Следствие 6.2.5.

5. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек из X. Мы говорим, что $x_n \to x$, если для каждого

открытого множества $U \ni x$ существует натуральное n_0 такое, что $x_n \in U$ для всех $n \geq n_0$. Приведите пример топологического пространства и последовательности такой, что $x_n \to x$ и $x_n \to y$, но $x \neq y$.

6. (i) Пусть (X, d) - метрическое пространство, и $x_n \to x$, где все $x_n \in X$ и $x \in X$. Пусть A - подмножество X, состоящее из x и всех точек x_n. Докажите, что A - замкнуто в (X, d).

   (ii) Выведите из (i), что множество $\{2\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ замкнуто в $\mathbb{R}$.

   (iii) Проверьте, что множество $\{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ не является замкнутым в $\mathbb{R}$.

7. (i) Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_m$ - метрики на множестве X, а $a_1, a_2, \ldots a_m$ - положительные действительные числа. Докажите, что функция d, определенная как

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i d_i(x, y), \text{ для всех } x, y \in X.$$

является метрикой на X.

   (ii) Докажите, что если $x \in X$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек из X такая, что $x_n \to x$ в каждом метрическом пространстве (X, d_i), то $x_n \to x$ в метрическом пространстве (X, d).

8. Пусть X, Y, d_1, d_2 и d такие же как в Упражнениях 6.1 #4. Докажите, что если $x_n \to x$ в (X, d_1), а $y_n \to y$ в (Y, d_2), то

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle \text{ в } (X \times Y, d).$$

9. Пусть A и B - непустые множества в метрическом пространстве (X, d). Определим

$$\rho(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

[$\rho(A, B)$ называется **расстоянием между множествами A и B.**]

   (i) Докажите, что если S - произвольное непустое подмножество (X, d), то $\overline{S} = \{x : x \in X \text{ и } \rho(\{x\}, S) = 0\}$.

(ii) Если S - произвольное непустое подмножество (X, d), то функция $f\colon (X, d) \to \mathbb{R}$, определенная как

$$f(x) = \rho(\{x\}, S), \qquad x \in X$$

непрерывна.

10. (i) Пусть для каждого натурального n, f_n - непрерывная функция из $[0, 1]$ в себя и, пусть
$a \in [0, 1]$ точка такая, что $f_n(a) = a$, для всех n. Далее, пусть f - непрерывная функция из $[0, 1]$ в себя. Докажите, что если $f_n \to f$ в $(C[0, 1], d^*)$, где d^* - метрика из Упражнения 6.1.6, то a является неподвижной точкой f.

(ii) Покажите, что (i) - неверно, если d^* заменить на метрику d из Примера 6.1.5.

6.3 Полнота

6.3.1 Определение. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек метрического пространства (X, d) называется **последовательностью Коши**, если для произвольного положительного действительного числа $\varepsilon > 0$, существует натуральное n_0 такое, что для всех натуральных $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

6.3.2 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность точек из (X, d). Если существует точка $a \in X$ такая, что эта последовательность сходится к a, то есть, $x_n \to a$, то эта последовательность является последовательностью Коши.

Доказательство. Пусть ε - произвольное положительное действительное число. Положим $\delta = \varepsilon/2$. Так как $x_n \to a$, то существует натуральное n_0 такое, что для всех $n > n_0$, $d(x_n, a) < \delta$.

Поэтому возьмем $m > n_0$ и $n > n_0$. Тогда $d(x_n, a) < \delta$ и $d(x_m, a) < \delta$.

Из неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \delta + \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

То есть наша последовательность действительно является последовательностью Коши. □

Естественно было бы спросить, а не выполняется ли обратное утверждение. Следующий пример показывает, что это не так.

6.3.3 Пример. Рассмотрим открытый интервал $(0, 1)$ с эвклидовой метрикой d на нем. Очевидно, что последовательность $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$ является последовательностью Коши, но не сходится ни к какой точке из $(0, 1)$. □

6.3.4 Определение. Метрическое пространство (X,d) называется **полным** если каждая последовательность Коши из (X,d) сходится к некоторой точке из (X,d).

Из Упражнения 6.3.3 мы немедленно заключаем, что открытый интервал (0,1) с эвклидовой метрикой не является полным метрическим пространством. С другой стороны, если X - некоторое конечное множество, а d - дискретная метрика на X, то, очевидно, (X,d) - полное метрическое пространство.

Мы собираемся показать, что $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является полным метрическим пространством.
Для этого нам надо проделать некоторую подготовительную работу.

Для удобства мы будем записывать последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ как $\{x_n\}$.

6.3.5 Определение. Если $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$, если $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

6.3.6 Определения. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность из $\mathbb{R}$. Последовательность называется **возрастающей** если $x_n \leq x_{n+1}$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность называется **убывающей** если $x_n \geq x_{n+1}$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность, которая либо возрастает, либо убывает, называется **монотонной**.

Конечно же большинство последовательностей не монотонны.

6.3.7 Определение. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность из $\mathbb{R}$. Число $n_0 \in \mathbb{N}$ называется **пиком** если $x_n \leq x_{n_0}$, для всех $n \geq n_0$.

6.3.8 Лемма. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность из $\mathbb{R}$. Тогда $\{x_n\}$ имеет монотонную подпоследовательность.

Доказательство. Сначала предположим, что $\{x_n\}$ обладает бесконечным числом пиков. Тогда выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, где каждое n_k является пиком. Отсюда следует, что $x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$, для всех $k \in \mathbb{N}$; то есть, $\{x_{n_k}\}$ - убывающая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$; то есть монотонна.

Предположим, что у последовательности только конечное число пиков. Поэтому, существует натуральное N такое, что не существует пиков $n > N$. Выберем произвольное $n_1 > N$. Тогда n_1 не пик. Поэтому существует $n_2 > n_1$ с $x_{n_2} > x_{n_1}$. Теперь, пусть $n_2 > N$ и , очевидно, тоже не является пиком. Поэтому существует $n_3 > n_2$, такое, что $x_{n_3} > x_{n_2}$. Продолжая этот процесс (по индукции), мы построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такую, что $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$, для всех $k \in \mathbb{N}$; то есть, $\{x_{n_k}\}$ - возрастающая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Что и требовалось доказать. □

6.3.9 Предложение. Пусть $\{x_n\}$ - монотонная последовательность из $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой. Тогда $\{x_n\}$ сходится к точке из $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ ограничена.

Доказательство. Напомним, что "ограниченность" была определена в Замечании 3.3.1.

Очевидно, что если последовательность $\{x_n\}$ неограниченна, то она не сходится.

Предположим, что $\{x_n\}$ возрастающая ограниченная последовательность. Согласно аксиоме о наименьшей верхней границе, существует наименьшая верхняя граница L множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Если ε - произвольное положительное действительное число, то существует натуральное N такое, что $d(x_N, L) < \varepsilon$; то есть, $x_N > L - \varepsilon$.

Но так как $\{x_n\}$ - возрастающая последовательность, а L - верхняя граница, мы имеем

$$L - \varepsilon < x_n < L, \quad \text{для всех } n > N.$$

То есть $x_n \to L$.

Случай убывающей ограниченной последовательности доказывается аналогично.

□

В качестве немедленного следствия Леммы 6.3.8 и Предложения 6.3.9, мы получаем:

6.3.10 Теорема. (Теорема Больцано-Вейерштрасса) Каждая ограниченная последовательность из $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой имеет сходящуюся подпоследовательность. □

Наконец, мы в состоянии доказать, что $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является полным метрическим пространством.

6.3.11 Следствие. Метрическое пространство $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является полным метрическим пространством.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность Коши из $(\mathbb{R}, d)$.

Нам достаточно показать, что эта последовательность сходится в $\mathbb{R}$. Сначала покажем, что она ограничена.

Так как $\{x_n\}$ - последовательность Коши, существует натуральное N такое, что для любых $n \geq N$ и $m \geq N$, $d(x_n, x_m) < 1$; то есть, $|x_n - x_m| < 1$. Положим $M = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N| + 1$. Тогда $|x_n| < M$, для всех $n \in \mathbb{N}$; то есть, последовательность $\{x_n\}$ - ограничена.

По Теореме 6.3.10, эта последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью. То есть, существуют $a \in \mathbb{R}$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такие, что $x_{n_k} \to a$.

Мы должны показать, что не только подпоследовательность сходится к a, но и вся последовательность $\{x_n\}$ также сходится к a.

Пусть ε - произвольное положительное действительное число. Так как $\{x_n\}$ - последовательность Коши, существует натуральное N_0 такое, что

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{для всех } m \geq N_0 \text{ и } n \geq N_0.$$

Так как $x_{n_k} \to a$, существует натуральное N_1 такое, что

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{для всех } n_k \geq N_1.$$

Если мы положим $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$, то из двух предыдущих неравенств получим

$$\begin{aligned} |x_n - a| &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{для } n > N_2 \text{ и } n_k > N_2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_n \to a$, что завершает доказательство. □

6.3.12 Следствие. Для произвольного натурального m, метрическое пространство $\mathbb{R}^m$ с эвклидовой метрикой является полным.

Доказательство. См. Упражнения 6.3#4. □

6.3.13 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, Y - подмножество X, а d_1 - метрика, индуцированная на Y метрикой d.

(i) Если (X, d) - полное метрическое пространство, а Y - замкнутое подпространство (X, d), то (Y, d_1) - полное метрическое пространство.

(ii) Если (Y, d_1) - полное метрическое пространство, то Y - замкнутое подпространство (X, d).

.

Доказательство. См. Упражнения 6.3#5. □

6.3.14 Замечание. В Примере 6.3.3 мы показали, что $(0, 1)$ с эвклидовой метрикой не полно. С другой стороны, Следствие 6.3.11 показало, что $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой полно. Мы также знаем, что эти два пространства гомеоморфны. Таким образом, полнота не сохраняется при гомеоморфизмах, а, следовательно, не является топологическим свойством.

6.3.15 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **вполне метризуемым** если существует метрика d на X такая, что топология $\mathcal{T}$ индуцируется на X посредством d, а (X, d) полное метрическое пространство.

6.3.16 Замечание. Заметим, что полная метризуемость является топологическим свойством. Далее, легко проверить (см. Упражнения 6.3#7), что любое дискретное пространство и любой интервал из $\mathbb{R}$ с индуцированной топологией вполне метризуемы. Итак, для $a, b \in \mathbb{R}$ с $a < b$, топологические пространства $\mathbb{R}$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, and $\{a\}$ с индуцированными топологиями вполне метризуемы. Позже мы увидим, что даже пространство $\mathbb{P}$ всех иррациональных чисел с индуцированной топологией вполне метризуемо. Также, так как $(0, 1)$ - вполне метризуемое подпространство $\mathbb{R}$, не являющееся замкнутым, Предложение 6.3.13(ii) не будет верным, если полноту заменить на вполне метризуемость. □

6.3.17 Определение. Топологическое пространство называется **сепарабельным** если оно обладает счетным плотным подмножеством.

В Упражнениях 3.2#4 мы увидели, что $\mathbb{R}$ и каждое счетное топологическое пространство являются сепарабельными. Другие примеры можно найти в Упражнениях 6.1#7.

6.3.18 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **Польским пространством** если оно сепарабельно и вполне метризуемо.

Очевидно, что $\mathbb{R}$ является Польским пространством. Согласно Упражнениям 6.3#6, $\mathbb{R}^n$ - Польское пространство для всех натуральных n.

6.3.19 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **пространством Суслина** если оно Хаусдорфово и является непрерывным образом Польского пространства. Если A - подмножество топологического пространства $(Y, \mathcal{T}_1)$ такое, что с индуцированной топологией$\mathcal{T}_2$, $(A, \mathcal{T}_2)$ является пространством Суслина, то A называется **аналитическим множеством** в $(Y, \mathcal{T}_1)$.

Очевидно, что каждое Польское пространство является пространством Суслина. Упражнения 6.1#12 и #11 показывают, что обратное неверно так как пространства Суслина необязательно метризуемы. Более того, мы увидим, что даже метризуемые пространства Суслина не обязательно являются Польскими пространствами. Чтобы убедиться в этом, заметим, что каждое счетное топологическое пространство является пространством Суслина, как непрерывный образ дискретного пространства $\mathbb{N}$; одним из таких пространств является метризуемое пространство $\mathbb{Q}$, которое, как мы увидим в Примере 6.5.8, не является Польским пространством.

Мы знаем, что два топологических пространства эквивалентны, если они гомеоморфны. Естественно было бы спросить, когда два метрических пространства эквивалентны (как метрические пространства)? Подходящее понятие (изометрия) было введено в Упражнениях 6.1#10.

6.3.20 Определение. Пусть (X, d) и (Y, d_1) - метрические пространства. Говорят, что пространство (X, d) **изометрично** пространству (Y, d_1) если существует сюръективное отображение $f : X \to Y$ такое, что для всех x_1 и x_2 из X, $d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$. Такое отображение f называется **изометрией**.

Пусть d - произвольная метрика на $\mathbb{R}$, а a - некоторое положительное действительное число. Если d_1 определена как $d_1(x, y) = a \cdot d(x, y)$, для всех $x, y \in \mathbb{R}$, то легко проверить, что $(\mathbb{R}, d_1)$ - метрическое пространство, изометричное $(\mathbb{R}, d)$.

Легко также проверяется, что для любых двух изометричных пространств их соответствующие топологические пространства гомеоморфны, и каждая изометрия является также гомеоморфизмом этих пространств.

6.3.21 Определение. Пусть (X, d) и (Y, d_1) - метрические пространства, а f отображение X в Y. Пусть $Z = f(X)$, а d_2 - метрика, индуцированная на Z метрикой d_1. Если $f : (X, d) \to (Z, d_2)$ - изометрия, то f называется **изометричным вложением** пространства (X, d) в (Y, d_1).

Очевидно, что естественное вложение $\mathbb{Q}$ с эвклидовой метрикой в $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является изометричным вложением. Также очевидно, что $\mathbb{N}$ с эвклидовой метрикой имеет изометричные вложения в оба пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ с эвклидовой метрикой.

6.3.22 Определение. Пусть (X,d) и (Y,d_1) - метрические пространства, а f отображение X в Y. Если (Y,d_1) - полное метрическое пространство, $f:(X,d)\to(Y,d_1)$ - изометричное вложение, а $f(X)$ - плотное подмножество Y в соответствующем топологическом пространстве, то (Y,d_1) называется **пополнением** пространства (X,d).

Очевидно, что $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является пополнением $\mathbb{Q}$, множества рациональных чисел с эвклидовой метрикой. Также $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является пополнением $\mathbb{P}$, множества иррациональных чисел с эвклидовой метрикой.

Немедленно возникают два вопроса: (1) Каждое ли метрическое пространство имеет пополнение? (2) Является ли пополнение метрического пространства единственным в некотором смысле? Мы увидим, что ответ на оба вопроса положителен.

6.3.23 Предложение. Пусть (X,d) - произвольное метрическое пространство. Тогда (X,d) обладает пополнением.

Набросок Доказательства. Назовем две последовательности Коши $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ из (X,d) эквивалентными, если $d(y_n,z_n)\to 0$ в $\mathbb{R}$. Это действительно отношение эквивалентности; то есть, рефлексивно, симметрично и транзитивно. Далее, пусть $\widetilde{X}$ - множество всех классов эквивалентности последовательностей Коши из (X,d). Мы хотим определить метрику на $\widetilde{X}$.

Пусть $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ - произвольные две точки из $\widetilde{X}$. И пусть $\{y_n\}\in\tilde{y}$ и $\{z_n\}\in\tilde{z}$. Последовательность $\{d(y_n,z_n)\}$ является последовательностью Коши в $\mathbb{R}$. (См. Упражнения 6.3#8.) Так как $\mathbb{R}$ - полное метрическое пространство, эта последовательность сходится в $\mathbb{R}$ к некоторому числу, которое мы обозначим через $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$. Легко показать, что $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$ не зависит от выбора последовательностей $\{y_n\}$ из $\tilde{y}$ и $\{z_n\}$ из $\tilde{z}$.

Для каждого $x \in X$, постоянная последовательность $x, x, \dots, x, \dots$ является последовательностью Коши в (X, d) сходящейся к x. Пусть $\tilde{x}$ обозначает класс эквивалентности всех последовательностей Коши, сходящихся к $x \in X$. Определим подмножество Y из $\widetilde{X}$ как $\{\tilde{x} : x \in X\}$. Если d_2 - метрика на Y, индуцированная метрикой d_1 на $\widetilde{X}$, то очевидно, что отображение $f : (X, d) \to (Y, d_2)$, определенное как $f(x) = \tilde{x}$, является изометрией.

Теперь покажем, что Y - плотно в $\widetilde{X}$. Для этого мы покажем, что для произвольного действительного $\varepsilon > 0$, и $z \in \widetilde{X}$, существует $\tilde{x} \in Y$ такое, что $d_1(z, \tilde{x}) < \varepsilon$. Заметим, что z - класс эквивалентности последовательностей Коши. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность Коши из z. Существует натуральное n_0 такое, что для всех $n > n_0$, $d_1(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Рассмотрим постоянную последовательность $x_{n_0}, x_{n_0}, \dots, x_{n_0}, \dots$. Она принадлежит классу эквивалентности $\widetilde{x_{n_0}}$ из Y. Далее, $d_1(\widetilde{x_{n_0}}, z) < \varepsilon$. Поэтому, Y плотно в $\widetilde{X}$.

В заключение, покажем, что $(\widetilde{X}, d_1)$ - полное метрическое пространство. Пусть $\{z_n\}$ - последовательность Коши в этом пространстве. Нам надо показать, что она сходится в $\widetilde{X}$. Так как Y - плотно, для каждого натурального n, существует $\widetilde{x_n} \in Y$ такая, что $d_1(\widetilde{x_n}, z_n) < 1/n$. Покажем, что $\{\widetilde{x_n}\}$ - последовательность Коши в Y.

Рассмотрим действительное $\varepsilon > 0$. Существует натуральное N такое, что $d_1(z_n, z_m) < \varepsilon/2$ для $n, m > N$. Теперь выберем натуральное n_1 такое, что $1/n_1 < \varepsilon/4$. Для $n, m > n_1 + N$, мы имеем

$$d_1(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) < d_1(\widetilde{x_n}, z_n) + d_1(z_n, z_m) + d_1(z_m, \widetilde{x_m}) < 1/n + \varepsilon/2 + 1/m < \varepsilon.$$

Итак, $\{\widetilde{x_n}\}$ - последовательность Коши в Y. Следовательно, $\{x_n\}$ последовательность Коши в (X, d). То есть, $\{x_n\} \in z$, для некоторого $z \in \widetilde{X}$. Теперь легко показать, что $\widetilde{x_n} \to z$, а затем $z_n \to z$, что завершает доказательство. $\square$

6.3.24 Предложение. Пусть (A, d_1) и (B, d_2) - полные метрические пространства. Пусть X - полное подмножество (A, d_1) с индуцированной метрикой d_3, а Y - полное подмножество (B, d_2) с индуцированной метрикой d_4. Если существует изометрия $f : (X, d_3) \to (Y, d_4)$, то существует изометрия $g : (A, d_1) \to (B, d_2)$ такая, что $g(x) = f(x)$, для всех $x \in X$.

Набросок Доказательства. Пусть $a \in A$. Так как X плотно в (A, d_1), то существует последовательность $x_n \to a$, где $x_n \in X$. Поэтому $\{x_n\}$ - последовательность Коши. Так как f - изометрия, $\{f(x_n)\}$ является последовательностью Коши в (Y, d_4) , а поэтому и в (B, d_2). Так как (B, d_2) - полно, существует $b \in B$ такая, что $f(x_n) \to b$. Определим, $g(a) = b$.

Чтобы показать, что g - корректно определенное отображение из A в B, необходимо проверить, что если $\{z_n\}$ - произвольная последовательность из X, сходящаяся к a, то $f(z_n) \to b$. Это следует из того, что $d_1(x_n, z_n) \to 0$ и, поэтому, $d_2(f(x_n), f(z_n)) = d_4(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

Далее, нам надо показать, что $g : A \to B$ - взаимно-однозначно. Проверка оставляется читателю в качестве рутинного упражнения.

Наконец, пусть $a_1, a_2 \in A$, $x_{1n} \to a_1$, а $x_{2n} \to a_2$, где каждое a_{1n} и a_{2n} из X. Тогда

$$d_1(a_1, a_2) = \lim_{n\to\infty} d_3(a_{1n}, a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} d_4(f(a_{1n}), f(a_{2n})) = d_2(g(a_1), g(a_2))$$

и, поэтому, g - действительно изометрия, как и требовалось показать. □

Предложение 6.3.24 утверждает, что с точностью до изометрии, пополнение метрического пространства единственно.

Мы завершим этот раздел введением еще одного понятия. Напомним, что в Примере 6.1.9 мы ввели понятие нормированного векторного пространства. Теперь мы определим важный класс нормированных векторных пространств.

6.3.25 Определение. Пусть $(N, \|\ \|)$ - нормированное векторное пространство, а d - соответствующая метрика на N. Тогда $(N, \|\ \|)$ называется **Банаховым пространством** если (N, d) - полное метрическое пространство.

Из Предложения 6.3.23 мы знаем, что каждое нормированное векторное пространство обладает пополнением. Приятным дополнением является то, что это пополнение является Банаховым пространством. (См. Упражнения 6.3#12.)

Упражнения 6.3

1. Убедитесь в том, что последовательность $\{x_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\}$ является последовательностью Коши в $\mathbb{Q}$ с эвклидовой метрикой. [Эта последовательность не сходится в $\mathbb{Q}$. В $\mathbb{R}$ она сходится к числу e, про которое известно, что оно иррационально. Доказательство того, что e иррационально, на самом деле трансцендентно, можно найти в Jones et al. [18].]

2. Докажите, что каждая подпоследовательность последовательности Коши является последовательностью Коши.

3. Приведите пример последовательности из $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой, которая не обладает подпоследовательностями Коши.

4. Используя Следствие 6.3.11, докажите, что для каждого натурального m, метрическое пространство $\mathbb{R}^m$ с эвклидовой метрикой является полным.

   [Подсказка. Пусть $\{< x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn} >: n = 1, 2, \ldots\}$ - последовательность Коши из $\mathbb{R}^m$. Докажите, что, для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$, последовательность $\{x_{in} : n = 1, 2, \ldots\}$ из $\mathbb{R}$ с эвклидовой метрикой является последовательностью Коши, а поэтому сходится к точке a_i. Далее, покажите, что последовательность $\{< x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn} >: n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к точке $< a_1, a_2, \ldots, a_m >$.]

5. Докажите, что каждое замкнутое подпространство полного метрического пространства полно и, что каждое полное метрическое подпространство метрического пространства полно.

6. Докажите, что для каждого натурального n, $\mathbb{R}^n$ - Польское пространство.

7. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, с $a < b$. Докажите, что каждое дискретное пространство и каждое из пространств $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $\{a\}$ с индуцированной топологией, является Польским пространством.

8. Докажите, что если (X, d) - метрическое пространство, а $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - последовательности Коши, т $\{d(x_n, y_n)\}$ - последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

9. Проведите подробное доказательство Предложения 6.3.23.

10. Проведите подробное доказательство Предложения 6.3.24.

11*. Покажите, что каждое из пространств (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), (c_0, d_0) и (ℓ_∞, d_∞) из Упражнений 6.1#7 является полным метрическим пространством. На самом деле, покажите, что каждое из этих пространств является Банаховым в некотором естественном смысле.

12*. Пусть X - произвольное нормированное векторное пространство. Докажите, что можно определить структуру нормированного векторного пространства на $\widetilde{X}$, полном метрическом пространстве, построенном в Предложении 6.3.23. Следовательно, каждое нормированное векторное пространство имеет
пополнение, являющееся Банаховым пространством.

13. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а S - подмножество X. Множество S называется **ограниченным** если существует натуральное M такое, что $d(x, y) < M$, для всех $x, y \in S$.

    (i) Покажите, что если S - ограниченное множество из (X, d), и $S = X$, то (X, d) - ограниченное метрическое пространство. (См. Упражнения 6.1# 2.)

(ii) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - сходящаяся последовательность в метрическом пространстве (X, d). И пусть S состоит из (различных) точек этой последовательности. Покажите, что S - ограниченное множество.

(iii) Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ последовательность Коши в полном метрическом пространстве (X, d). И пусть T состоит из (различных) точек этой последовательности. Покажите, что T - ограниченное множество.

(iv) Останется ли (iii) верным, если не предполагать, что (X, d) полно?

14. Докажите, что метрическое пространство (X, d) сепарабельно тогда и только тогда, когда соответствующее топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. (См. Упражнения 2.2 #4.)

15. Выведите из предыдущего Упражнения 14 , что если (X, d) - сепарабельное метрическое пространство, а d_1 - метрика, индуцированная на подмножестве Y из X метрикой d, то (Y, d_1) - сепарабельно; другими словами, каждое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно. (Необходимо отметить, что необязательно подпространство сепарабельного топологического пространства сепарабельно.)

6.4 Сжимающие Отображения

В главе 5 мы впервые столкнулись с теоремой о неподвижной точке. В этом разделе мы познакомимся с другим видом теоремы о неподвижной точке. Этот раздел относится больше к теории метрических пространств, чем к общей топологии. Тем не менее, предмет обсуждения очень важен для приложений.

6.4.1 Определение. Пусть f - отображение множества X в себя. Точка $x \in X$ называется **неподвижной точкой** отображения f если $f(x) = x$.

6.4.2 Определение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а f отображение из X в себя. Отображение f называется **сжимающим отображением** если существует $r \in (0, 1)$ такое, что

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq r.d(x_1, x_2), \quad \text{for all } x_1, x_2 \in X.$$

6.4.3 Предложение. Пусть f - сжимающее отображение метрического пространства (X, d) в себя. Тогда f - непрерывное отображение.

Доказательство. См. Упражнения 6.4#1. □

6.4.4 Теорема. (Теорема о Сжимающих Отображениях или Теорема Банаха о Неподвижной точке) Пусть (X, d) - полное метрическое пространство, а f - сжимающее отображение из (X, d) в себя. Тогда f имеет в точности одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть x - произвольная точка из X. Рассмотрим последовательность

$$x,\ f(x),\ f^2(x) = f(f(x)),\ f^3(x) = f(f(f(x))),\ \dots,\ f^n(x), \dots.$$

Мы покажем, что это последовательность Коши. Положим $a = d(x, f(x))$. Так как f - сжимающее отображение, существует $r \in (0,1)$ такое, что $d(f(x_1), f(x_2)) \leq r \cdot d(x_1, x_2)$, для всех $x_1, x_2 \in X$.

Очевидно, $d(f(x), f^2(x)) \leq r \cdot d(x, f(x)) = r \cdot a$, $d(f^2(x), f^3(x)) \leq r^2 \cdot d(x, f(x)) = r^2 \cdot a$, и по индукции мы получаем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$, $d(f^k x), f^{k+1}(x)) \leq r^k \cdot d(x, f(x)) = r^k \cdot a$.

Пусть m и n произвольные натуральные числа, где $n > m$. Тогда

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &= d(f^m(x), f^m(f^{n-m}(x))) \\ &\leq r^m \cdot d(x, f^{n-m}(x)) \\ &\leq r^m \cdot [d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \cdots + d(f^{n-m-1}(x), f^{n-m}(x))] \\ &\leq r^m \cdot d(x, f(x))[1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-m-1}] \\ &\leq \frac{r^m \cdot a}{1-r}. \end{aligned}$$

Так как $r < 1$, ясно, что $\{f^n(x)\}$ - последовательность Коши. Так как (X, d) - полно, существует точка $z \in X$ такая, что $f^n(x) \to z$.

По Предложению 6.4.3, f - непрерывно и, поэтому,

$$f(z) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = z \tag{6.1}$$

следовательно, z - неподвижная точка f.

Наконец, пусть t - некоторая неподвижная точка f. Тогда

$$d(t, z) = d(f(t), f(z)) \leq r \cdot d(t, z). \tag{6.2}$$

Так как $r < 1$, отсюда следует, что $d(t, z) = 0$, то есть $t = z$, и f имеет только одну неподвижную точку. □

Следует отметить, что Теорема о Сжимающих Отображениях не только доказывает существование неподвижной точки, а также дает метод для ее нахождения; а именно, если x произвольная точка из X найдите предел последовательности $\{f^n(x)\}$. Этот метод позволяет написать компьютерную программу, которая вычислит предельную точку с любой, наперед заданной, точностью.

Exercises 6.4

1. Докажите Предложение 6.4.3.

2. Расширьте Теорему о Сжимающих Отображениях показав, что если f - отображение полного метрического пространства (X, d) в себя, и f^N - сжимающее отображение для некоторого N, то f имеет в точности одну неподвижную точку.

3. Теорема о Среднем Значении утверждает: Пусть f - действительнозначная функция на замкнутом интервале $[a, b]$, непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b). Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. (Напомним, что f называется **дифференцируемой** в точке s если $\lim\limits_{x \to s} \frac{f(x)-f(s)}{x-s} = f'(s)$ существует.)

   Используя Теорему о Среднем Значении, докажите следующее:

   Пусть $f : [a, b] \to [a, b]$ - дифференцируемо. Отображение f является сжимающим тогда и только тогда, когда существует $r \in (0, 1)$ такое, что $|f'(x)| \leq r$, для всех $x \in [a, b]$.

4. Используя Упражнения 3 и 2, покажите, что несмотря на то, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное как $f(x) = \cos x$, не удовлетворяет условиям Теоремы о Сжимающих Отображениях, оно имеет единственную неподвижную точку.

6.5 Пространства Бэра

6.5.1 Теорема. (Теорема Бэра) Пусть (X, d) - полное метрическое пространство. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность плотных открытых подмножеств X, то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ также плотно в X.

Доказательство. Достаточно показать, что если U - произвольное открытое подмножество (X, d), то $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

Так как X_1 - открыто и плотно в X, множество $U \cap X_1$ является непустым открытым подмножеством (X, d). Пусть U_1 - открытый шар радиуса не больше 1 такой, что $\overline{U_1} \subset U \cap X_1$.

Определим по индукции для каждого натурального $n > 1$ открытый шар U_n радиуса не больше $1/n$ такой, что $\overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap X_n$.

Для натурального n, пусть x_n будет некоторой точкой из U_n. Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью Коши. Так как (X, d) полное пространство, эта последовательность сходится к некоторой точке $x \in X$.

Заметим, что для каждого натурального m, каждый член последовательности $\{x_n\}$ принадлежит замкнутому множеству $\overline{U}_m$, поэтому предельная точка x также принадлежит множеству $\overline{U}_m$.

Тогда $x \in \overline{U_n}$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$.

Но так как $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \ni x$, отсюда следует, что $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$, что завершает доказательство теоремы. □

В Упражнениях 3.2 #5 мы ввели понятие внутренности подмножества топологического пространства.

6.5.2 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - произвольное топологическое пространство, а A - произвольное подмножество X. Наибольшее открытое множество, содержащееся в A, называется **внутренностью** A и обозначается $\mathrm{Int}(A)$.

6.5.3 Определение. Подмножество A топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется **нигде не плотным** если множество $\overline{A}$ обладает пустой внутренностью.

Эти определения позволяют перефразировать Теорему 6.5.1.

6.5.4 Следствие. (Теорема Бэра) Пусть (X, d) - полное метрическое пространство. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность подмножеств X такая, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, то по крайней мере для одного $n \in \mathbb{N}$, множество $\overline{X_n}$ имеет непустую внутренность; то есть, X_n - не является нигде не плотным.

Доказательство. Упражнения 6.5 #2. □

6.5.5 Определение. Топологическое пространство (X, d) называется **пространством Бэра** если для каждой последовательности $\{X_n\}$ открытых плотных подмножеств X, множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ также плотно в X.

6.5.6 Следствие. Каждое полное метризуемое пространство является пространством Бэра. □

6.5.7 Замечания. Важно отметить, что Следствие 6.5.6 относится скорее к топологии, чем к теории метрических пространств.

Отметьте также, что существуют пространства Бэра, не являющиеся вполне метризуемыми. (См. Упражнения 6.5 #4(iv).) □

6.5.8 Пример. Топологическое пространство $\mathbb{Q}$ не является пространством Бэра и, поэтому, не является вполне метризуемым. Чтобы убедиться в этом, отметим, что множество рациональных чисел счетно. и пусть $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. каждое из множеств $X_n = \mathbb{Q} \setminus \{x_n\}$ открыто и плотно в $\mathbb{Q}$, однако $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. То есть, $\mathbb{Q}$ не обладает свойством Бэра. □

6.5.9 Замечание. Следует отметить, что было бы труднее доказать "в лоб что $\mathbb{Q}$ не является вполне метризуемым, чем более общий факт о том, что $\mathbb{Q}$ не является пространством Бэра.

Это удивительное и важное свойство не только топологии, но и всей математики, что более общие результаты иногда проще доказывать. □

6.5.10 Определения. Пусть Y - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Если Y является объединением счетного числа нигде не плотных подмножеств X, то Y называется множеством **первой категории** в $(X, \mathcal{T})$. В противном случае, Y называется множеством **второй категории** в $(X, \mathcal{T})$.

Теорема Бэра имеет много приложений в анализе, которые не будут затронуты в этой книге. Тем не менее, мы завершим этот раздел важной теоремой из теории Банаховых пространств, а именно, Теоремой об Открытых Отображениях. Эта теорема является следствием теоремы Бэра.

6.5.11 Предложение. Если Y - подмножество первой категории пространства Бэра $(X, \mathcal{T})$, то внутренность Y пуста.

Доказательство. Так как Y - первой категории, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где каждое Y_n, $n \in \mathbb{N}$, нигде не плотно.

Пусть $U \in \mathcal{T}$ такое, что $U \subseteq Y$. Тогда $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}$.

Поэтому, $X \setminus U \supseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{Y_n})$, и каждое из множеств $X \setminus \overline{Y_n}$ открыто и плотно в $(X, \mathcal{T})$. Так как $(X, \mathcal{T})$ - пространство Бэра, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{Y_n})$ плотно в $(X, \mathcal{T})$. Поэтому, замкнутое множество $X \setminus U$ плотно $(X, \mathcal{T})$. Следовательно, $X \setminus U = X$. Поэтому, $U = \emptyset$. Что завершает доказательство. □

6.5.12 Следствие. Если Y - подмножество первой категории пространства Бэра $(X, \mathcal{T})$, то $X \setminus Y$ - подмножество второй категории.

Доказательство. Если бы это было не так, то пространство Бэра $(X, \mathcal{T})$ было бы счетным объединением нигде не плотных множеств. □

6.5.13 Замечание. Так как $\mathbb{Q}$ подмножество первой категории множества $\mathbb{R}$, из Следствия 6.5.12 следует, что множество $\mathbb{P}$ иррациональных чисел является второй категории. □

6.5.14 Определение. Пусть S - подмножество действительного векторного пространства V. Множество S называется **выпуклым** если для любых $x, y \in S$ и любого $0 < \lambda < 1$, точка $\lambda x + (1 - \lambda)y$ принадлежит S.

Очевидно, что каждое подпространство векторного пространства выпукло. Также, в каждом нормированном векторном пространстве, каждый открытый или замкнутый шар является выпуклым.

6.5.15 Теорема. (Теорема об открытом отображении) Пусть $(B, || \, ||)$ и $((B_1, || \, ||_1)$ - Банаховы пространства, а $L : B \to B_1$ - непрерывное линейное (в смысле векторных пространств) отображение из B на B_1. Тогда L - открытое отображение.

Доказательство. Согласно Упражнениям 6.5#1(iv), достаточно показать, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $L(B_N(0)) \supset B_s(0)$, для некоторого $s > 0$.

Очевидно, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(0)$, и так как L - сюръективно, мы имеем $B_1 = L(B) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L(B_n(0))$.

Так как B_1 Банахово пространство, из Следствия 6.5.4 к теореме Бэра следует, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\overline{L(B_N(0))}$ имеет непустую внутренность.

Поэтому, существуют $z \in B_1$ и $t > 0$ такие, что $B_t(z)) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

Согласно Упражнениям 6.5#3, мы можем предположить без ограничения общности, что $z \in L(B_N(0))$.

Но $B_t(z) = B_t(0) + z$ и, поэтому,

$$B_t(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} - z = \overline{L(B_N(0)) - z} \subseteq \overline{L(B_N(0)) - L(B_N(0))} \subseteq \overline{L(B_{2N}(0))}.$$

откуда, в силу линейности L, следует, что $B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

Нам надо показать, что отсюда следует, что $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$.

Пусть $w \in B_{t/2}(0)$. Тогда существует $x_1 \in B_N(0)$, такая, что $||w - L(x_1)||_1 < \frac{t}{4}$.

Заметим, что в силу линейности L, для любого натурального $k > 0$

$$B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} \Longrightarrow B_{t/(2k)}(0) \subseteq \overline{L(B_{N/k}(0))}.$$

Поэтому, существует точка $x_2 \in B_{N/2}(0)$ такая, что

$$||(w - L(x_1)) - L(x_2)||_1 = ||w - L(x_1) - L(x_2)||_1 < \frac{t}{8}.$$

Продолжая по индукции, мы получим последовательность $\{x_m\}$ такую, что $||x_m|| < \frac{N}{2^{m-1}}$ и

$$||w - L(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)||_1 = ||w - L(x_1) - L(x_2) - \cdots - L(x_m)||_1 < \frac{t}{2^m}.$$

Так как B - полно, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ сходится к некоторому пределу a.

Очевидно, что $||a|| < 2N$ и, в силу непрерывности L, мы имеем $w = L(a) \in L(B_{2N}(0))$.

Следовательно, $B_{t/2}(0) \subseteq L(B_{2N}(0))$ и, поэтому, $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$, что завершает доказательство. □

Следующее следствие к теореме об открытом отображении вытекает немедленно и является очень важным частным случаем теоремы.

6.5.16 Следствие. Инъективное непрерывное линейное отображение одного Банахова пространства на другое является гомеоморфизмом. В частности, инъективное непрерывное линейное отображение Банахова пространства на себя является гомеоморфизмом.□

Упражнения 6.5

1. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства. Отображение $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ называется **открытым отображением** если для каждого открытого подмножества A из $(X, \mathcal{T})$, множество $f(A)$ открыто в $(Y, \mathcal{T}_1)$.

   (i) Покажите, что f - открытое отображение тогда и только тогда, когда для всех $U \in \tau$ и $x \in U$, множество $f(U)$ является окрестностью $f(x)$.

   (ii) Пусть (X, d) и (Y, d_1) - метрические пространства, а f - отображение из X в Y. Докажите, что f - открытое отображение тогда и только тогда, когда для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ существует $r > 0$ такое, что $f(B_{1/n}(x)) \supseteq B_r(f(x))$.

   (iii) Пусть $(N, || \ ||)$ и $(N_1, || \ ||_1)$ - нормированные векторные пространства, а f линейное отображение N в N_1. Докажите, что f - открытое отображение тогда и только тогда, когда для всех $n \in \mathbb{N}$ существует $r > 0$ такое, что $f(B_{1/n}(0)) \supseteq B_r(f(0))$.

(iv) Пусть $(N, \|\ \|)$ и $(N_1, \|\ \|_1)$ - нормированные векторные пространства, а f линейное отображение N в N_1. Докажите, что f - открытое отображение тогда и только тогда, когда существуют $s > 0$ и $r > 0$ такие, что $f(B_s(0)) \supseteq B_r(0)$.

2. Используя теорему Бэра, докажите Следствие 6.5.4.

3. Пусть A - подмножество Банахова пространства B. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

   (i) множество $\overline{A}$ имеет непустую внутренность;

   (ii) существуют $z \in \overline{A}$ и $t > 0$ такие, что $B_t(z) \subseteq \overline{A}$;

   (ii) существуют $y \in A$ и $r > 0$ такие, что $B_r(y) \subseteq \overline{A}$.

4. Точка x топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется **изолированной точкой** если $\{x\} \in \mathcal{T}$. Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ счетное T_1-пространство без изолированных точек, то оно не является пространством Бэра.

5. (i) Используя версию теоремы Бэра из Следствия 6.5.4, докажите, что $\mathbb{P}$ не является

   F_σ-множеством, а $\mathbb{Q}$ не является G_δ-множеством в $\mathbb{R}$.

   [Подсказка. Предположите, что $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где каждое F_n является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$. Затем примените Следствие 6.5.4 к $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$.]

   (ii) Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в себя. Отображение f называется **непрерывным в точке** $a \in \mathbb{R}$ если для каждого открытого множества U, содержащего $f(a)$, существует открытое множество V, содержащее a, такое, что $f(V) \subseteq U$. Докажите, что множество точек $\mathbb{R}$, в которых f непрерывно, является G_δ-множеством.

   (iii) Выведите из (i) и (ii) , что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в точности во всех рациональных числах.

6. (i) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - произвольное топологическое пространство, а Y и S - плотные подмножества X. Докажите, что если S к тому же

открыто в $(X, \mathcal{T})$, то $S \cap Y$ плотно в обоих пространствах X и Y.

(ii) Пусть $\mathcal{T}_1$ - топология, индуцированная на Y топологией $\mathcal{T}$ на X. И пусть $\{X_n\}$ последовательность плотных открытых подмножеств Y. Используя (i), покажите, что $\{X_n \cap Y\}$ - последовательность плотных открытых подмножеств $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(iii) Выведите из определения 6.5.5 и пункта (ii) вверху, что если $(Y, \mathcal{T}_1)$ - пространство Бэра, то $(X, \mathcal{T})$ - также пространство Бэра. [Таким образом, замыкание пространства Бэра является пространством Бэра.]

(iv) Используя (iii), покажите, что подпространство $(Z, \mathcal{T}_2)$ of $\mathbb{R}^2$, определенное как

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\} \cup \{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{Q}\},$$

является пространством Бэра, но оно не вполне метризуемо, так как замкнутое подпространство $\{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{Q}\}$ гомеоморфно $\mathbb{Q}$, которое не вполне метризуемо. Это показывает, что замкнутое подпространство пространства Бэра не обязательно является пространством Бэра.

7. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - непрерывное открытое отображение. Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - пространство Бэра, то $(X, \mathcal{T}_1)$ тоже пространство Бэра. [Таким образом, образ пространства Бэра при непрерывном открытом отображении также является пространством Бэра.]

8. Пусть $(Y, \mathcal{T}_1)$ - открытое подпространство пространства Бэра $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что $(Y, \mathcal{T})$ - пространство Бэра. [То есть открытое подпространство пространства Бэра является пространством Бэра.]

9. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Функция $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ называется **полунепрерывной снизу** если для каждого $r \in \mathbb{R}$, множество $f^{-1}((-\infty, r])$ замкнуто в $(X, \mathcal{T})$. Функция $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ называется **полунепрерывной сверху** если для каждого $r \in \mathbb{R}$, множество $f^{-1}((-\infty, r))$ замкнуто в $(X, \mathcal{T})$.

(i) Докажите, что f непрерывна тогда и только тогда, когда она полунепрерывна одновременно и снизу, и сверху.

(ii) Пусть $(X,\mathcal{T})$ - пространство Бэра, I - некоторое множество индексов, а для каждой точки $x \in X$, множество $\{f_i(x) : i \in I\}$ ограничено сверху, где каждое отображение $f_i : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ - полунепрерывно снизу. Используя теорему Бэра, докажите, что существует открытое подмножество O из $(X,\mathcal{T})$ такое, что множество $\{f_i(x) : x \in O,\ i \in I\}$ - ограничено сверху.

[Подсказка. Положим $X_n = \bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}((-\infty, n])$.]

10. Пусть B - Банахово пространство счетной размерности. Используя теорему Бэра, покажите, что эта размерность, на самом деле, конечна.

11. Пусть $(N, ||\ ||)$ - нормированное векторное пространство, а (X,τ) - выпуклое подмножество $(N, ||\ ||)$ с индуцированной топологией. Покажите, что (X,τ) - линейно-связно, а, следовательно, связно. Выведите отсюда, что каждый открытый шар в $(N, ||\ ||)$ - линейно связен также как и само пространство $(N, ||\ ||)$.

6.6 Заключение

Теория метрических пространств сама по себе является очень важным разделом математики. Помимо этого, метрические пространства занимают особое место и в топологии. На самом деле, многие книги по топологии начинаются с изучения метрических пространств, которые затем используются как мотивация к изучению топологии.

Мы видели, что различные метрики на одном и том же пространстве могут определять одну и ту же топологию. Такие метрики называются эквивалентными. Мы также познакомились с некоторыми функциональными пространствами, как, например, C$[0,1]$. По ходу дела, мы также познакомились с нормированными векторными пространствами - центральным понятием функционального анализа.

Не все топологические пространства образуются из метрических. Это следует из того, что топология, индуцированная некоторой метрикой, является Хаусдорфовой.

Мы заметили, что топология метрического пространства и непрерывные функции между метрическими пространствами могут быть полностью описаны в терминах сходящихся последовательностей.

В упражнениях 6.2 #9 было введено интересное понятие расстояния между множествами в метрическом пространстве.

Мы также познакомились с понятиями последовательности Коши, полного метрического пространства, вполне метризуемого пространства, Банахова пространства, Польского пространства и пространства Суслина. Полнота очень важна в теории метрических пространств, благодаря приложениям в анализе. Банаховы пространства являются полными нормированными векторными пространствами имеют многочисленные применения в анализе и обладают богатой структурной теорией. Мы увидели, что каждое метрическое пространство имеет пополнение. Так, каждое нормированное векторное пространство имеет пополнение, являющееся Банаховым пространством.

Сжимающие отображения были введены в контексте неподвижных точек отображений, была доказана теорема о сжимающих отображениях, известная также теорема Банаха о неподвижной точке. Эта теорема очень полезна в приложениях, например, при доказательстве существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Другой важной теоремой, доказанной в этой главе, была теорема Бэра. Мы ввели топологическое понятие пространства Бэра, и убедились, что каждое вполне метризуемое пространство является пространством Бэра. По ходу, было введено понятие множества первой категории. А затем мы доказали теорему об открытом отображении, которая утверждает, что непрерывное линейное отображение из Банахова пространства на другое Банахово пространство является открытым.

Глава 7

Компактность

Введение

Компактность является наиболее важным топологическим свойством. Она играет ключевую роль во многих областях математики. Было бы справедливым сказать, что до тех пор пока вы не поняли компактность, вы не поняли топологию!

Итак, что же такое компактность? Она может быть описана как топологическое обобщение конечности. Формальное определение гласит, что топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда из любого бесконечного "покрытия"этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное "покрытие". Очевидно, что любое конечное подмножество топологического пространства компактно. Легко также заметить, что в дискретном пространстве множество компактно тогда и только тогда, когда оно конечно. При рассмотрении топологических пространств с более богатой структурой, таких как $\mathbb{R}$, мы обнаружим, что бесконечные множества могут быть компактными.
В действительности все замкнутые интервалы $[a, b]$ из $\mathbb{R}$ - компактны. Это единственный тип интервалов, замкнутых в R.

Нас интересует следующий вопрос: какие из подмножеств $\mathbb{R}$ компактны? Теорема Гейне-Бореля утверждает, что компактными подмножествами $\mathbb{R}$ являются в точности множества, которые одновременно замкнуты и ограничены.

Чем дальше мы будем продвигаться в изучении топологии, тем больше будем убеждаться в ключевой роли понятия компактности. Особенно это касается приложений топологии к анализу.

7.1 Компактные Пространства

7.1.1 Определение. Пусть A - подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Множество A называется **компактным** если для каждого множества I и каждого семейства открытых множеств, O_i, $i \in I$ таких, что $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, существует конечное подсемейство $O_{i_1}, O_{i_2} \dots, O_{i_n}$ такое, что $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

7.1.2 Пример. Если $(X, \mathcal{T}) = \mathbb{R}$ и $A = (0, \infty)$, то A - не компактно.

Доказательство. Для каждого натурального i, пусть O_i обозначает интервал $(0, i)$. Тогда, очевидно, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$. Но *не* существует $i_1, i_2, \dots i_n$ таких, что $A \subseteq (0, i_1) \cup (0, i_2) \cup \dots \cup (0, i_n)$. Следовательно, A - не компактно. □

7.1.3 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - произвольное топологическое пространство, а $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ произвольное конечное подмножество $(X, \mathcal{T})$. Тогда A - компактно.

Доказательство. Пусть O_i, $i \in I$ - произвольное семейство открытых множеств такое, что $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Тогда для каждого $x_j \in A$ существует O_{i_j} такое, что $x_j \in O_{i_j}$. Таким образом, $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$. Поэтому A компактно. □

7.1.4 Замечание. Из Примера 7.1.3 мы увидели, что каждое конечное множество в топологическом пространстве компактно. То есть, "компактность" можно понимать как топологическое обобщение "конечности". □

7.1.5 Пример. Подмножество A дискретного пространства $(X, \mathcal{T})$ компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.

Доказательство. Если A - конечно, то Пример 7.1.3 показывает, что оно компактно.

В обратную сторону, пусть A - компактно. Тогда семейство одноэлементных множеств $O_x = \{x\}$, $x \in A$ таково, что каждое O_x - открыто, и $A \subseteq \bigcup_{x \in A} O_x$. Так как A - компактно, существуют $O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}$ такие, что $A \subseteq O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_n}$; то есть, $A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Следовательно, A - конечное множество. □

Конечно, если бы все компактные множества были бы конечными, то изучение "компактности" не было бы интересным. Однако, как мы увидим вскоре, каждый замкнутый интервал $[a, b]$ компактен. Но сначала слегка расширим нашу
терминологию.

7.1.6 Определения. Пусть I - некоторое множество индексов, а O_i, $i \in I$ - семейство открытых множеств в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T})$. Пусть A - подмножество $(X, \mathcal{T})$. Семейство O_i, $i \in I$ называется **открытым покрытием** множества A, если $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Конечное подсемейство, $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_n}$, семейства O_i, $i \in I$ называется **конечным подпокрытием** (множества A), если $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.

То есть мы можем перефразировать определение компактности следующим образом:

7.1.7 Определения. Подмножество A топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется **компактным** если каждое открытое покрытие A содержит конечное подпокрытие. Если подмножество A совпадает с X, то $(X, \mathcal{T})$ называется **компактным пространством**.

7.1.8 Замечание. Следующее утверждение мы оставим для проверки читателю в качестве упражнения:

Пусть A - подмножество $(X, \mathcal{T})$, а $\mathcal{T}_1$ - топология, индуцированная на A топологией $\mathcal{T}$. A является компактным подмножеством $(X, \mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $(A, \mathcal{T}_1)$ - компактное пространство.

[Это утверждение не совсем тривиально, как может показаться на первый взгляд.] $\square$

7.1.9 Предложение. Замкнутый интервал $[0,1]$ - компактен.

Доказательство. Пусть O_i, $i \in I$ - произвольное открытое покрытие $[0,1]$. Тогда для каждого $x \in [0,1]$ существует O_i такое, что $x \in O_i$. Так как O_i содержит x, существует интервал U_x, открытый в $[0,1]$ такой, что $x \in U_x \subseteq O_i$.

Определим подмножество S из $[0,1]$ следующим образом:

$$S = \{z : [0,z] \text{ может быть покрыто конечным числом множеств вида } U_x\}.$$

[То есть, $z \in S \Rightarrow [0,z] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$, для некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_n$.]

Теперь пусть $x \in S$ и $y \in U_x$. Так как U_x - интервал, содержащий x и y, $[x,y] \subseteq U_x$. (Здесь, без ограничения общности, мы предполагаем, что $x \leq y$.) Поэтому,

$$[0,y] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n} \cup U_x$$

и, следовательно, $y \in S$.

Поэтому для каждого $x \in [0,1]$, $U_x \cap S = U_x$ или $\emptyset$.

Отсюда следует, что

$$S = \bigcup_{x \in S} U_x$$

и

$$[0,1] \setminus S = \bigcup_{x \notin S} U_x.$$

Таким образом, мы имеем, что S открыто в $[0,1]$ и S замкнуто в $[0,1]$. Но $[0,1]$ - связно. Следовательно, $S = [0,1]$ или $\emptyset$.

Однако, $0 \in S$ и, поэтому, $S = [0,1]$; то есть, $[0,1]$ может быть покрыто конечным числом U_x. Поэтому, $[0,1] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots U_{x_m}$. Но каждое U_{x_i} содержится в O_i, $i \in I$. Следовательно, $[0,1] \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_m}$, и мы показали, что $[0,1]$ - компактно. $\square$

Упражнения 7.1

1. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - антидискретное пространство. Докажите, что *каждое* подмножество X компактно.

2. Пусть $\mathcal{T}$ - конечно-замкнутая топология на произвольном множестве X. Докажите, что каждое подмножество $(X, \mathcal{T})$ компактно.

3. Докажите, что каждое из следующих пространств*не* компактно.

   (i) $(0, 1)$;

   (ii) $[0, 1)$;

   (iii) $\mathbb{Q}$;

   (iv) $\mathbb{P}$;

   (v) $\mathbb{R}^2$;

   (vi) открытый диск $D = \{\langle x, y\rangle : x^2+y^2 < 1\}$, рассматриваемый как подпространство $\mathbb{R}^2$;

   (vii) прямая Соргенфрея;

   (viii) $C[0, 1]$ с топологией, индуцированной метрикой d из Примера 6.1.5:

   (ix) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞, c_0 с топологиями, индуцированными соответственно метриками d_1, d_2, d_∞ и d_0 из Упражнений 6.1 #7.

4. Является ли $[0, 1]$ компактным подмножеством прямой Соргенфрея?

5. Является ли $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ компактным подмножеством $\mathbb{Q}$?

6. Проверьте, что $S = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$ является компактным подмножеством $\mathbb{R}$, в то время как $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$ - нет.

7.2 Теорема Гейне-Бореля

Следующее предложение утверждает, что "непрерывный образ компактного пространства компактен".

7.2.1 Предложение. Пусть $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - непрерывное сюръективное отображение. Если $(X, \mathcal{T})$ - компактно, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ - тоже компактно.

Доказательство. Пусть O_i, $i \in I$ - произвольное открытое покрытие Y; то есть, $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.

Тогда, $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i)$; То есть,, $X \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$.

Поэтому, $f^{-1}(O_i)$, $i \in I$ - открытое покрытие X.

Так как X - компактно, существуют $i_1, i_2, \dots, i_n$ из I такие, что

$$\begin{aligned} X &\subseteq f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(O_{i_n}). \\ \text{Поэтому} \quad Y &= f(X) \\ &\subseteq f(f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(O_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(O_{i_1}) \cup f(f^{-1}(O_{i_2})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(O_{i_n})) \\ &= O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}, \quad \text{так как } f \text{ - сюръективно.} \end{aligned}$$

Итак, мы имеем, $Y \subseteq O_{i_1} \bigcup O_{i_2} \bigcup \dots \bigcup O_{i_n}$; то есть, Y покрывается конечным числом O_i.

Следовательно, Y - компактно. □

7.2.2 Следствие. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - гомеоморфные пространства. Если $(X, \mathcal{T})$ компактно, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ тоже компактно. □

7.2.3 Следствие. Для a и b из $\mathbb{R}$, где $a < b$, $[a, b]$ компактно, в то время как (a, b) не компактно.

Доказательство. Пространство $[a,b]$ гомеоморфно компактному пространству $[0,1]$ и, поэтому, по Предложению 7.2.1, компактно.

Пространство (a,b) гомеоморфно $(0,\infty)$. Если бы (a,b) было компактно, то $(0,\infty)$ тоже было бы компактным, но мы увидели в Примере 7.1.2, что $(0,\infty)$ не компактно. Следовательно, (a,b) не компактно. □

7.2.4 Предложение. Каждое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Доказательство. Пусть A замкнутое подмножество компактного пространства $(X,\mathcal{T})$. И пусть $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ - произвольное открытое покрытие A. Тогда

$$X \subseteq (\bigcup_{i\in I} U_i) \cup (X \setminus A);$$

то есть, U_i, $i \in I$, совместно с открытым множеством $X \setminus A$ является открытым покрытием X. Следовательно, существует конечное подпокрытие $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$, $X \setminus A$. [Если $X \setminus A$ не принадлежит конечному подпокрытию, то мы можем включить его и по-прежнему иметь конечное подпокрытие X.]

Поэтому,

$$X \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A).$$

Следовательно,

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A)$$

что, очевидно, влечет

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

так как $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Следовательно, A имеет конечное подпокрытие и, поэтому, компактно. □

7.2.5 Предложение. Компактное подмножество Хаусдорфова топологического пространства замкнуто.

Доказательство. Пусть A - компактное подмножество Хаусдорфова пространства $(X, \mathcal{T})$. Нам надо показать, что A содержит все свои предельные точки и, следовательно, замкнуто. Пусть $p \in X \setminus A$. Тогда для каждого $a \in A$ существуют открытые множества U_a и V_a такие, что $a \in U_a$, $p \in V_a$ и $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Тогда $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Так как A - компактно, существуют $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из A такие, что

$$A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}.$$

Положим $U = U_{a_1} \bigcup U_{a_2} \bigcup \cdots \bigcup U_{a_n}$ и $V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_n}$. Тогда $p \in V$ и $V_a \cap U_a = \emptyset$ влечет $V \cap U = \emptyset$, что, в свою очередь, влечет $V \cap A = \emptyset$. Поэтому p не является предельной точкой A, а V - открытое множество, содержащее p, которое не пересекается с A.

Следовательно, A содержит все свои предельные точки и, поэтому, замкнуто.

□

7.2.6 Следствие. Компактное подмножество метризуемого пространства замкнуто. □

7.2.7 Пример. Для a и b in $\mathbb{R}$, где $a < b$, интервалы $[a, b)$ и $(a, b]$ не компактны, так как они не являются замкнутыми подмножествами метризуемого пространства $\mathbb{R}$. □

7.2.8 Предложение. Компактное подмножество $\mathbb{R}$ ограничено.

Доказательство. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ - неограниченно. Тогда $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$, но $\{(-n, n) : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ не содержит конечного подпокрытия A, так как A неограниченно. Следовательно, A - не компактно. Поэтому все компактные подмножества $\mathbb{R}$ ограничены. □

7.2.9 Теорема. (Теорема Гейне-Бореля) Каждое ограниченное замкнутое подмножество $\mathbb{R}$ компактно.

Доказательство. Если A - ограниченное замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, то $A \subseteq [a, b]$, для некоторых a и b из $\mathbb{R}$. Так как $[a, b]$ - компактно, а A - замкнуто, то A тоже компактно. □

Теорема Гейне-Бореля является важным результатом. Приведенное доказательство является коротким только потому, что мы сначала доказали Предложение 7.1.9.

7.2.10 Предложение. (Обращение Теоремы Гейне-Бореля) Каждое компактное подмножество $\mathbb{R}$ является ограниченным и замкнутым.

Доказательство. Следует немедленно из Предложений 7.2.8 и 7.2.5. □

7.2.11 Определение. Подмножество A метрического пространства (X, d) называется **ограниченным**, если существует действительное число r такое, что $d(a_1, a_2) \leq r$, для всех a_1 и a_2 из A.

7.2.12 Предложение. Пусть A - компактное подмножество метрического пространства (X, d). Тогда A - ограничено и замкнуто.

Доказательство. Согласно Следствию 7.2.6, A - замкнутое множество. Зафиксируем $x_0 \in X$ и определим отображение $f : (A, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ посредством

$$f(a) = d(a, x_0), \text{ для всех } a \in A,$$

где $\mathcal{T}$ индуцированная топология на A. Тогда f непрерывно и по Предложению 7.2.1, $f(A)$ - компактно. Итак, по Предложению 7.2.10, $f(A)$ - ограничено; то есть, существует действительное число M такое, что

$$f(a) \leq M, \text{ для всех } a \in A.$$

Таким образом, $d(a, x_0) \leq M$, для всех $a \in A$. Взяв $r = 2M$, из неравенства треугольника мы заключаем, что $d(a_1, a_2) \leq r$, для всех a_1 и a_2 из A. □

Вспомнив, что $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное эвклидово пространство с топологией, индуцированной эвклидовой метрикой, можно обобщить Теорему Гейне-Бореля и обратную к ней теорему на случай $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Мы сформулируем результат, но отложим доказательство до следующей главы.

7.2.13 Теорема. (Обобщенная Теорема Гейне-Бореля) Подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Предупреждение. Хотя Теорема 7.2.13 утверждает, что замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно, это утверждение не обязательно верно для других метрических пространств. (См. Упражнения 7.2 #9.)

7.2.14 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - компактное пространство, а f - непрерывное отображение из $(X, \mathcal{T})$ в $\mathbb{R}$. Тогда множество $f(X)$ имеет наибольший и наименьший элементы.

Доказательство. Так как f - непрерывно, $f(X)$ - компактно. Следовательно, $f(X)$ - замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$. Так как $f(X)$ - ограничено, у него есть супремум. Так как $f(X)$ - замкнуто, из Леммы 3.3.2 следует, что супремум принадлежит $f(X)$. Таким образом, $f(X)$ имеет наибольший элемент. Аналогично показывается, что $f(X)$ имеет наименьший элемент. □

7.2.15 Предложение. Пусть a и b из $\mathbb{R}$, а f - непрерывная функция из $[a,b]$ в $\mathbb{R}$. Тогда $f([a,b]) = [c,d]$, для некоторых c и d из $\mathbb{R}$.

Доказательство. Так как $[a,b]$ - связно, $f([a,b])$ тоже связно в $\mathbb{R}$, и, следовательно, является интервалом. Так как $[a,b]$ - компактно, $f([a,b])$ тоже компактно. Поэтому, $f([a,b])$ - замкнутый ограниченный интервал. Следовательно,

$$f([a,b]) = [c,d]$$

для некоторых c и d из $\mathbb{R}$. □

Упражнения 7.2

1. Какие из следующих подмножеств $\mathbb{R}$ компактны? (Обоснуйте ваши ответы.)

   (i) $\mathbb{Z}$;

   (ii) $\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$;

   (iii) $\{x : x = \cos y,\ y \in [0,1]\}$;

   (iv) $\{x : x = \tan y,\ y \in [0, \pi/2)\}$.

2. Какие из следующих подмножеств $\mathbb{R}^2$ компактны? (Обоснуйте ваши ответы.)

   (i) $\{\langle x,y\rangle : x^2 + y^2 = 4\}$

   (ii) $\{\langle x,y\rangle : x \geq y + 1\}$

   (iii) $\{\langle x,y\rangle : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 4\}$

   (iv) $\{\langle x,y\rangle : 0 < x < 2,\ \ 0 \leq y \leq 4\}$

3. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - компактное пространство. Докажите, что если $\{F_i : i \in I\}$ - семейство замкнутых подмножеств X такое, что $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, то существует конечное подсемейство

$$F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m} \text{ такое, что } F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset.$$

4. Следствие 4.3.7 утверждает, что для действительных чисел a, b, c и d, где $a < b$ и $c < d$,

   (i) $(a, b) \not\cong [c, d]$

   (ii) $[a, b) \not\cong [c, d]$.

   Докажите каждое из этих утверждений, используя компактность (в Следствии 4.3.7 мы использовали для доказательства связность).

5. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства. Отображение $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ называется **замкнутым** если для каждого замкнутого подмножества A из $(X, \mathcal{T})$, $f(A)$ - замкнуто в $(Y, \mathcal{T}_1)$. Отображение $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ называется **открытым** если для каждого открытого подмножества A их $(X, \mathcal{T})$, $f(A)$ - открыто в $(Y, \mathcal{T}_1)$.

   (a) Найдите примеры отображений, которые f which are

      (i) открыты, но не замкнуты

      (ii) замкнуты, но не открыты

      (iii) открыты, но не непрерывны

      (iv) замкнуты, но не непрерывны

      (v) непрерывны, но не открыты

      (vi) непрерывны, но не замкнуты.

   (b) Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - компактные Хаусдорфовы пространства, а $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - непрерывное отображение, то f - замкнутое отображение.

6. Пусть $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ - непрерывная биекция. Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - компактно, а $(Y, \mathcal{T}_1)$ - Хаусдорфово, то f - гомеоморфизм.

7. Пусть $\{C_j : j \in J\}$ - семейство замкнутых компактных подмножеств топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что $\bigcap_{j \in J} C_j$ i- компактно.

8. Пусть n - натуральное число, d - эвклидова метрика на $\mathbb{R}^n$, а X - подмножество $\mathbb{R}^n$. Докажите, что X ограничено в $(\mathbb{R}^n, d)$ тогда и только тогда, когда

существует натуральное M такое, что для всех $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in X$, $-M \leq x_i \leq M$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

9. Пусть $(C[0,1], d^*)$ - метрическое пространство, определенное в Примере 6.1.6. И пусть $B = \{f : f \in C[0,1]$ и $d^*(f, 0) \leq 1\}$, где 0 обозначает постоянную функцию из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$, всюду равную нулю. (Множество B называется **замкнутым единичным шаром.**)

   (i) Проверьте, что B замкнуто и ограничено в $(C[0,1], d^*)$.

   (ii) Докажите, что B не компактно. [Подсказка: Пусть $\{B_i : i \in I\}$ - семейство всех открытых шаров радиуса $\frac{1}{2}$ из $(C[0,1], d^*)$. Тогда $\{B_i : i \in I\}$ - открытое покрытие B. Предположим, что существует конечное подпокрытие
   $B_1, B_2, \ldots B_N$. Рассмотрите $(N+1)$ функций $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$, определенных как $f_\alpha(x) = \sin(2^{N-\alpha}.\pi.x)$, $\alpha = 1, 2, \ldots N+1$.

      (a) Проверьте, что каждое из $f_\alpha \in B$.

      (b) Заметив, что $f_{N+1}(1) = 1$ и $f_m(1) = 0$, для всех $m \leq N$, выведите, что если $f_{N+1} \in B_1$, то $f_m \notin B_1$, $m = 1, \ldots, N$.

      (c) Заметив, что $f_N(\frac{1}{2}) = 1$ и $f_m(\frac{1}{2}) = 0$, для всех $m \leq N-1$, выведите, что если $f_N \in B_2$, то $f_m \notin B_2$, $m = 1, \ldots, N-1$.

      (d) Продолжая этот процесс, покажите что $f_1, f_2, \ldots, f_{N+1}$ лежат в различных B_i – противоречие.]

10. Докажите, что каждое компактное Хаусдорфово пространство нормально.

11.* Пусть A и B - непересекающиеся компактные подмножества Хаусдорфова пространства $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что существуют непересекающиеся открытые множества G и H такие, что $A \subseteq G$ и $B \subseteq H$.

12. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - бесконечное топологическое пространство, в котором каждое подпространство компактно. Докажите, что $(X, \mathcal{T})$ не является Хаусдорфовым.

13. Докажите, что в каждом несчетном некомпактном топологическом пространстве существует несчетное число компактных подмножеств и несчетное число некомпактных подмножеств.

14. Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство, в котором каждое собственное замкнутое подмножество компактно, то $(X, \mathcal{T})$ само компактно.

7.3 Заключение

Компактность играет ключевую роль в приложениях топологии во всех областях анализа. Как было замечено в Замечании 7.1.4. компактность можно рассматривать как обобщение конечности.

Обобщенная Теорема Гейне-Бореля описывает компактные подмножества $\mathbb{R}^n$ как множества, являющиеся замкнутыми и ограниченными.

Компактность является топологическим свойством. Действительно, непрерывный образ компактного пространства компактен.

Замкнутые подмножества компактных пространств являются компактными, а компактные подпространства Хаусдорфовых пространств замкнуты.

В Упражнениях 7.2 # 5 введены понятия открытого и замкнутого отображения. В Упражнении 7.2 #10 показано, что компактное Хаусдорфово пространство является нормальным (на самом деле, T_4-пространством). То что замкнутый шар в каждом из $\mathbb{R}^n$ компактен, контрастирует с Упражнением 7.2 #9. В этом упражнении показывается, что замкнутый единичный шар в метрическом пространстве $(C[0,1], d^*)$ не компактен. Хотя мы и не собираемся этого доказывать, следует отметить, что нормированное векторное пространство является конечномерным тогда и только тогда, когда замкнутый единичный шар в нем компактен.

Предупреждение. К сожалению "компактность" определяется по-разному в разных книгах, и некоторые из этих определений не эквивалентны нашему. Во-первых, некоторые книги включают Хаусдорфовость в определение компактности. В некоторых, особенно старых, книгах "компактность" означает более слабое свойство, чем наше — то что часто называется последовательной компактностью. Наконец, термин "бикомпактность" часто используется как компактность или Хаусдорфова компактность в нашем смысле.

Глава 8

Конечные произведения

Введение

Существует три важных способа создания новых топологических пространств их уже существующих. Это конструкции ‘‘взятия подпространств’’, ‘‘фактор-пространств’’ и ‘‘произведений пространств’’. Следующие три главы посвящены произведениям пространств. В этой главе мы исследуем конечные произведения и доказываем теорему Тихонова. Эта с виду безобидная теорема утверждает, что произвольное произведение компактных пространств компактно.

Чем дальше мы углубимся в изучение топологии, тем больше будет видна решающая роль компактности. Особенно это касается приложений топологии в анализе.

8.1 Топология Произведения

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - некоторые множества, то **произведение** $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ это множество, состоящее из всех упорядоченных энок $\langle x_1, x_2 \dots, x_n \rangle$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$.

Проблема, которую мы собираемся обсудить, следующая:

Если даны топологические пространства $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$, как нам определить естественным образом топологию $\mathcal{T}$ на произведении $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$?

Очевидным (но неверным!) кандидатом для $\mathcal{T}$ является множество всех множеств вида $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$, где $O_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, \dots, n$. К сожалению, это не топология.

Например, если $n = 2$ и $(X, \mathcal{T}_1) = (X, \mathcal{T}_2) = \mathbb{R}$, то $\mathcal{T}$ должно содержать прямоугольники $(0,1)\times(0,1)$ и $(2,3)\times(2,3)$, но не множество $[(0,1)\times(0,1)]\cup[(2,3)\times(2,3)]$, так как оно не представимо как $O_1 \times O_2$ ни для каких O_1 и O_2. Таким образом, $\mathcal{T}$ не замкнуто относительно объединений, а поэтому, не является топологией.

Однако, мы уже видели, как определить топологию (эвклидову топологию) на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Это было сделано в Примере 2.2.9. На самом деле, этот пример показывает, как определить топологию в общем случае.

8.1.1 Определения. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\dots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. **Топология произведения** $\mathcal{T}$ на множестве $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ определяется как топология, имеющая базой следующее семейство $\{O_1 \times O_2 \times \dots O_n,\ O_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, \dots, n\}$. Множество $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ с топологией $\mathcal{T}$ называется **произведением пространств** $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ и обозначается как $(X_1 \times X_2 \times \dots X_n, \mathcal{T})$ или $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \dots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$.

Конечно же, надо проверить, что семейство $\{O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n : O_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, \dots, n\}$ является базой топологии; то есть, удовлетворяет условиям Предложения 2.2.8. (Мы оставляем проверку в качестве упражнения.)

8.1.2 Предложение. Пусть $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$ базы топологических пространств $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$, соответственно. Тогда семейство $\{O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n : O_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, \dots, n\}$ является базой топологии произведения на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Проверка Предложения 8.1.2 оставляется читателю в качестве упражнения.

8.1.3 Наблюдения (i) Мы теперь видим, что эвклидова топология на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ всего лишь является топологией произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. (См. Пример 2.2.9 и Замечание 2.2.10.)

(ii) Из Определений 8.1.1 ясно, что произведение открытых множеств открыто, или точнее: если $O_1, O_2, \dots, O_n$ - открытые подмножества топологических пространств $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$, соответственно, то $O_1 \times O_2 \times \dots O_n$ - открытое подмножество пространства $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \dots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$. Следующее предложение утверждает, что произведение замкнутых множеств замкнуто.

8.1.4 Предложение. Пусть C_1, C_2, $\dots$, C_n - замкнутые подмножества топологических пространств $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots,$ $(X_n, \mathcal{T}_n)$, соответственно. Тогда $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$ - замкнутое подмножество пространства $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$.

Доказательство. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
& (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \setminus (C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n) \\
= \ & [(X_1 \setminus C_1) \times X_2 \times \dots \times X_n] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus C_2) \times X_3 \times \dots \times X_n] \cup \\
& \qquad \dots \cup [X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1} \times (X_n \setminus C_n)]
\end{aligned}
$$

которое является объединением открытых множеств (ток как произведение открытых множеств открыто) и, поэтому, открыто в $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \dots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$. Следовательно, дополнение этого множества, $C_1 \times C_2 \times \dots C_n$, является замкнутым, как и требовалось показать. □

Упражнения 8.1

1. Докажите Предложение 8.1.2.

2. Докажите, что если $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ дискретные пространства, то произведение $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \dots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$ тоже является дискретным пространством.

3. Пусть X_1 и X_2 - бесконечные множества, а $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ - конечно-замкнутые топологии на X_1 and X_2, соответственно. Покажите, что топология произведения, $\mathcal{T}$, на $X_1 \times X_2$ <u>не</u> является конечно-замкнутой топологией.

4. Докажите, что произведение любого конечного числа антидискретных пространств является антидискретным пространством.

5. Докажите, что произведение любого конечного числа Хаусдорфовых пространств Хаусдорфово.

6. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а $D = \{(x, x) : x \in X\}$ - диагональное множество произведения $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) = (X \times X, \mathcal{T}_1)$. Докажите, что $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство тогда и только тогда, когда D замкнуто в $(X \times X, \mathcal{T}_1)$.

7. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ and $(X_3, \mathcal{T}_3)$ - топологические пространства. Докажите, что
$$[(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)] \times (X_3, \mathcal{T}_3) \cong (X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times (X_3, \mathcal{T}_3).$$

8. (i) Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$ и $(X_2, \mathcal{T}_2)$ - топологические пространства. Докажите, что
$$(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \cong (X_2, \mathcal{T}_2) \times (X_1, \mathcal{T}_1).$$

   (ii) Обобщите предыдущий результат на случай произведения произвольного конечного числа пространств.

9. Пусть $C_1,\ C_2,\dots,C_n$ - подмножества топологических пространств $(X_1,\mathcal{T}_1)$, $(X_2,\mathcal{T}_2),\dots,(X_n,\mathcal{T}_n)$, соответственно, так что $C_1\times C_2\times\cdots\times C_n$ - подмножество $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$. Докажите каждое из следующих утверждений.

   (i) $(C_1\times C_2\times\cdots\times C_n)'\supseteq C_1'\times C_2'\times\cdots\times C_n'$;

   (ii) $\overline{C_1\times C_2\times\cdots\times C_n}=\overline{C_1}\times\overline{C_2}\times\cdots\times\overline{C_n}$;

   (iii) если $C_1,C_2,\dots,C_n$ плотны в $(X_1,\mathcal{T}_1)$, $(X_2,\mathcal{T}_2)$, ... , $(X_n,\mathcal{T}_n)$, соответственно, то $C_1\times C_2\times\cdots\times C_n$ плотно в произведении $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$;

   (iv) если $(X_1,\mathcal{T}_1)$, $(X_2,\mathcal{T}_2)$, $\dots$, $(X_n,\mathcal{T}_n)$ - сепарабельные пространства, то $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$ - сепарабельное пространство;

   (v) для каждого $n\geq 1$, $\mathbb{R}^n$ - сепарабельное пространство.

10. Покажите, что произведение конечного числа T_1-пространств является T_1-пространством.

11. Докажите, что если $(X_1,\mathcal{T}_1),\dots,(X_n,\mathcal{T}_n)$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$ также удовлетворяет второй аксиоме счетности.

12. Пусть $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ - прямая Соргенфрея, определенная в Упражнениях 3.2 #11, а $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_2)$ - произведение пространств $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\times(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$. Докажите следующие утверждения.

   (i) $\{\langle x,y\rangle : a\leq x<b,\ c\leq y<d,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ является базой топологии $\mathcal{T}_2$.

   (ii) $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_2)$ является регулярным сепарабельным вполне несвязным Хаусдорфовым пространством.

   (iii) Пусть $L=\{\langle x,y\rangle : x,y\in\mathbb{R}$ and $x+y=0\}$. Прямая L замкнута в эвклидовой топологии на плоскости, а , следовательно, и в $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_2)$.

   (iv) Если $\mathcal{T}_3$ топология, индуцированная на прямой L топологией $\mathcal{T}_2$, то $\mathcal{T}_3$ - дискретная топология, и, следовательно, $(L,\mathcal{T}_3)$ - не сепарабельное пространство. [Так как $(L,\mathcal{T}_3)$ - замкнутое подмножество сепарабельного пространства $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_2)$, мы заключаем, что замкнутое подпространство сепарабельного пространства не обязательно сепарабельно.]

[Подсказка: покажите, что $L \cap \{\langle x, y\rangle : a \leq x < a+1,\ -a \leq y < -a+1,\ a \in \mathbb{R}\}$ является одноэлементным множеством.]

8.2 Проекции на Компоненты Произведения

Прежде чем продолжить, нам потребуется пара определений.

8.2.1 Определения. Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ - топологии на множестве X. Тогда говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ **слабее** чем $\mathcal{T}_2$, (а $\mathcal{T}_2$ - **сильнее** чем $\mathcal{T}_1$) если $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$.

8.2.2 Пример. Дискретная топология на множестве X слабее любой другой топологии на X. Антидискретная топология на X сильнее любой другой топологии на X. [См. также Упражнения 5.1 #10.] $\square$

8.2.3 Определения. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - топологические пространства, а f - отображение из X в Y. Отображение f называется **открытым** если для каждого $A \in \mathcal{T}$, $f(A) \in \mathcal{T}_1$. Отображение f называется **замкнутым** если для каждого замкнутого множества B из $(X, \mathcal{T})$, $f(B)$ - замкнуто в $(Y, \mathcal{T}_1)$.

8.2.4 Замечание. В Упражнениях 7.2 #5, вам надо было показать, что ни одно из следующих свойств отображений - “замкнутость”, “открытость”, “непрерывность”, не влечет ни одного из оставшихся двух свойств. На самом деле, никакие два из этих условий не влекут третьего. (Найдите подтверждающие примеры.) $\square$

8.2.5 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T}_1,)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\dots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства, а $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$ - произведение этих пространств.

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, пусть $p_i : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to X_i$ - отображение проекции; то есть, $p_i(\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n \rangle) = x_i$, для каждого $\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n \rangle \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Тогда

(i) каждое p_i - непрерывное сюръективное открытое отображение, и

(ii) $\mathcal{T}$ наиболее сильная топология на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ со свойством, что каждое p_i - непрерывно.

Доказательство. Очевидно, каждое из p_i сюръективно. Чтобы убедиться в непрерывности каждого из p_i, выберем произвольное открытое множество U из $(X_1, \mathcal{T}_i)$. Тогда

$$p_i^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$$

которое является произведением открытых множеств, и, поэтому, открыто в $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$. Следовательно, каждое из p_i непрерывно.

Чтобы показать, что p_i - открытое отображение, достаточно проверить, что для каждого открытого множества $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, где U_j открыто в $(X_j, \mathcal{T}_j)$, $j = 1, \dots, n$, множество $p_i(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)$ открыто в $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Но $p_i(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n) = U_i$ которое, конечно же, открыто в $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Поэтому каждое из p_i является открытым отображением. Мы проверили пункт (i) предложения.

Далее, пусть $\mathcal{T}'$ - произвольная топология $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ такая, что каждое отображение проекции $p_i : (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ непрерывно. Нам надо показать, что $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$.

Вспомнив определение базы топологии $\mathcal{T}$ (Определение 8.1.1), достаточно показать, что если $O_1, O_2, \dots, O_n$ - открытые множества из $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ соответственно, то $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n \in \mathcal{T}'$. Чтобы показать это, заметим, что так как p_i непрерывно, $p_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}'$, для каждого $i = 1, \dots, n$. Далее

$$p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_n,$$

поэтому

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n.$$

Тогда из $p_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}'$, $i = 1, \ldots, n$ следует, что $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}'$; то есть, $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \mathcal{T}'$, как и требовалось. □

8.2.6 Замечание. Предложение 8.2.5 (ii) позволяет дать другое определение топологии произведения. Для пространств $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ топология произведения может быть определена как наиболее сильная топология на $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ такая, что каждая проекция $p_i : X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \to X_i$ непрерывна. Это наблюдение нам пригодится в следующем разделе, когда мы перейдем к обсуждению произведений бесконечного числа топологических пространств. □

8.2.7 Следствие. Для $n \geq 2$, отображения проекций из $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}$ являются непрерывными и открытыми. □

8.2.8 Предложение. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства, а $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$ - произведение этих пространств. Тогда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ гомеоморфно некоторому подпространству $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$.

Доказательство. Для каждого j, пусть a_j будет некоторым (фиксированным) элементом из X_j. Для каждого i, определим отображение $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$ как

$$f_i(x) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n \rangle.$$

Мы утверждаем, что $f_i \colon (X_i, \mathcal{T}_i) \to (f_i(X_i), \mathcal{T}')$ - гомеоморфизм, где $\mathcal{T}'$ топология, индуцированная на $f_i(X_i)$ топологией $\mathcal{T}$. Очевидно, что это отображение взаимно-однозначно. Пусть $U \in \mathcal{T}_i$. Тогда

$$\begin{aligned} f_i(U) &= \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times U \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\} \\ &= (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n) \cap \\ &\qquad (\{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times X_i \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}) \\ &= (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n) \cap f_i(X_i) \\ &\in \mathcal{T}' \end{aligned}$$

так как $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \in \mathcal{T}$. Итак, $U \in \mathcal{T}_i$ влечет $f_i(U) \in \mathcal{T}'$.

Наконец, заметим, что семейство

$$\{(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i(X_i) : U_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

является базой для $\mathcal{T}'$, поэтому, чтобы доказать, что f_i непрерывно, достаточно проверить, что прообраз при f_i каждого из членов этого семейства открыт в $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Но

$$\begin{aligned} f_i^{-1}[(U_1 \times U_2 \times \ldots U_n) \cap f_i(X_i)] = &\ f_i^{-1}(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i^{-1}(f_i(X_i)) \\ = &\begin{cases} U_i \cap X_i, & \text{если } a_j \in U_j,\ j \neq i \\ \emptyset, & \text{если } a_j \notin U_j, \text{ для некоторых } j \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $U_i \cap X_i = U_i \in \mathcal{T}_i$ и $\emptyset \in \mathcal{T}_i$, мы заключаем, что f_i непрерывно, что и требовалось доказать. □

Обозначение. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - множества, то произведение $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ обозначается как $\prod_{i=1}^n X_i$. Если $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства, то произведение $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$ обозначается как $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$. □

Упражнения 8.2

1. Докажите, что эвклидова топология на $\mathbb{R}$ слабее конечно-замкнутой топологии.

2. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - топологические пространства, $i = 1, \dots, n$. Докажите, что

   (i) если $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ - связно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - связно;

   (ii) если $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактно;

   (iii) если $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ - линейно-связно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - линейно-связно;

   (iv) если $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ - Хаусдорфово, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - Хаусдорфово;

   (v) если $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ - T_1-пространство, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - T_1-пространство.

3. Пусть $(Y, \mathcal{T})$ и $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ - топологические пространства. Далее, пусть для каждого i, f_i - отображение из $(Y, \mathcal{T})$ в $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Докажите, что отображение $f\colon (Y, \mathcal{T}) \to \prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$, определенное как
$$f(y) = \langle f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y) \rangle,$$
непрерывно тогда и только тогда, когда каждое из f_i непрерывно.

   [Подсказка: Заметьте, что $f_i = p_i \circ f$, где p_i - отображение проекции из $\prod_{j=1}^n (X_j, \mathcal{T}_j)$ на $(X_i, \mathcal{T}_i)$.]

4. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) - метрические пространства. Далее, пусть e - метрика на $X \times Y$, определенная в Упражнениях 6.1 #4. Также пусть $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на $X \times Y$ метрикой e. Докажите что если d_1 и d_2 индуцируют топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ на X и Y, соответственно, а $\mathcal{T}_3$ - топология произведения на $(X, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$, то $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3$. [Это показывает, что произведение любых двух метризуемых пространств метризуемо.]

5. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. Докажите, что $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ метризуемо тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ метризуемо.

   [Подсказка: Воспользуйтесь Упражнениями 6.1 #6, которое утверждает, что произвольное подпространство метризуемого пространства метризуемо, И Упражнением 4 вверху.]

8.3 Теорема Тихонова для Конечных Произведений

8.3.1 Теорема. (Теорема Тихонова для Конечных Произведений) Если $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\ldots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ - компактные пространства, то $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже компактное пространство.

Доказательство. Сначала рассмотрим произведение двух компактных пространств $(X, \mathcal{T}_1)$ and $(Y, \mathcal{T}_2)$. Пусть U_i, $i \in I$ - некоторое покрытие $X \times Y$. Тогда для каждого из $x \in X$ и $y \in Y$, существует $i \in I$ такое, что $\langle x, y \rangle \in U_i$. Поэтому всегда существует открытое базовое множество $V(x,y) \times W(x,y)$ такое, что $V\langle x, y\rangle \in \mathcal{T}_1$, $W(x,y) \in \mathcal{T}_2$ и $\langle x, y \rangle \in V(x,y) \times W(x,y) \subseteq U_i$.

Так как $\langle x, y \rangle$ - произвольная точка из $X \times Y$, мы получаем открытое покрытие $V(x,y) \times W(x,y)$, $x \in X, y \in Y$, пространства $X \times Y$ такое, что каждое из $V(x,y) \times W(x,y)$ является подмножеством некоторого из U_i, $i \in I$. Таким образом, чтобы доказать, что $(X, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$ компактно, достаточно найти конечное подпокрытие открытого покрытия $V(x,y) \times W(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Зафиксируем $x_0 \in X$ и рассмотрим подпространство $\{x_0\} \times Y$ из $X \times Y$. Как доказано в Предложении 8.2.8 это пространство гомеоморфно $(Y, \mathcal{T}_2)$, следовательно компактно. Так как $V(x_0, y) \times W(x_0, y)$, $y \in Y$ - открытое покрытие $\{x_0\} \times Y$ у него есть конечное подпокрытие:

$$V(x_0, y_1) \times W(x_0, y_1),\ V(x_0, y_2) \times W(x_0, y_2), \ldots, V(x_0, y_m) \times W(x_0, y_m).$$

Определим $V(x_0) = V(x_0, y_1) \cap V(x_0, y_2) \cap \cdots \cap V(x_0, y_m)$. Мы видим, что множество $V(x_0) \times Y$ содержится в объединении конечного числа множеств вида $V(x_0, y) \times W(x_0, y)$, $y \in Y$.

Таким образом, чтобы доказать, что $X \times Y$ компактно, достаточно показать, что $X \times Y$ содержится в конечном объединении множеств вида $V(x) \times Y$. Так как каждое $V(x)$ - открытое множество, содержащее $x \in X$, семейство $V(x)$, $x \in X$, является открытым покрытием компактного пространства $(X, \mathcal{T}_1)$. Следовательно существуют $x_1, x_2, \ldots, x_k$ такие, что $X \subseteq V(x_1) \cup V(x_2) \cup \ldots V(x_k)$. То есть, $X \times Y \subseteq (V(x_1) \times Y) \cup (V(x_2) \times Y) \cup \cdots \cup (V(x_k) \times Y)$, как и требовалось. Следовательно, $(X, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$ - компактно.

Далее, по индукции. Предположим, что произведение N компактных пространств компактно. Рассмотрим произведение $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_{N+1}, \mathcal{T}_{N+1})$ компактных пространств $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \ldots, N+1$. Тогда

$$(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_N + 1, \mathcal{T}_N + 1) \cong [(X_1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (X_N, \mathcal{T}_N)] \times (X_N + 1, \mathcal{T}_N + 1).$$

По индуктивному предположению, $(X_1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (X_N, \mathcal{T}_N)$ - компактно, поэтому правая часть является произведением двух компактных пространств, и, поэтому, тоже компактна. Следовательно, левая часть тоже компактна. Что и требовалось доказать. □

Используя Предложения 7.2.1 и 8.2.5 (i), мы немедленно получаем:

8.3.2 Предложение. (Обращение Теоремы Тихонова) Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. Если $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже компактно. □

Мы теперь в состоянии доказать ранее сформулированную Теорему 7.2.13.

8.3.3 Теорема. (Обобщенная Теорема Гейне-Бореля) Подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. То что каждое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ ограничено, можно доказать так же как в Предложении 7.2.8. Таким образом, по Предложению 7.2.5 произвольное компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ замкнуто и ограничено.

В обратную сторону, пусть S некоторое замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда, по Упражнениям 7.2 #8, S является замкнутым подмножеством произведения

$$\overbrace{[-M, M] \times [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]}^{n \text{ terms}}$$

для некоторого действительного числа M. Так как каждый замкнутый интервал $[-M, M]$ компактен, по Следствию 7.2.3, из Теоремы Тихонова следует, что произведение

$$[-M, M] \times [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$$

тоже компактно. Так как S замкнутое подмножество компактного пространства, то оно тоже компактно. □

8.3.4 Пример. Определим подпространство $\mathbb{S}^1$ пространства $\mathbb{R}^2$ как

$$\mathbb{S}^1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Тогда $\mathbb{S}^1$ компактно как замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^2$.

Аналогично, мы определяем **n-сферу** $\mathbb{S}^n$ как подпространство $\mathbb{R}^{n+1}$ заданное формулой

$$\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Тогда S^n - замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$, а, поэтому, компактно.□

8.3.5 Пример. Подпространство $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ пространства $\mathbb{R}^3$ является произведением двух компактных множеств и, поэтому, компактно. (Убедитесь, что $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ является поверхностью цилиндра.) □

Упражнения 8.3

1. Топологическое пространство называется $(X, \mathcal{T})$ is said to be **локально компактным** если каждая точка $x \in X$ обладает по крайней мере одной компактной окрестностью. Докажите, что

   (i) Каждое компактное пространство локально компактно.

   (ii) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ - локально компактны (но не компактны).

   (iii) Каждое дискретное пространство локально компактно.

   (iv) Если $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\ldots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ - локально компактные пространства, то $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже локально компактно.

   (v) Каждое замкнутое подпространство локально компактного пространства само локально компактно.

(vi) Непрерывный образ локально компактного пространства не обязательно локально компактен.

(vii) Если f - непрерывное отображение локально компактного пространства $(X, \mathcal{T})$ на топологическое пространство $(Y, \mathcal{T}_1)$, то $(Y, \mathcal{T}_1)$ - локально компактно.

(viii) Если $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ топологические пространства такие, что $\prod_{i=1}^{n}(X_i \mathcal{T}_i)$ локально компактно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - локально компактно.

2.* Пусть $(Y, \mathcal{T}_1)$ - локально компактное подпространство Хаусдорфова пространства $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что если Y плотно в $(X, \mathcal{T})$, то Y открыто в $(X, \mathcal{T})$. [Подсказка: Используйте Упражнения 3.2 #9]

8.4 Произведения и Связность

8.4.1 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, и пусть x - произвольная точка из X. **Компонента** x **в** X**,** $C_X(x)$, определяется как объединение всех связных подмножеств X, содержащих x.

8.4.2 Предложение. Пусть x - произвольная точка из топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Тогда $C_X(x)$ связно.

Доказательство. Пусть $\{C_i : i \in I\}$ - семейство всех связных подмножеств $(X, \mathcal{T})$, содержащих x. (Заметим, что $\{x\} \in \{C_i : i \in I\}$.) Тогда $C_X(x) = \bigcup_{i \in I} C_i$.

Пусть O подмножество $C_X(x)$, открыто-замкнутое в топологии, индуцированной на $C_X(x)$ топологией $\mathcal{T}$. Тогда $O \cap C_i$ - открыто-замкнуто в индуцированной топологии на C_i, для каждого i.

Но так как каждое из C_i связно, $O \cap C_i = C_i$ или $\emptyset$, для всех i. Если $O \cap C_j = C_j$ для некоторого $j \in I$, то $x \in O$. Поэтому, в этом случае, $O \cap C_i \neq \emptyset$, для всех $i \in I$ так как каждое C_i содержит x. Следовательно, либо $O \cap C_i = C_i$, для всех $i \in I$, либо $O \cap C_i = \emptyset$, для всех $i \in I$; то есть, либо $O = C_X(x)$, либо $O = \emptyset$.

Поэтому у $C_X(x)$ нет собственных открыто-замкнутых подмножеств, и , следовательно, оно связно. $\square$

8.4.3 Замечание. Из Определения 8.4.1 и Предложения 8.4.2 мы видим, что $C_X(x)$ является наибольшим связным подмножеством X, содержащим x. $\square$

8.4.4 Лемма. Пусть a и b точки топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Если существует связное множество C, содержащее обе точки a и b, то $C_X(a) = C_X(b)$.

Доказательство. По Определению 8.4.1, $C_X(a) \supseteq C$ и $C_X(b) \supseteq C$. Следовательно, $a \in C_X(b)$.

Из Предложения 8.4.2 мы имеем, что $C_X(b)$ - связно и поэтому является связным множеством, содержащим a. Поэтому, по Определению 8.4.1, $C_X(a) \supseteq C_X(b)$.

Аналогично, $C_X(b) \supseteq C_X(a)$, и мы показали, что $C_X(a) = C_X(b)$. □

8.4.5 Предложение. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. Пространство $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ связно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ связно.

Доказательство. Чтобы показать, что произведение конечного числа связных пространств связно, достаточно доказать, что произведение любых двух связных множеств связно, а затем воспользоваться индукцией.

Итак, пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - связные пространства, а $\langle x_0, y_0 \rangle$ - произвольная точка из произведения $(X \times Y, \mathcal{T}_2)$. Пусть $\langle x_1, y_1 \rangle$ некоторая другая точка из пространства $X \times Y$. Тогда подпространство $\{x_0\} \times Y$ пространства $(X \times Y, \mathcal{T})$ гомеоморфно связному множеству $(Y, \mathcal{T}_1)$ и, поэтому, связно.

Аналогично показывается, что $X \times \{y_1\}$ связно. Далее, $\langle x_0, y_1 \rangle$ лежит в связном пространстве $\{x_0\} \times Y$, поэтому $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_1 \rangle) \supseteq \{x_0\} \times Y \ni \langle x_0, y_0 \rangle$, кроме того $\langle x_0, y_1 \rangle \in X \times \{y_1\}$, и поэтому $C_{X \times Y}((x_0, y_1)) \supseteq X \times \{y_1\} \ni (x_1, y_1)$.

Итак $\langle x_0, y_0 \rangle$ и $\langle x_1, y_1 \rangle$ лежат в связном множестве $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_1 \rangle)$, и по Лемме 8.4.4, $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_0 \rangle) = C_{X \times Y}(\langle x_1, y_1 \rangle)$. В частности, $\langle x_1, y_1 \rangle \in C_{X \times Y}(\langle x_0, y_0 \rangle)$. Так как $\langle x_1, y_1 \rangle$ - произвольная точка из $X \times Y$, мы заключаем, что $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_0 \rangle) = X \times Y$. Следовательно, $(X \times Y, \mathcal{T}_2)$ связно.

В обратную сторону, если $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$ связно, то из Предложений 8.2.5 и 5.2.1 следует, что каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ связно. □

8.4.6 Замечание. В Упражнениях 5.2 #9 упоминался следующий результат: Для произвольной точки x топологического пространства $(X, \mathcal{T})$, компонента связности $C_X(x)$ замкнута. □

8.4.7 Определение. Топологическое пространство называется **континуумом** если оно связно и компактно.

Немедленным следствием Теоремы 8.3.1 и Предложений 8.4.5 и 8.3.2 является следующее предложение.

8.4.8 Предложение. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. Пространство $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$ является континуумом тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ является континуумом. □

Упражнения 8.4

1. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **компактом** если оно компактно и метризуемо. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. Используя Упражнения 8.2#5 докажите, что $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$ является компактом тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ является компактом.

2. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на X метрикой d.

   (i) Докажите, что функция d из пространства $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$ в $\mathbb{R}$ непрерывна.

   (ii) Используя (i) покажите, что если метризуемое пространство $(X, \mathcal{T})$ связно X и содержит по крайней мере 2 точки, то множество X несчетно.

3. Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}_1)$ - линейно-связные пространства, то пространство $(X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T}_1)$ тоже линейно-связно.

4. (i) Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ произвольная точка пространства $(Y, \mathcal{T}) = \prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$. Докажите, что

that $C_Y(x) = C_{X_1}(x_1) \times C_{X_2}(x_2) \times \cdots \times C_{X_n}(x_n)$.

(ii) Выведите из (i) и Упражнений 5.2 #10, что $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$ вполне несвязно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ вполне несвязно.

5. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **локально связным** если у него есть база B, состоящая из связных (открытых) множеств.

   (i) Проверьте, что $\mathbb{Z}$ - локально связное пространство, не являющееся связным.

   (ii) Покажите, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^n$ - локально связны для всех $n \geq 1$.

   (iii) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - подпространство $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек сегментов, соединяющих $\langle 0, 1 \rangle$ с $\langle 0, 0 \rangle$ и со всеми точками $\langle \frac{1}{n}, 0 \rangle$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Покажите, что $(X, \mathcal{T})$ - связно, но не локально связно.

   (iv) Докажите, что каждое открытое подмножество локально связного пространства - локально связно.

   (v) Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ - топологические пространства. Докажите, что $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$ локально связно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ локально связно.

8.5 Основная Теорема Алгебры

В этом разделе мы покажем еще одно приложение топологии. Мы используем компактность и Обобщенную Теорему Гейне-Бореля чтобы доказать Основную Теорему Алгебры.

8.5.1 Теорема. (Основная Теорема Алгебры) Каждый многочлен $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, где a_i - комплексные числа, $a_n \neq 0$, и $n \geq 1$, имеет корень; то есть, существует комплексное число z_0 такое, что $f(z_0) = 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}}\right] \\ &\geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|\right], \quad \text{для } |z| \geq 1 \\ &= |z|^{n-1}[|a_n||z| - R], \quad \text{для } |z| \geq 1 \text{ и } R = |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \\ &\geq |z|^{n-1}, \quad \text{для } |z| \geq \max\left\{1, \frac{R+1}{|a_n|}\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если мы выберем $p_0 = |f(0)| = |a_0|$ то, согласно неравенству (1), существует $T > 0$ такое, что

$$|f(z)| > p_0, \quad \text{для всех } |z| > T \tag{2}$$

Рассмотрим множество $D = \{z : z \in$ комплексной плоскости и $|z| \leq T\}$. Это множество является замкнутым ограниченным подмножеством комплексной плоскости $\mathbf{C} = \mathbb{R}^2$ и поэтому, по Обобщенной Теореме Гейне-Бореля, компактно. Следовательно, согласно Предложению 7.2.14, непрерывная функция $|f| : D \to \mathbb{R}$ имеет минимум в некоторой точке z_0. Поэтому

$$|f(z_0)| \leq |f(z)|, \quad \text{для всех } z \in D.$$

Согласно (2), для всех $z \notin D$, $|f(z)| > p_0 = |f(0)| \geq |f(z_0)|$. Следовательно,

$$|f(z_0)| \leq |f(z)|, \quad \text{для всех } z \in \mathbf{C} \tag{3}$$

Таким образом, нам надо доказать, что $f(z_0) = 0$. Для удобства сделаем ‘сдвиг’. Положим, $P(z) = f(z + z_0)$. Тогда, согласно (2),

$$|P(0)| \leq |P(z)|, \quad \text{для всех } z \in \mathbf{C} \tag{4}$$

Проблема доказательства $f(z_0) = 0$ эквивалентна доказательству $P(0) = 0$.

Итак, $P(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} \dots + b_0, \quad b_i \in C$. Поэтому, $P(0) = b_0$. Нам надо показать, что $b_0 = 0$.

Предположим, что $b_0 \neq 0$. Тогда

$$P(z) = b_0 + b_k z^k + z^{k+1}Q(z), \tag{5}$$

где $Q(z)$ - многочлен, а b_k наименьшее $b_i \neq 0, \ i > 0$.

например если $P(z) = 10z^7 + 6z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 2z^2 + 1$, то $b_0 = 1$, $b_k = 2$, $(b_1 = 0)$, а

$$P(z) = 1 + 2z^2 + z^3 \overbrace{(4 + 3z + 6z^2 + 10z^4)}^{Q(z)}.$$

Пусть $w \in \mathrm{C}$ - корень k-той степени из числа $-b_0/b_k$; то есть, $w^k = -b_0/b_k$.

Так как $Q(z)$ - многочлен, для действительного t,

$$t\,|Q(tw)| \to 0, \quad \text{при } t \to 0$$

Отсюда следует, что $t\,|w^{k+1}Q(tw)| \to 0$ при $t \to 0$.

Значит существует действительное число t_0, $0 < t_0 < 1$, такое, что

$$t_0\,|w^{k+1}Q(t_0w)| < |b_0| \tag{6}$$

Поэтому, согласно (5),

$$\begin{aligned} P(t_0w) &= b_0 + b_k(t_0w)^k + (t_0w)^{k+1}Q(t_0w) \\ &= b_0 + b_k\left[t_0{}^k\left(\frac{-b_0}{b_k}\right)\right] + (t_0w)^{k+1}Q(t_0w) \\ &= b_0(1 - t_0{}^k) + (t_0w)^{k+1}Q(t_0w) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} |P(t_0w)| &\le (1 - t_0{}^k)|b_0| + t_0{}^{k+1}|w^{k+1}Q(t_0w)| \\ &< (1 - t_0{}^k)\,|b_0| + t_0{}^k\,|b_0|, \quad \text{by (6)} \\ &= |b_0| \\ &= |P(0)| \end{aligned} \tag{7}$$

Но (7) противоречит (4). следовательно предположение о том, что $b_0 \neq 0$ ложно; то есть, $P(0) = 0$, как и требовалось доказать. □

8.6 Заключение

Как упоминалось во Введении, это первая из трех глав, посвященных пространствам произведений. Простейшим является случай конечных произведений. В следующей главе мы изучим счетные произведения, а в главе 10 - общий случай. Наиболее важным результатом этой главы была Теорема Тихонова[1]. В Главе 10 эта теорема обобщается на случай любых произведений.

Второй результат, названный здесь теоремой, - это обобщенная Теорема Гейне-Бореля, которая характеризует компактные подмножества $\mathbb{R}^n$ как те и только те подмножества, которые являются замкнутыми и ограниченными.

Упражнения 8.3 #1 вводят понятие локально компактного топологического пространства. Эти пространства играют центральную роль в топологической теории групп.

Мы продолжили изучение связности в этой главе, введя понятие компоненты связности для точки. Это позволяет разбить произвольное топологическое пространство на связные подмножества. В связном пространстве, как например в $\mathbb{R}^n$, компонента связности любой точки совпадает со всем пространством. С другой стороны, компонентами любого вполне несвязного пространства, например $\mathbb{Q}$, являются одноэлементные множества.

Как упоминалось выше, у понятия компактности есть локальная версия. Это верно и в отношении связности. Упражнения 8.4 #5 определяют локальную связность. Однако, в то время как каждое компактное пространство локально компактно, не каждое связное пространство локально связно. На самом деле, многие свойства $\mathcal{P}$ имеют локальные версии, называемые **локально $\mathcal{P}$**, и обычно из $\mathcal{P}$ не следует локальное $\mathcal{P}$, а из локального $\mathcal{P}$, как правило, не следует $\mathcal{P}$.

В конце главы мы дали топологическое доказательство Основной Теоремы Алгебры. Тот факт, что теорема из одной области математики может быть доказана методами из другой области, является еще одним подтверждением того, что математику не надо строго разделять на разные области. Несмотря

[1]Вы должно быть заметили, как скупо мы пользуемся словом "теорема", поэтому, когда мы используем его, это означает, что результат действительно очень важный.

на то, что курсы по алгебре, комлексному анализу и теории чисел читаются отдельно, эти области связаны друг с другом. В Приложении 5 мы вводим понятие топологической группы, которая одновременно является и топологическим пространством, и группой, причем эти две структуры связаны определенным образом. Теория топологических групп является богатой и интересной областью математики. Материал, необходимый для прочтения Приложения 5, содержится в настоящей главе. Для тех кто знакомы с теорией категорий отметим, что в категории топологических пространств можно определить и произведения, и копроизведения. Произведениями являются произведения топологических пространств. Вы можете сами попытаться определить копроизведения.

Глава 9

Счетные Произведения

Введение

Интуитивно мы знаем, что площадь кривой равна нулю. Поэтому вы будете удивлены, узнав о существовании кривых, заполняющих все пространство. Мы исследуем этот вопрос при помощи удивительного пространства, называемого Множеством Кантора. Изучение этого пространства позволяет лучше понять свойства единичного интервала $[0, 1]$.

До сих пор мы изучали конечные произведения топологических пространств. В этой главе мы начнем изучать счетные произведения топологических пространств. Это приведет нас к удивительно богатой теории, в которой кривые, заполняющие пространство, являются всего лишь одним из приложений.

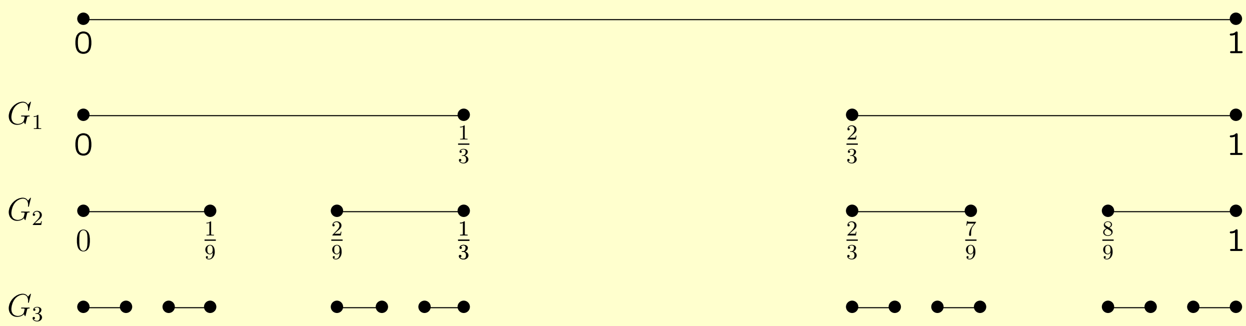
9.1 Множество Кантора

9.1.1 Замечание. Мы сейчас построим удивительное (но полезное) множество, известное как Множество Кантора. Рассмотрим замкнутый интервал [0,1], удалим из него открытый интервал $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, являющийся средней третью первоначального отрезка, и обозначим оставшееся множество через G_1. То есть,

$$G_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Далее, удалим из G_1 открытые интервалы $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, являющиеся средними третьми двух его кусков, и обозначим оставшееся множество через G_2. То есть,

$$G_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}|, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$



Если мы продолжим подобным образом, удаляя на каждом шагу открытую треть каждого замкнутого интервала, оставшегося от предыдущего шага, мы получим вложенную последовательность замкнутых множеств.

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots G_n \supset \dots .$$

Множество Кантора, G, определяется как

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

и, будучи пересечением замкнутых множеств, является замкнутым подмножеством [0,1]. Так как [0,1] - компактно, Пространство Кантора, $(G, \mathcal{T})$, (то есть, G с индуцированной топологией) тоже компактно. [Множество Кантора названо так в честь основателя теории множеств, Георга Кантора (1845–1918).]

Очень удобно обозначать элементы Канторова множества действительными числами, записанными в троичной системе 3. Конечно же вы знакомы с десятичной системой записи чисел. Как вы знаете, в компьютерах используются двоичные числа (по основанию 2). Для множества же Кантора, основание 3 является наиболее удобным.

В троичной системе число $76\frac{5}{81}$, например, записывается как $2211{\cdot}0012$, так как равно

$$2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4}.$$

То есть произвольное число x из $[0,1]$ по основанию 3 имеет представление $0.a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$, где

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0,1,2\}, \qquad \text{для каждого } n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, и $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, эти числа записываются в троичной системе как

$$\frac{1}{2} = 0.11111\dots; \qquad \frac{1}{3} = 0.02222\dots; \qquad 1 = 0.2222\dots.$$

(Конечно же другой записью числа $\frac{1}{3}$ в троичной системе будет $0.10000\dots$, а другой записью числа 1 будет $1.0000\dots.$)

Возвращаясь к Множеству Кантора, G, должно быть ясно, что элемент из $[0,1]$ принадлежит G тогда и только тогда, когда в его троичной записи $a_n \neq 1$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\frac{1}{2} \notin G$, $\frac{5}{81} \notin G$, $\frac{1}{3} \in G$ и $1 \in G$.

Итак у нас есть взаимно-однозначная функция f из Множества Кантора в множество всех последовательностей вида $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \rangle$, где каждое $a_i \in \{0,2\}$. В дальнейшем мы используем эту функцию f. $\square$

Упражнения 9.1

1. (a) Запишите следующие числа в троичной системе счисления:

   (i) $21\frac{5}{243}$; (ii) $\frac{7}{9}$; (iii) $\frac{1}{13}$.

   (b) Какие числа имеют следующие троичные представления:

   (i) $0{\cdot}\overline{02} = 0{\cdot}020202\ldots$; (ii) $0{\cdot}\overline{110}$; (iii) $0{\cdot}\overline{012}$?

   (c) Какие из чисел из (a) и (b) принадлежат Множеству Кантора?

2. Пусть x - некоторая точка топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Точка x называется **изолированной точкой** если $x \in X \setminus X'$; то есть, x не является предельной точкой X. Пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **совершенным** если у него нет изолированных точек. Докажите, что Множество Кантора является компактным вполне- несвязным совершенным множеством.

   [Можно показать, что любое непустое компактное вполне-несвязное метризуемое совершенное пространство гомеоморфно Пространству Кантора. См., например, Упражнение 6.2A(c) из Engelking [10].

9.2 Топология Произведения

9.2.1 Определение. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\dots$, $(X_n, \mathcal{T}), \dots$ счетно бесконечное семейство топологических пространств. Тогда **произведение,** $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, множеств $X_i, i \in \mathbb{N}$ состоит из всех бесконечных последовательностей $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rangle$, где $x_i \in X_i$ для всех i. (бесконечную последовательность $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rangle$ иногда записывают как $\prod_{i=1}^{\infty} x_i$.) **Пространство произведения,** $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$, состоит из произведения $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ с топологией $\mathcal{T}$, имеющей в качестве базы следующее семейство

$$B = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \mathcal{T}_i \text{ и } O_i = X_i \text{ для всех коме конечного числа } i. \right\}$$

Топология $\mathcal{T}$ называется **топологией произведения**.

Таким образом, базовое открытое множество является множеством следующего вида

$$O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots .$$

Предупреждение. Должно быть очевидным, что произведение открытых множеств не обязательно открыто в $\mathcal{T}$. Например, если $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ такие, что каждое $O_i \in \mathcal{T}_i$, и $O_i \neq X_i$ для всех i, то $\prod_{i=1}^{\infty} O_i$ не может быть представлено как объединение членов $\mathcal{B}$ и, поэтому, не открыто в пространстве произведения $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$.

9.2.2 Замечание. Почему мы определили топологию произведения таким образом? Ответ заключается в том, что только с это определение позволяет нам доказать Теорему Тихонова (для бесконечных произведений), которая
утверждает, что произвольное произведение компактных пространств компактно. А этот результат крайне важен для приложений.

9.2.3 Пример. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n), \dots$ счетное бесконечное семейство топологических пространств. **Ящичная топология** $\mathcal{T}'$ на произведении

$\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ - это топология, имеющая базой следующее семейство

$$B' = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \mathcal{T}_i \right\}.$$

Легко видеть, что если каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ дискретно, то ящичное произведение $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}')$ тоже дискретно. Поэтому, если каждое $(X_i, \mathcal{T})$ является конечным множеством с дискретной топологией, то $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}')$ - бесконечное дискретное пространство, которое конечно же не компактно. То есть мы имеем ящичное произведение компактных пространств $(X_i, \mathcal{T}_i)$, которое не компактно. □

Другим подтверждением правильности нашего выбора определения топологии произведения является следующее предложение, являющееся аналогом Предложения 8.2.5 для счетных произведений.

9.2.4 Предложение. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n), \ldots$ - счетное бесконечное семейство топологических пространств, а $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$ - пространство произведения этих пространств. Для каждого i, пусть $p_i \colon \prod_{j=1}^{\infty} X_j \to X_i$ - отображение проекции; то есть $p_i(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle) = x_i$ для каждого $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j$. Тогда

(i) каждое p_i является непрерывным открытым сюръективным отображением, и

(ii) $\mathcal{T}$ наиболее сильная топология на $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$, для которой каждое из p_i непрерывно.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Предложения 8.2.5 и оставляется в качестве упражнения. □

Следующее предложение будет использовано чуть позже.

9.2.5 Предложение. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$ и $(Y_i, \mathcal{T}'_i)$, $i \in \mathbb{N}$, счетно бесконечные семейства топологических пространств, а $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$ и $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \mathcal{T}')$ - их пространства произведений, соответственно. Если отображение $h_i \colon (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y_i, \mathcal{T}'_i)$ непрерывно для каждого $i \in \mathbb{N}$, то таким же является отображение $h \colon (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}) \to (\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \mathcal{T}')$ заданное как $h \colon (\prod_{i=1}^{\infty} x_i) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i)$; то есть, $h(\langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rangle) = \langle h_1(x_1), h_2(x_2), \dots, h_n(x_n), \dots \rangle$.

Доказательство. Достаточно показать, что если O открытое множество из базы $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \mathcal{T}')$, то $h^{-1}(O)$ открыто в $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$. Рассмотрим открытое базовое множество $U_1 \times U_2 \times \dots U_n \times Y_{n+1} Y_{n+2} \times \dots$ где $U_i \in \mathcal{T}'_i$, для $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$h^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \dots) = h_1^{-1}(U_1) \times \dots \times h_n^{-1}(U_n) \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$$

и множество с права принадлежит $\mathcal{T}$, так как непрерывность каждого из h_i влечет $h_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_i$, для $i = 1, \dots, n$. Поэтому h непрерывно. $\square$

Упражнения 9.2

1. Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$ C_i - замкнутое подмножество топологического пространства $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Докажите, что $\prod_{i=1}^{\infty} C_i$ - замкнуто в $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$.

2. Докажите, что если в Предложении 9.2.5 каждое из отображений h_i к тому же

   (a) инъективно,

   (b) сюръективно,

   (c) сюръективно и открыто,

   (d) является гомеоморфизмом,

   то h является соответственно

(a) инъективным,

(b) сюръективным,

(c) сюръективным и открытым,

(d) гомеоморфизмом.

3. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, счетное бесконечное семейство топологических пространств. Докажите, что каждое $(X_i, \mathcal{T}_i)$ гомеоморфно некоторому подпространству $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$.
[Подсказка: См. Предложение 8.12].

4. (a) Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, - топологические пространства. Докажите, что если каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ является (i) Хаусдорфовым, (ii) T_1-пространством, (iii) T_0-пространством, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ соответственно является (i) Хаусдорфовым, (ii) T_1-пространством, (iii) T_0-пространством.

   (b) Используя Упражнение 3 вверху, докажите обращения утверждений из (a).

5. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$ - бесконечное счетное семейство топологических пространств. Докажите, что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ дискретно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ дискретно, и все X_i, за исключением конечного числа, $i \in \mathbb{N}$ - одноэлементные множества.

6. Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - топологическое пространство. Докажите, что

   (i) если $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактно, каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже компактно;

   (ii) если $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - связно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - связно;

   (iii) если $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - локально компактно, то каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - локально компактно, и все, за исключением конечного числа, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактны.

9.3 Пространство Кантора и Гильбертов Куб

9.3.1 Замечание. Мы теперь вернемся к Канторову пространству и докажем, что оно гомеоморфно счетно бесконечному произведению двухточечных пространств.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть $(A_i, \mathcal{T}_i)$ будет множеством $\{0, 2\}$ с дискретной топологией. Рассмотрим пространство произведений $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$. В следующем предложении мы покажем, что это пространство гомеоморфно пространству Кантора $(G, \mathcal{T})$.

9.3.2 Предложение. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - пространство Кантора, а $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$ такое же как в Замечании 9.3.1. Тогда отображение $f\colon (G, \mathcal{T}) \longrightarrow (\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$, определенное как $f(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$, является гомеоморфизмом.

Доказательство. В Замечании 9.1.1 мы уже отметили, что f - взаимно-однозначно. Так как $(G, \mathcal{T})$ - компактно, а $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$ - Хаусдорфово (Упражнения 9.2 #4) из Упражнений 7.2 #6 следует, что отображение f является гомеоморфизмом, если оно непрерывно.

Чтобы доказать непрерывность f, достаточно показать, что для любого открытого множества из базы
$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N \times A_{N+1} \times A_{N+2} \times \dots$ и любой точки $a = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle \in U$ существует открытое множество $W \ni \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ такое, что $f(W) \subseteq U$.

Рассмотрим открытый интервал $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{3^{N+2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{N+2}}\right)$, и пусть W есть пересечение этого интервала с G. Тогда W - открыто в $(G, \mathcal{T})$, и если $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in W$, то $x_i = a_i$, для $i = 1, 2, \dots, N$. Поэтому, $f(x) \in U_1 \times U_2 \times \dots U_N \times A_{N+1} \times A_{N+2} \times \dots$, следовательно $f(W) \subseteq U$, как и требовалось. $\square$

Как отмечалось ранее, в надлежащее время мы докажем, что произведение произвольного числа компактных множеств компактно – это Теорема Тихонова. Однако, в свете Предложения 9.3.2 мы можем легко показать, что произведение счетного числа гомеоморфных копий пространства Кантора гомеоморфно пространству Кантора, и, поэтому, само компактно.

9.3.3 Предложение. Пусть $(G_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, счетно бесконечное семейство топологических пространств, каждое из которых гомеоморфно Канторову пространству $(G, \mathcal{T})$. Тогда

$$(G, \mathcal{T}) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(G_i, \mathcal{T}_i) \cong \prod_{i=1}^{n}(G_i, \mathcal{T}_i), \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Сначала проверим, что $(G, \mathcal{T}) \cong (G_1, \mathcal{T}_1) \times (G_2, \mathcal{T}_2)$. Для этого, согласно Предложению 9.3.2, достаточно показать, что

$$\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i)$$

где каждое из $(A_i, \mathcal{T}_i)$ есть множество $\{0, 2\}$ с дискретной топологией.

Определим отображение θ из множества $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i)$ в множество $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i)$ следующим образом

$$\theta(\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle, \langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle) \longrightarrow \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots \rangle$$

Легко проверить, что θ - гомеоморфизм и, поэтому, $(G_1, \mathcal{T}_1) \times (G_2, \mathcal{T}_2) \cong (G, \mathcal{T})$. Далее, по индукции, $(G, \mathcal{T}) \cong \prod_{i=1}^{n}(G_i, \mathcal{T}_i)$ для всех натуральных n.

Для случая бесконечных произведений определим отображение

$$\phi : \left[\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i) \times \dots\right] \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i)$$

следующим образом

$$\begin{aligned}\phi(\langle a_1, a_2, \dots \rangle, \langle b_1, b_2, \dots \rangle, \langle c_1, c_2, \dots \rangle, \langle d_1, d_2, \dots \rangle, \langle e_1, e_2, \dots \rangle, \dots)\\ = \langle a_1, a_2, b_1, a_3, b_2, c_1, a_4, b_3, c_2, d_1, a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, \dots \rangle.\end{aligned}$$

Как и раньше легко проверяется, что ϕ - гомеоморфизм, что завершает доказательство. □

9.3.4 Замечание. Следует отметить, что утверждение

$$(G,\mathcal{T}) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(G_i,\mathcal{T}_i)$$

из Предложения 9.3.3 становится более очевидным, если его записать как

$$(A,\mathcal{T})\times(A,\mathcal{T})\times\dots \;\cong\; [(A,\mathcal{T})\times(A,\mathcal{T})\times\dots]\times[(A,\mathcal{T})\times(A,\mathcal{T})\times\dots]\times\dots$$

где $(A,\mathcal{T})$ есть множество $\{0,2\}$ с дискретной топологией. □

9.3.5 Предложение. Топологическое пространство $[0,1]$ является непрерывным образом пространства Кантора $(G,\mathcal{T})$.

Доказательство. В силу Предложения 9.3.2 достаточно найти непрерывное отображение ϕ из $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\mathcal{T}_i)$ на $[0,1]$. Это отображение задается следующим образом

$$\phi(\langle a_1,a_2,\dots,a_i,\dots\rangle)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}.$$

Вспомнив, что каждое $a_i\in\{0,2\}$, и каждое число $x\in[0,1]$ имеет двоичное представление вида $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{2^j}$, где $b_j\in\{0,1\}$, мы видим, что ϕ сюръективно. Чтобы показать, что ϕ непрерывно, достаточно показать, согласно Предложению 5.1.7, что если U - открытый интервал

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}-\varepsilon,\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}+\varepsilon\right)\ni\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}},\qquad \text{для любого } \varepsilon>0.$$

то существует открытое множество $W\ni\langle a_1,a_2,\dots,a_i,\dots\rangle$ такое, что $\phi(W)\subseteq U$. Выберем N достаточно большим, чтобы $\sum_{i=N}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}<\varepsilon$, и положим

$$W=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\dots\times\{a_N\}\times A_{N+1}\times A_{N+2}\times\dots.$$

Тогда W открыто в $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\mathcal{T}_i)$, $W\ni\langle a_1,a_2,\dots,a_i,\dots\rangle$, и $\phi(W)\subseteq U$, как и требовалось. □

9.3.6 Замечание. Вы, должно быть, несколько удивлены Предложением 9.3.5, так как оно утверждает, что "хорошее"пространство [0,1] является непрерывным образом очень странного пространства Кантора. Однако, в дальнейшем мы увидим, что *каждое* компактное метрическое пространство является непрерывным образом пространства Кантора. □

9.3.7 Определение. Пусть для каждого натурального n топологическое пространство $(I_n, \mathcal{T}_n)$ гомеоморфно $[0,1]$. Тогда пространство произведений $\prod_{n=1}^{\infty}(I_n, \mathcal{T}_n)$ называется **Гильбертовым кубом** и обозначается как I^∞. Пространство $\prod_{i=1}^{n}(I_i, \mathcal{T}_i)$ называется **n-кубом** и обозначается как I^n, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Из Теоремы Тихонова для конечных произведений мы знаем, что I^n компактно для всех n. Сейчас мы докажем, что I^∞ тоже компактно. (Конечно же этот результат может быть выведен из Теоремы Тихонова для бесконечных произведений, который доказывается в Главе 10.)

9.3.8 Теорема. Гильбертов куб компактен.

Доказательство. По Предложению 9.3.5 существует непрерывное отображение ϕ_n из $(G_n, \mathcal{T}_n)$ на $(I_n, \mathcal{T}'_n)$ где, для каждого $n \in \mathbb{N}$, $(G_n, \mathcal{T}_n)$ и $(I_n, \mathcal{T}'_n)$ гомеоморфны пространству Кантора и [0,1], соответственно. Следовательно по Предложению 9.2.5 и Упражнениям 9.2 #2 (b), существует непрерывное отображение ψ из $\prod_{n=1}^{\infty}(G_n, \mathcal{T}_n)$ на $\prod_{n=1}^{\infty}(I_n, \mathcal{T}'_n) = I^\infty$. Но Предложение 9.3.3 утверждает, что $\prod_{n=1}^{\infty}(G_n, \mathcal{T}_n)$ гомеоморфно пространству Кантора $(G, \mathcal{T})$. Следовательно I^∞ является непрерывным образом компактного пространства $(G, \mathcal{T})$, и, поэтому, само компактно. $\square$

9.3.9 Предложение. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, счетно бесконечное семейство метризуемых пространств. Тогда $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже метризуемо.

Доказательство. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть d_i есть метрика на X_i, индуцирующая топологию $\mathcal{T}_i$. Упражнение 6.1 #2 утверждает, что если мы выберем $e_i(a,b) = \min(1, d(a,b))$, для всех a и b из X_1, то e_i - метрика, индуцирующая топологию $\mathcal{T}_i$ на X_i. Поэтому, не ограничивая общности, предположим, что $d_i(a,b) \leq 1$, для всех a и b из X_i, $i \in \mathbb{N}$.

Определим $d\colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ как

$$d\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \prod_{i=1}^{\infty} b_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} \text{ для всех } a_i \text{ и } b_i \text{ из } X_i.$$

Заметим, что ряд справа сходится потому, что каждое $d_i(a_i, b_i) \leq 1$ и, поэтому, ограничено сверху выражением $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Легко проверить, что d - метрика на $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Заметим, что d_i', определенная как $d_i'(a, b) = \frac{d_i(a,b)}{2^i}$, является метрикой на X_i, которая индуцирует ту же топологию $\mathcal{T}_i$ что и d_i. Мы утверждаем, что d индуцирует топологию произведения на $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Чтобы доказать это, заметим следующее. Так как

$$d\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_i\, , \prod_{i=1}^{\infty} b_i\right) \geq \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} = d_i'(a_i, b_i)$$

то проекция $p_i : (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, d) \longrightarrow (X_i, d_i')$ непрерывна для каждого i. Так как d_i' индуцирует топологию $\mathcal{T}_i'$, из Предложения 9.2.4 (ii) следует, что топология, индуцированная на $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ посредством d слабее, чем топология произведения.

Чтобы доказать, что топология, индуцированная d, также сильнее топологии произведения, выберем $B_\varepsilon(a)$ - открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$, содержащий точку $a = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$. Итак, $B_\varepsilon(a)$ открытое множество из базы топологии, индуцированной d. Нам надо показать, что существует множество $W \ni a$ такое, что $W \subseteq B_\varepsilon(a)$, и W открыто в топологии произведения. Пусть N натуральное число такое, что $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. И пусть O_i - открытый шар из (X_i, d_i) радиуса $\frac{\varepsilon}{2N}$, содержащий точку $a_i,\ i = 1, \ldots, N$. Определим

$$W = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \ldots .$$

Тогда W - открытое множество в топологии произведения, $a \in W$, и очевидно $W \subseteq B_\varepsilon(a)$, что и требовалось показать. □

9.3.10 Следствие. Гильбертов куб метризуем. □

Доказательство Предложения 9.3.9 может быть уточнено для получения следующего результата:

9.3.11 Предложение. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, - счетно бесконечное семейство вполне метризуемых пространств. Тогда $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - вполне метризуемо.

Доказательство. Упражнение 9.3 #10. □

9.3.12 Замечание. Из Предложения 9.3.11 мы видим, что счетно бесконечное произведение дискретных пространств вполне метризуемо. Наиболее интересным примером этого является $\mathbb{N}^{\aleph_0}$, счетно бесконечное произведение топологических пространств, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{N}$. Наиболее удивительным является факт, упомянутый в главе 6, что $\mathbb{N}^{\infty}$ гомеоморфно $\mathbb{P}$, топологическому пространству иррациональных чисел с эвклидовой топологией. См. Engelking [10] Упражнение 4.3.G и Упражнение 6.2.A.

9.3.13 Замечание. Другим важным примером вполне метризуемого счетного произведения является $\mathbb{R}^{\infty}$. Это счетно бесконечное произведение топологических пространств, гомеоморфных $\mathbb{R}$. В Следствии 4.3.25 из Engelking [10] показано, что: сепарабельное метризуемое пространство вполне метризуемо тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству $\mathbb{R}^{\infty}$. В частности мы видим, что каждое сепарабельное Банахово пространство гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству $\mathbb{R}^{\infty}$.

Существует замечательный и глубокий результат: каждое сепарабельное бесконечно-мерное Банахово пространство гомеоморфно $\mathbb{R}^{\infty}$, см. Bessaga and Pelczynski [4].

Упражнения 9.3

1. Пусть (X_i, d_i), $i \in \mathbb{N}$- счетно бесконечное семейство метрических пространств таких, что для всех i, $d_i(a,b) \le 1$, для произвольных a и b из X_i. Определим $e : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ как

$$e\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \prod_{i=1}^{\infty} b_i\right) = \sup\{d_i(a_i, b_i) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Докажите, что e - метрика на $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, эквивалентная метрике d из Предложения 9.3.9. (Вспомните, что "эквивалентность" означает "индуцирует ту же топологию".)

2. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, - компактные подпространства $[0,1]$. Выведите из Теоремы9.3.8 и Упражнения 9.2 #1, что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно.

3. Пусть $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - произведение счетно бесконечного семейства топологических пространств. Пусть $(Y, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а f - отображение из $(Y, \mathcal{T})$ в $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда каждое из отображений $p_i \circ f\colon (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ непрерывно, где p_i - отображения проекций.

4. (a) Пусть X - конечное множество, а $\mathcal{T}$ - Хаусдорфова топология на X. Докажите, что

   (i) $\mathcal{T}$ - дискретная топология;

   (ii) $(X, \mathcal{T})$ гомеоморфно подпространству $[0,1]$.

   (b) Используя (a) и Упражнение 3 вверху, докажите, что если $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - конечное Хаусдорфово пространство для $i \in \mathbb{N}$, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактно и метризуемо.

   (c) Покажите, что любое конечное топологическое пространство является непрерывным образом конечного дискретного пространства.

   (d) Используя (b) и (c), докажите, что если $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - конечное топологическое пространство для каждого $i \in \mathbb{N}$, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно.

5. (i) Докажите, что пространство Серпинского (Упражнение 1.3 #5 (iii)) является непрерывным образом [0,1].

   (ii) Используя (i) и Предложение 9.2.5, покажите, что если $(X_i, \mathcal{T}_i)$, для всех $i \in \mathbb{N}$, гомеоморфно пространству Серпинского, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно.

6. (i) Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, - счетно бесконечное семейство топологических пространств, каждое из которых

удовлетворяет второй аксиоме счетности. Докажите, что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже удовлетворяет второй аксиоме счетности.

(ii) Используя Упражнение 3.2 #4 (viii) и Упражнение 4.1 #14, докажите, что Гильбертов куб и все его подпространства сепарабельны.

7. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in \mathbb{N}$, счетно бесконечное семейство топологических пространств. Докажите, что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ вполне несвязно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ вполне несвязно. Докажите, что пространство Кантора вполне несвязно.

8. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а $(X_{ij}, \mathcal{T}_{ij})$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ - семейство топологических пространств, гомеоморфных $(X, \mathcal{T})$. Докажите, что

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(X_{ij}, \mathcal{T}_{ij})\right) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(X_{i1}.\mathcal{T}_{i1}).$$

[Подсказка: Этот результат обобщает Предложение 9.3.3, а доказательство использует отображение, аналогичное отображению ϕ.]

9. (i) Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, счетно бесконечное семейство топологических пространств, каждое из которых гомеоморфно Гильбертову кубу. Выведите из Упражнения 8, что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ гомеоморфно Гильбертову кубу.

(ii) Далее, покажите, что если $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, компактные подпространства Гильбертова куба, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно.

10. Докажите Предложение 9.3.11.

[Подсказка. В обозначениях из доказательства Предложения 9.3.9, покажите, что если $a_n = \prod_{i=1}^{\infty} a_{in}$, $n \in \mathbb{N}$, - последовательность Коши в $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, d)$, то для каждого $i \in \mathbb{N}$, $\{a_{in} : n \in \mathbb{N}\}$ - последовательность Коши в X_i, d_i.]

9.4 Теорема Урысона

9.4.1 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **сепарабельным** если у него есть счетное плотное подмножество.

См. Упражнения 3.2 #4 и 8.1 #9, где были введены сепарабельные пространства.

9.4.2 Пример. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, следовательно, $\mathbb{R}$ сепарабельно. $\square$

9.4.3 Пример. Любое счетное топологическое пространство сепарабельно. $\square$

9.4.4 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - компактное метризуемое пространство. Тогда $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно.

Доказательство. Пусть d - метрика на X, индуцирующая топологию $\mathcal{T}$. Для каждого натурального n, обозначим через $\mathcal{S}_n$ семейство всех открытых шаров с центрами в X и радиусами $\frac{1}{n}$. Тогда $\mathcal{S}_n$ - открытое покрытие X и, поэтому, существует открытое подпокрытие $\mathcal{U}_n = \{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}\}$, для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Пусть y_{n_j} - центр U_{n_j}, $j = 1, \dots, k$, а $Y_n = \{y_{n_1}, y_{n_2}, \dots, y_{n_k}\}$. Положим $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Тогда Y - счетное подмножество X. Мы покажем, что Y плотно в $(X, \mathcal{T})$.

Если V - непустое открытое множество из $(X, \mathcal{T})$, то для любого $v \in V$, V содержит открытый шар, B, радиуса $\frac{1}{n}$, содержащий v, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\mathcal{U}_n$ - открытое покрытие X, $v \in U_{n_j}$, для некоторого j. Таким образом, $d(v, y_{n_j}) < \frac{1}{n}$ и, поэтому, $y_{n_j} \in B \subseteq V$. Следовательно, $V \cap Y \neq \emptyset$, то есть Y плотно в X. $\square$

9.4.5 Следствие. Гильбертов куб сепарабелен. $\square$

Вскоре мы докажем удивительную Теорему Урысона, которая утверждает, что каждое компактное метризуемое пространство гомеоморфно некоторому подпространству Гильбертова куба. По ходу дела мы докажем (счетную версию) Теоремы Вложения.

Сначала мы приведем следующее предложение, которое совпадает с Упражнением 9.3 #3 и поэтому приводится без доказательства.

9.4.6 Предложение. Пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, - счетно бесконечное семейство топологических пространств, а f отображение из топологического пространства $(Y, \mathcal{T})$ в $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда каждое из отображений $p_i \circ f\colon (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ непрерывно, где p_i означает отображение проекции из $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ на $(X_i, \mathcal{T}_i)$.

9.4.7 Лемма. (Лемма Вложения) Пусть $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$ - счетно бесконечное семейство топологических пространств, и пусть для каждого i, f_i - отображение из топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ в $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Далее, пусть $e\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(Y_i, \mathcal{T}_i)$ является **оценочным отображением**; то есть, $e(x) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, для всех $x \in X$. Отображение e является гомеоморфизмом из $(X, \mathcal{T})$ на пространство $(e(X), \mathcal{T}')$, где $\mathcal{T}'$ - топология подпространства на $e(X)$, если

(i) каждое из f_i непрерывно,

(ii) семейство $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ **разделяет точки** из X; то есть, если x_1 и x_2 из X, где $x_1 \neq x_2$, то для некоторого i, $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$, и

(iii) семейство $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ **разделяет точки и замкнутые множества**; то есть, для $x \in X$ и произвольного замкнутого множества A из $(X, \mathcal{T})$, не содержащего x, $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$, для некоторого i.

Доказательство. Очевидно, что отображение $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (e(X), \mathcal{T}')$ сюръективно, из условия (ii) легко видеть, что оно инъективно.

Так как $p_i \circ e = f_i$ - непрерывное отображение $(X, \mathcal{T})$ в $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, для каждого i, из Предложения 9.4.6 следует, что отображение $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(Y_i, t_i)$ непрерывно. Следовательно, $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (e(X), \mathcal{T}')$ непрерывно.

Чтобы доказать, что $e \colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (e(X), \mathcal{T}')$ - открытое отображение, достаточно проверить, что для каждого $U \in \mathcal{T}$ и $x \in U$, существует множество $W \in \mathcal{T}'$ такое, что $e(x) \in W \subseteq e(U)$. Так как семейство f_i, $i \in \mathbb{N}$, разделяет точки и замкнутые множества, существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что $f_j(x) \notin \overline{f_j(X \setminus U)}$. Выберем

$$W = (Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_{j-1} \times [Y_j \setminus \overline{f_j(X \setminus U)}] \times Y_{j+1} \times Y_{j+2} \times \dots) \cap e(X).$$

Очевидно, что $e(x) \in W$ и $W \in \mathcal{T}'$. Остается показать, что $W \subseteq e(U)$. Пусть $e(t) \in W$. Тогда

$$\begin{aligned} & f_j(t) \in Y_j \setminus \overline{f_j(X \setminus U)} \\ \Rightarrow \quad & f_j(t) \notin \overline{f_j(X \setminus U)} \\ \Rightarrow \quad & f_j(t) \notin f_j(X \setminus U) \\ \Rightarrow \quad & t \notin X \setminus U \\ \Rightarrow \quad & t \in U. \end{aligned}$$

Итак $e(t) \in e(U)$ и, поэтому, $W \subseteq e(U)$. Следовательно, e - гомеоморфизм. $\square$

9.4.8 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **T_1-пространством** если каждое одноэлементное множество $\{x\}$, $x \in X$, является замкнутым.

9.4.9 Замечание. Легко проверить, что каждое Хаусдорфово пространство (т.е. T_2-пространство) является T_1-пространством. Обратное, однако, неверно. (См. Упражнение 4.1 #13 и Упражнение 1.3 #3.) В частности, каждое метризуемое пространство является T_1-пространством.

9.4.10 Следствие. Если $(X,\mathcal{T})$ в Лемме 9.4.7 является T_1-пространством, то условие (ii) следует из (iii) (то есть является лишним).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 различные точки из X. Взяв A равным замкнутому множеству $\{x_2\}$, из условия (iii) следует, что для некоторого i, $f_i(x_1) \notin \overline{\{f_i(x_2)\}}$. Следовательно $f_i(x_i) \neq f_i(x_2)$, и условие (ii) удовлетворено. □

9.4.11 Теорема. (Теорема Урысона) Каждое сепарабельное метрическое пространство (X,d) гомеоморфно некоторому подпространству Гильбертова куба.

Доказательство. Согласно Следствию 9.4.10 теорема будет доказана, если мы найдем счетное бесконечное семейство отображений $f_i\colon (X,d) \longrightarrow [0,1]$, которые (i) непрерывны и (ii) разделяют точки и замкнутые множества.

Без ограничения общности, мы можем предположить, что $d(a,b) \leq 1$, для всех a и b из X, так как каждая метрика эквивалентна некоторой метрике с этим свойством.

Так как (X,d) сепарабельно, у него есть счетное плотное подмножество $Y = \{y_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$, определим $f_i\colon X \longrightarrow [0,1]$ как $f_i(x) = d(x,y_i)$. Очевидно, что каждое из отображений f_i непрерывно.

Чтобы убедиться, что отображение $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ разделяет точки и замкнутые множества, выберем произвольные $x \in X$ и замкнутое множество A, не содержащее x. Множество $X \setminus A$ открыто и содержит x и, поэтому, содержит открытый шар B радиуса ε с центром в x, для некоторого $\varepsilon > 0$.

Далее, так как Y плотно в X, существует y_n такое, что $d(x,y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $d(y_n,a) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, для всех $a \in A$.

Итак $[0,\frac{\varepsilon}{2})$ - открытое множество в $[0,1]$, содержащее $f_n(x)$, но $f_n(a) \notin [0,\frac{\varepsilon}{2})$, для всех $a \in A$. Отсюда следует, что $f_n(A) \subseteq [\frac{\varepsilon}{2},1]$. Так как множество $[\frac{\varepsilon}{2},1]$ замкнуто, то $\overline{f_n(A)} \subseteq [\frac{\varepsilon}{2},1]$.

Следовательно $f_n(x) \notin \overline{f_n(A)}$, то есть семейство $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ разделяет точки и замкнутые множества. □

9.4.12 Следствие. Каждое компактное метризуемое пространство гомеоморфно замкнутому подпространству Гильбертова куба. □

9.4.13 Следствие. Если для каждого $i \in \mathbb{N}$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - компактное метризуемое пространство, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже компактное метризуемое пространство.

Доказательство. То что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ метризуемо, было доказано в Предложении 9.3.9. То что $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно, следует из Следствия 9.4.12 и Упражнения 9.3 #9 (ii). □

Нашей следующей задачей является проверка обращения Теоремы Урысона. Для этого мы введем новое понятие. (См. Упражнение 2.2 #4.)

9.4.14 Определение. Говорят, что топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет **второй аксиоме счетности** если топология $\mathcal{T}$ обладает счетной базой.

9.4.15 Пример. Пусть $\mathcal{B} = \{(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\mathcal{B}$ - база эвклидовой топологии на $\mathbb{R}$. (Проверьте это). Следовательно, $\mathbb{R}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. □

9.4.16 Пример. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - несчетное множество с дискретной топологией. Тогда, так как каждое одноэлементное множество должно принадлежать любой базе для $\mathcal{T}$, то $(X, \mathcal{T})$ не обладает счетной базой. А следовательно $(X, \mathcal{T})$ не удовлетворяет второй аксиоме счетности. □

9.4.17 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ индуцированная топология. $(X, \mathcal{T})$ - сепарабельно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. Пусть $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно. Тогда у него есть счетное плотное подмножество $Y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $\mathcal{B}$ состоит из всех открытых шаров (в метрике d) с центрами в y_i, для некоторого i, и радиусами $\frac{1}{n}$, некоторого натурального n. Очевидно, что $\mathcal{B}$ счетно, и мы покажем, что это база для $\mathcal{T}$.

Пусть $V \in \mathcal{T}$. Тогда для любого $v \in V$ и для некоторого n, V содержит открытый шар B, радиуса $\frac{1}{n}$, содержащий v. Так как Y плотно в X, существует $y_m \in Y$ такое, что $d(y_m, v) < \frac{1}{2n}$. Пусть B' - открытый шар с центром в y_m и радиусом $\frac{1}{2n}$. Тогда из неравенства треугольника следует, что $B' \subseteq B \subseteq V$. Также $B' \in \mathcal{B}$. Следовательно $\mathcal{B}$ - база для $\mathcal{T}$. То есть, $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.

В обратную сторону, пусть $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, а $\mathcal{B}_1 = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ - счетная база. Для каждого $B_i \neq \emptyset$, пусть b_i - некоторый элемент B_i, и пусть Z - множество всех таких b_i. Тогда Z счетно. Далее, если $V \in \mathcal{T}$, то $V \supseteq B_i$, для некоторого i, поэтому $b_i \in V$. Итак $V \cap Z \neq \emptyset$. Следовательно, Z плотно в X. А значит $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно. □

9.4.18 Замечание. Вышеприведенное доказательство показывает, что каждое пространство, удовлетворяющее удовлетворяет второй аксиоме счетности, сепарабельно даже без предположения метризуемости. Однако, в общем случае **неверно**, что сепарабельное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. (См. Упражнение 9.4 #11.)

9.4.19 Теорема. (Теорема Урысона и обратная к ней) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно и метризуемо тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно некоторому подпространству Гильбертова куба.

Доказательство. Если $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно и метризуемо, то Теорема Урысона 9.4.11 утверждает, что оно гомеоморфно некоторому подпространству Гильбертова куба.

В обратную сторону, пусть $(X, \mathcal{T})$ гомеоморфно некоторому подпространству $(Y, \mathcal{T}_1)$ Гильбертова куба I^∞. По Предложению 9.4.4, I^∞ сепарабельно. Поэтому, согласно Предложению 9.4.17, оно удовлетворяет второй аксиоме счетности. Легко проверить (Упражнение 4.1 #14), что подпространство пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, само удовлетворяет второй аксиоме счетности, следовательно, $(Y, \mathcal{T}_1)$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. Также легко проверить (Упражнение 6.1 #6), что подпространство метризуемого пространства метризуемо. Так как Гильбертов куб метризуем, по Следствию 9.3.10, его подпространство $(Y, \mathcal{T}_1)$ тоже метризуемо. То есть, $(Y, \mathcal{T}_1)$ метризуемо и удовлетворяет второй аксиоме счетности. Следовательно, оно сепарабельно. Поэтому, $(X, \mathcal{T})$ тоже сепарабельно и метризуемо. $\square$

Упражнения 9.4

1. Докажите, что непрерывный образ сепарабельного пространства сепарабелен.

2. Докажите, что если $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, - сепарабельные пространства, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - сепарабельное пространство.

3. Покажите, что если все пространства $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ в Лемме 9.4.7 Хаусдорфовы, а $(X, \mathcal{T})$ компактно, то условие (iii) леммы является лишним.

4. Покажите, что если $(X, \mathcal{T})$ счетное дискретное пространство, то оно гомеоморфно подпространству Гильбертова куба.

5. Проверьте, что $C[0, 1]$ с метрикой d, описанной в примере 6.1.5, гомеоморфно подпространству Гильбертова куба.

6. Покажите, что если $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяют второй аксиоме счетности, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже удовлетворяет второй аксиоме счетности.

7. **(Теорема Линделефа)** Докажите, что каждое открытое покрытие пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, обладает счетным подпокрытием.

8. Выведите из Теоремы 9.4.19, что каждое подпространство сепарабельного метризуемого пространства является сепарабельным и метризуемым.

9. (i) Докажите, что множество всех изолированных точек пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, счетно.

   (ii) Следовательно, покажите, что произвольное несчетное подмножество A пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, содержит по крайней мере одну предельную точку A.

10. (i) Пусть f - непрерывное отображение Хаусдорфова несепарабельного пространства $(X, \mathcal{T})$ на себя.

    Докажите, что существует собственное непустое замкнутое подмножество A из X такое, что $f(A) = A$.

    [Подсказка: Пусть $x_0 \in X$, определим множество $S = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ такое, что $x_{n+1} = f(x_n)$ для всех целых n.]

    (ii) Верен ли предыдущий результат если $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно? (Обоснуйте ваш ответ.)

11. Пусть $\mathcal{T}$ - топология, определенная на $\mathbb{R}$ в Примере 2.3.1. Докажите, что

    (i) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ сепарабельно;

    (ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

12. Говорят, что топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет **счетному условию для цепей** если каждое семейство непересекающихся открытых множеств счетно.

    (i) Докажите, что каждое сепарабельное пространство удовлетворяет счетному условию для цепей.

(ii) Пусть X - несчетное множество, а $\mathcal{T}$ счетно-замкнутая топология на X. Покажите, что $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет счетному условию для цепей, но не сепарабельно.

13. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **разбросанным** если каждое непустое подпространство X имеет изолированную точку (см. Упражнение 9.1 #2).

 (i) Проверьте, что $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и пространство Кантора не разбросаны, а любое дискретное пространство разбросано.

 (ii) Пусть $X = \mathbb{R}^2$, d - эвклидова метрика на $\mathbb{R}^2$, а d' - метрика на X, определенная как $d'(x, y) = d(x, 0) + d(0, y)$ если $x \neq y$ и $d'(x, y) = 0$ если $x = y$. Пусть $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на X метрикой d'. Метрика d' называется **Метрикой Почтового Офиса**. Топологическое пространство называется **экстремально несвязным** если замыкание любого открытого множества открыто. Топологическое пространство $(Y, \mathcal{T}_1)$ называется **посемейственно Хаусдорфовым** если для каждого дискретного подпространства $(Z, \mathcal{T}_2)$ из $(Y, \mathcal{T}_1)$ и каждой пары точек z_1, z_2 из Z, существуют непересекающиеся открытые множества U_1, U_2 из $(Y, \mathcal{T}_1)$ такие, что $z_1 \in U_1$ и $z_2 \in U_2$. Докажите следующее:

  (a) Каждая точка $(X, \mathcal{T})$, за исключением $x = 0$, является изолированной.

  (b) 0 не является изолированной точкой $(X, \mathcal{T})$.

  (c) $(X, \mathcal{T})$ - разбросанное пространство.

  (d) $(X, \mathcal{T})$ вполне несвязно.

  (e) $(X, \mathcal{T})$ не компактно.

  (f) $(X, \mathcal{T})$ не локально компактно (см. Упражнение 8.3 #1).

  (g) Мощность любого сепарабельного метрического пространства не больше, чем $\mathfrak{c}$.

  (h) $(X, \mathcal{T})$ - пример несепарабельного метризуемого пространства мощности $\mathfrak{c}$. (Заметьте, что мощность метрическое пространство (ℓ_∞, d_∞) из Упражнения 6.1 #7 (iii) также равна $\mathfrak{c}$, и оно не сепарабельно.)

  (i) Каждое дискретное пространство экстремально несвязно.

  (j) $(X, \mathcal{T})$ не является экстремально несвязным.

(k) Произведение двух разбросанных пространств разбросанно.

(l) Пусть $(S, \mathcal{T}_3)$ - подпространство $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\}$ пространства $\mathbb{R}$. Тогда S не является экстремально несвязным.

(m)* Каждое экстремально несвязное метризуемое пространство дискретно.

[Подсказка. Покажите, что каждая сходящаяся последовательность должна иметь повторяющиеся члены.]

(n) Топологическое пространство является Хаусдорфовым тогда и только тогда, когда оно T_1-пространство и является посемейственно Хаусдорфовым.

(o)* Каждое экстремально несвязное посемейственно Хаусдорфово пространство является дискретным.

9.5 Теорема Пеано

9.5.1 Замечание. В доказательстве Теоремы 9.3.8 мы показали, что Гильбертов куб I^∞ является непрерывным образом пространства Кантора $(G, \mathcal{T})$. На самом деле, каждое компактное метрическое пространство является непрерывным образом пространства Кантора. Следующее предложение является первым шагом в доказательстве этого факта.

9.5.2 Предложение. Каждое сепарабельное метризуемое пространство $(X, \mathcal{T}_1)$ является непрерывным образом некоторого подпространства пространства Кантора $(G, \mathcal{T})$. Далее, если $(X, \mathcal{T}_1)$ компактно, то это подпространство можно выбрать замкнутым в $(G, \mathcal{T})$.

Доказательство. Пусть ϕ - непрерывное отображение $(G, \mathcal{T})$ на I^∞, построенное в доказательстве Теоремы 9.3.8. По Теореме Урысона, $(X, \mathcal{T}_1)$ гомеоморфно подпространству $(Y, \mathcal{T}_2)$ пространства I^∞. Обозначим гомеоморфизм $(Y, \mathcal{T}_2)$ на $(X, \mathcal{T}_1)$ через Θ. Пусть $Z = \psi^{-1}(Y)$, а $\mathcal{T}_3$ - топология подпространства на Z. Тогда $\Theta \circ \psi$ - непрерывное отображение $(Z, \mathcal{T}_3)$ на $(X, \mathcal{T}_1)$. Поэтому, $(X, \mathcal{T}_1)$ является непрерывным образом подпространства $(Z, \mathcal{T}_3)$ пространства $(G, \mathcal{T})$.

Далее, если $(X, \mathcal{T}_1)$ компактно, то $(Y, \mathcal{T}_2)$ тоже компактно, а следовательно замкнуто в I^∞. Поэтому $Z = \psi^{-1}(Y)$ - замкнутое подмножество $(G, \mathcal{T})$, как и требовалось. $\square$

9.5.3 Предложение. Пусть $(Y, \mathcal{T}_1)$ - (непустое) замкнутое подпространство пространства Кантора $(G, \mathcal{T})$. Тогда существует непрерывное отображение пространства $(G, \mathcal{T})$ на $(Y, \mathcal{T}_1)$.

Доказательство. Пусть $(G', \mathcal{T}')$ - множество всех действительных чисел, которые можно записать в виде $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{6^i}$, где каждое $a_i = 0$ или 5, с топологией подпространства, индуцированной топологией на $\mathbb{R}$. Очевидно, что $(G', \mathcal{T}')$ гомеоморфно пространству Кантора $(G, \mathcal{T})$.

Мы можем рассматривать $(Y, \mathcal{T}_1)$ как замкнутое подпространство $(G', \mathcal{T}')$ и найти непрерывное отображение $(G', \mathcal{T}')$ на $(Y, \mathcal{T}_1)$. Прежде чем продолжить, заметим, что если $g_1 \in G'$ и $g_2 \in G'$, то $\frac{g_1+g_2}{2} \notin G'$.

Искомое отображение $\psi : (G', \mathcal{T}') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_1)$ определяется следующим образом: для $g \in G'$, $\psi(g)$ - (единственный) элемент из Y, ближайший к g в эвклидовой метрике на $\mathbb{R}$. Однако, нам надо доказать, что такой элемент существует и единственен.

Зафиксируем $g \in G'$. Тогда отображение $d_g \colon (Y, \mathcal{T}_1) \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное как $d_g(y) = |g - y|$, непрерывно. Так как $(Y, \mathcal{T}_1)$ компактно, из Предложения 7.2.15 следует, что $d_g(Y)$ обладает наименьшим элементом. То есть, существует элемент из $(Y, \mathcal{T}_1)$, ближайший к g. Предположим, что таких элементов два - y_1 и y_2. Тогда $g = \frac{y_1+y_2}{2}$. Но так как $y_1 \in G'$ и $y_2 \in G'$, как было замечено выше, $g = \frac{y_1+y_2}{2} \notin G'$, что противоречит предположению. Поэтому существует единственный элемент из Y, ближайший к g. Обозначим этот элемент через $\psi(g)$.

Очевидно, что это отображение $\psi \colon (G', \mathcal{T}') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_1)$ сюръективно, так как для каждого $y \in Y$, $\psi(y) = y$. Чтобы доказать непрерывность ψ, выберем $g \in G'$. Пусть ε - произвольное положительное действительное число. Тогда достаточно, по Следствию 6.2.4, найти $\delta > 0$ такое, что если $x \in G'$ и $|g - x| < \delta$, то $|\psi(g) - \psi(x)| < \varepsilon$.

Сначала рассмотрим случай $g \in Y$, поэтому $\psi(g) = g$. Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $x \in G'$ где $|g - x| < \delta$ мы имеем

$$\begin{aligned}
|\psi(g) - \psi(x)| &= |g - \psi(x)| \\
&\leq |x - \psi(x)| + |g - x| \\
&\leq |x - g| + |g - x|, \text{ по определению } \psi \text{ так как } g \in Y \\
&= 2|x - g| \\
&< 2\delta \\
&= \varepsilon, \text{ как и требовалось.}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $g \notin Y$, то есть, $g \neq \psi(g)$.

Без ограничения общности предположим, что $\psi(g) < g$ и положим $a = g - \psi(g)$.

Если множество $Y \cap [g,1] = \emptyset$, то $\psi(x) = \psi(g)$ для всех $x \in (g - \frac{a}{2}, g + \frac{a}{2})$.

Поэтому для $\delta < \frac{a}{2}$, мы имеем $|\psi(x) - \psi(g)| = 0 < \varepsilon$, как и требовалось.

Если $Y \cap [g,1] \neq \emptyset$, то так как $Y \cap [g,1]$ компактно, у него есть наименьший элемент $y > g$.

Действительно, по определению ψ, если $b = y - g$, то $b > a$.

Теперь выберем $\delta = \frac{b-a}{2}$.

Поэтому если $x \in G'$ где $|g - x| < \delta$, то либо $\psi(x) = \psi(g)$, либо $\psi(x) = y$. Заметим, что

$$|x - \psi(g)| \leq |x - g| + |g - \psi(g)| < \delta + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

в то время как

$$|x - y| \geq |g - y| - |g - x| \geq b - \frac{b-a}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}.$$

Поэтому, $\psi(x) = \psi(g)$.

Следовательно, $|\psi(x) - \psi(g)| = 0 < \varepsilon$, как и требовалось. То есть, ψ непрерывно. □

Из Предложений 9.5.2 и 9.5.3 мы получаем следующую Теорему Александрова и Урысона:

9.5.4 Теорема. Каждое компактное метризуемое пространство является непрерывным образом пространства Кантора. □

9.5.5 Замечание. Обращение Теоремы 9.5.4 неверно. То есть неверно, что каждый непрерывный образ пространства Канторя является компактным метризуемым пространством.(Найдите пример.) Однако, похожее утверждение верно для Хаусдорфовых пространств. Оно приводится в следующем предложении.

9.5.6 Предложение. Пусть f - непрерывное отображение компактного метрического пространства (X,d) на Хаусдорфово пространство $(Y,\mathcal{T}_1)$. Тогда $(Y,\mathcal{T}_1)$ тоже компактно и метризуемо.

Доказательство. Так как непрерывный образ компактного пространства компактен, пространство $(Y, \mathcal{T}_1)$ компактно. Так как отображение f сюръективно, мы можем определить метрику d_1 на Y следующим образом:

$$d_1(y_1, y_2) = \inf\{d(a,b) : a \in f^{-1}\{y_1\} \text{ and } b \in f^{-1}\{y_2\}\}, \text{ для всех } y_1 \text{ и } y_2 \text{ из } Y.$$

Нам надо показать, что d_1 действительно метрика. Так как $\{y_1\}$ и $\{y_2\}$ замкнуты в Хаусдорфовом пространстве $(Y, \mathcal{T}_1)$, то $f^{-1}\{y_1\}$ и $f^{-1}\{y_2\}$ замкнуты в компактном пространстве (X, d). Следовательно, множества $f^{-1}\{y_1\}$ и $f^{-1}\{y_2\}$ компактны. Поэтому произведение $f^{-1}\{y_1\} \times f^{-1}\{y_2\}$, являющееся подпространством пространства произведения $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$, тоже компактно, где $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная метрикой d.

Заметив, что $d\colon (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ - непрерывное отображение, из Предложения 7.2.15 мы заключаем, что $d(f^{-1}\{y_1\} \times f^{-1}\{y_2\})$ имеет наименьший элемент.

То есть существую элементы $x_1 \in f^{-1}\{y_1\}$ и $x_2 \in f^{-1}\{y_2\}$ такие, что

$$d(x_1, x_2) = \inf\{d(a,b) : a \in f^{-1}\{y_1\},\ b \in f^{-1}\{y_2\}\} = d_1(y_1, y_2).$$

Ясно, что если $y_1 \neq y_2$, то $f_1^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} = \emptyset$. Поэтому, $x_1 \neq x_2$ и, следовательно, $d(x_1, x_2) > 0$; то есть, $d_1(y_1, y_2) > 0$.

Легко проверить, что d_1 удовлетворяет всем остальным условиям метрики, и, поэтому, является метрикой на Y.

Пусть $\mathcal{T}_2$ - топология, индуцированная на Y метрикой d_1. Нам надо показать, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

По определению d_1, $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ конечно же непрерывно.

Заметим, что для подмножества C из Y,

C замкнутое подмножество $(Y, \mathcal{T}_1)$
$\Rightarrow f^{-1}(C)$ замкнутое подмножество $(X, \mathcal{T})$
$\Rightarrow f^{-1}(C)$ компактное подмножество$(X, \mathcal{T})$
$\Rightarrow f(f^{-1}(C))$ компактное подмножество $(Y, \mathcal{T}_2)$
$\Rightarrow C$ компактное подмножество $(Y, \mathcal{T}_2)$
$\Rightarrow C$ замкнуто в $(Y, \mathcal{T}_2)$.

Поэтому, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Аналогично можно доказать, что $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, следовательно

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

9.5.7 Следствие. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство. Оно является непрерывным образом пространства Кантора тогда и только тогда, когда оно компактно и метризуемо. □

В конце этой главы мы обратимся к кривым, заполняющим пространство.

9.5.8 Замечание. Каждый считает, что он знает, что такое "кривая". Формально, мы можем определить кривую в $\mathbb{R}^2$ как множество $f[0,1]$, где f - непрерывное отображение $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Кажется интуитивно ясным, что у кривой нет ширины, а ее площадь равна нулю. Это неверно! На самом деле существуют кривые, заполняющие пространство; то есть, у $f(I)$ ненулевая площадь. В следующей теореме показано, что существует непрерывное отображение из $[0,1]$ на пространство произведения $[0,1] \times [0,1]$.

9.5.9 Теорема. (Пеано) Для каждого натурального n, существует непрерывное отображение ψ_n отрезка $[0,1]$ на n-куб I^n.

Доказательство. По Теореме 9.5.4, существует непрерывное отображение ϕ_n пространства Кантора $(G, \mathcal{T})$ на n-куб I^n. Так как $(G, \mathcal{T})$ получается из $[0,1]$ последовательным удалением серединных третей, мы расширим ϕ_n до непрерывного отображения $\psi_n : [0,1] \longrightarrow I^n$, продолжив ψ_n линейно на каждый удаленный интервал; то есть, если (a,b) - один из интервалов, содержащих $[0,1] \setminus G$, то ψ_n определяется на (a,b) следующим образом

$$\psi_n(\alpha a + (1-\alpha)\, b) = \alpha\, \phi_n(a) + (1-\alpha)\, \phi_n(b), \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

Легко проверить, что ψ_n непрерывно. □

В заключение этой главы мы приведем (но не докажем) Теорему Хана-Мазуркевича, которая характеризует Хаусдорфовы пространства, являющиеся непрерывными образами [0,1]. [Доказательство можно найти в Wilder [33] и p. 221 of Kuratowski [20].] Нам нужно следующее определение.

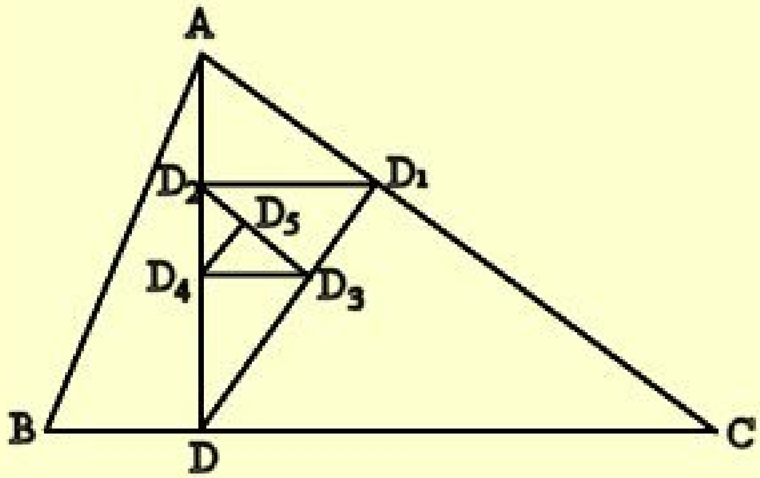
9.5.10 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **локально связным** если оно обладает базой, состоящей из связных (открытых) множеств.

9.5.11 Замечание. Каждое дискретное пространство локально связно, так же как и $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^n$, для всех $n \geq 1$. Однако, не каждое связное пространство локально связно. (См. Упражнение 8.4 #6.)

9.5.12 Теорема. (Теорема Хана-Мазуркевича) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - Хаусдорфово пространство. $(X, \mathcal{T})$ является непрерывным образом $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда оно компактно, связно, локально связно и метризуемо.

Упражнения 9.5

1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ - множество точек треугольника ABC, в котором угол A прямой, а $AC > AB$. В этом упражнении дается набросок построения непрерывного сюръективного отображения $f : [0,1] \to S$.



Пусть точка D из BC такая, что AD перпендикулярно BC. Пусть $a = \cdot a_1a_2a_3\ldots$ - двоичное число, так что каждое из a_n есть 0 или 1. Мы построим последовательность (D_n) точек из S следующим образом : D_1 - основание перпендикуляра, опущенного из D на гипотенузу большего или меньшего из треугольников ADB, ADC в зависимости от $a_1 = 1$ или 0, соответственно. Эта конструкция повторяется с использованием D_1 вместо D и подходящим треугольником ADB, ADC вместо ABC. Например, на рисунке вверху показаны точки от D_1 до D_5 для двоичного числа $.1010\ldots$. Дайте строгое индуктивное определение последовательности(D_n) и докажите, что

(i) последовательность (D_n) сходится к некоторому пределу $D(a)$ в S;

(ii) если $\lambda \in [0,1]$ представлена различными двоичными числами a, a', то $D(a) = D(a')$; следовательно, точка $D(\lambda)$ из S определена однозначно;

(iii) если $f\colon [0,1] \to S$ определено как $f(\lambda) = D(\lambda)$, то f сюръективно;

(iv) f непрерывно.

2. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - пространство Кантора. Рассмотрим отображения

$$\phi_i\colon (G, \mathcal{T}) \to [0,1],\ \ i = 1, 2,$$

где

$$\phi_1\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right]=\frac{a_1}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2n-1}}{2^{n+1}}+\ldots$$

и

$$\phi_2\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right]=\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_4}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2n}}{2^{n+1}}+\ldots.$$

(i) Докажите, что ϕ_1 и ϕ_2 непрерывны.

(ii) Докажите, что отображение $a \mapsto \langle \phi_1(a), \phi_2(a)\rangle$ является непрерывным отображением $(G, \mathcal{T})$ на $[0,1]\times[0,1]$.

(iii) Если a и $b \in (G, \mathcal{T})$, а $(a,b)\cap G = \emptyset$, определим для $j = 1, 2$,

$$\phi_j(x) = \frac{b-x}{b-a}\,\phi_j(a) + x - ab - a\,\phi_j(b), \qquad a \le x \le b.$$

Покажите, что

$$x \mapsto \langle \phi_1(x), \phi_2(x)\rangle$$

- непрерывное отображение $[0,1]$ на $[0,1]\times[0,1]$, каждая точка из $[0,1]\times[0,1]$ является образом самое большее трех точек из $[0,1]$.

9.6 Заключение

В этой главе мы расширили понятие произведения топологических пространств на случай счетного числа пространств. Несмотря на естественность этого шага, мы получили богатую коллекцию результатов, некоторые из которых весьма неожиданны.

Мы доказали, что счетное произведение топологических пространств со свойством $\mathcal{P}$ тоже обладает свойством $\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ одно из следующих свойств: (i) T_0-пространство (ii) T_1-пространство (iii) Хаусдорфовость (iv) метризуемость (v) связность (vi) вполне несвязность (vii) удовлетворяет второй аксиоме счетности. Это также верно когда $\mathcal{P}$ означает компактность, это Теорема Тихонова для счетных произведений. Доказательство счетной теоремы Тихонова для метризуемых пространств, приведенное в этой главе, сильно отличается от стандартного доказательства, приведенного в следующей главе. Наше доказательство использовало пространство Кантора.

Пространство Кантора было определено как некоторое подпространство отрезка $[0, 1]$. Позже было показано, что оно гомеоморфно счетно бесконечному произведению 2-точечных дискретных пространств. На первый взгляд, пространство Кантора кажется патологическим примером, которые так любят "чистые"математики для построения контрпримеров. Но оно оказывается гораздо большим.

Теорема Александрова-Урысона утверждает, что каждое компактное метризуемое пространство является непрерывным образом пространства Кантора. В частности, $[0, 1]$ и Гильбертов куб (счетное произведение копий $[0, 1]$) является непрерывным образом пространства Кантора. А отсюда следует существование кривых, заполняющих пространство – в частности, мы показали, что существует непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на куб $[0, 1]^n$, для каждого натурального n. Мы сформулировали, но не доказали, Теорему Хана-Мазуркевича: Хаусдорфово пространство $(X, \mathcal{T})$ является непрерывным образом $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда оно компактно, связно, локально связно и метризуемо.

И наконец, мы упоминаем Теорему Урысона, которая утверждает, что пространство является сепарабельным и метризуемым тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству Гильбертова куба. Это показывает, что $[0,1]$ не только ‘‘хорошее’’ топологическое пространство, но и ‘‘генератор’’ важного класса сепарабельных метризуемых пространств посредством взятия подпространств и образования счетных произведений.

Глава 10

Теорема Тихонова

Введение

В Главе 9 мы определили произведение счетно бесконечного семейства топологических пространств. Теперь мы определим произведение произвольного семейства топологических пространств, заменив множество $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ на произвольное множество индексов I. Центральным результатом этой главы является Теорема Тихонова для общего случая.

10.1 Топология Произведения в Общем Случае

10.1.1 Определения. Пусть I - некоторое множество, и пусть для каждого $i \in I$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ - топологическое пространство. Мы будем записывать индексированное семейство топологических пространств как $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$. **Произведение** (или **декартово произведение**) семейства множеств $\{X_i : i \in I\}$ обозначается посредством $\prod_{i\in I} X_i$, и состоит из множества всех функций $f\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ таких, что $f_i = x_i \in X_i$. Мы будем обозначать элемент f произведения через $\prod_{i\in I} x_i$, и ссылаться на $f(i) = x_i$ как i-ую координату.

Если $I = \{1,2\}$ то $\prod_{i\in\{1,2\}} X_i$ является множеством всех функций $f\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$ таких, что $f(1) \in X_1$ и $f(2) \in X_2$. Легко видеть, что $\prod_{i\in\{1,2\}} X_i$ "изоморфно" $X_1 \times X_2$. Аналогично, если $I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то $\prod_{i\in I} X_i$ "изоморфно" определенному ранее $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Пространство произведения, обозначаемое как $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$, состоит из множества произведения $\prod_{i\in I} X_i$ с топологией $\mathcal{T}$, имеющей в качестве базы семейство

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i\in I} O_i : O_i \in \mathcal{T}_i \text{ и } O_i = X_i, \text{ для всех, кроме конечного числа } i \right\}.$$

Топология $\mathcal{T}$ называется **топологией произведения** (или **Тихоновской топологией**).

10.1.2 Замечание. Хотя мы определили $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ слегка иначе, чем для счетного и конечного случая, вам необходимо убедиться, что когда I конечно или счетно, новое определение эквивалентно предыдущему. Многие утверждения, верные для счетных произведений, могут быть доказаны похожим образом для произвольных произведений. Ниже мы приводим такие результаты без доказательств. Они оставляются читателю в качестве упражнений.

10.1.3 Предложение. Пусть I - некоторое множество, и пусть для $i \in I$, C_i - замкнутое подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T}_i)$. Тогда $\prod_{i \in I} C_i$ - замкнутое подмножество пространства $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$. □

10.1.4 Предложение. Пусть I - некоторое множество, и пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - семейство топологических пространств с пространством произведения $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$. Если для каждого $i \in I$, B_i - база для $\mathcal{T}_i$, то

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{i \in I} O_i : O_i \in B_i \text{ and } O_i = X_i \text{ для всех кроме конечного числа } i \right\}$$

является базой для $\mathcal{T}$. □

10.1.5 Предложение. Пусть I - некоторое множество, и пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ семейство топологических пространств с пространством произведения $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$. Для каждого $j \in I$, пусть $p_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ - отображение проекции; то есть, $p_j(\prod_{i \in I} x_i) = x_j$, для всех $\prod_{i \in I} x_i \in \prod_{i \in I} X_i$. Тогда

(i) каждое из p_j является непрерывным сюръективным открытым отображением, и

(ii) $\mathcal{T}$ наиболее сильная топология на множестве $\prod_{i \in I} X_i$ такая, что каждое из p_j непрерывно. □

10.1.6 Предложение. Пусть I - некоторое множество, и пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ семейство топологических пространств с пространством произведения $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$. Тогда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ гомеоморфно подпространству $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$. □

10.1.7 Предложение. Пусть I - некоторое множество, и пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ и $\{(Y_i, \mathcal{T}'_i) : i \in I\}$ - семейства топологических пространств. Если $h_i \colon (X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{T}'_i)$ - непрерывное отображение, для каждого $i \in I$, то $h \colon \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow \prod_{i \in I}(Y_i, \mathcal{T}'_i)$ - непрерывно, где $h(\prod_{i \in I} x_i) = \prod_{i \in I} h_i(x_i)$. □

10.1.8 Предложение. Пусть I - некоторое множество, и пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ семейство топологических пространств, а f - отображение их топологического пространства $(Y, \mathcal{T})$ в $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда каждое из отображений $p_i \circ f : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ непрерывно, где p_i, $i \in I$, обозначает отображение проекции из $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ на $(X_i, \mathcal{T}_i)$. □

10.1.9 Лемма. (Лемма Вложения) Пусть I - некоторое множество индексов, $\{(Y_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - семейство топологических пространств и пусть для каждого $i \in I$, f_i - отображение топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ в $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Далее, пусть $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{i \in I}(Y_i, \mathcal{T}_i)$ - **оценочное отображение**; то есть, $e(x) = \prod_{i \in I} f_i(x)$, для всех $x \in X$. Тогда e является гомеоморфизмом пространства $(X, \mathcal{T})$ на пространство $(e(X), \mathcal{T}')$, где $\mathcal{T}'$ - топология подпространства на $e(X)$, если выполняются следующие условия:

(i) каждое из f_i непрерывно.

(ii) семейство $\{f_i : i \in I\}$ **разделяет точки** пространства X; то есть, если x_1 и x_2 из X, где $x_1 \neq x_2$, то для некоторого $i \in I, f_i(x_1) \neq f_1(x_2)$, и

(iii) семейство $\{f_i : i \in I\}$ **разделяет точки и замкнутые множества**; то есть, для произвольных $x \in X$ и замкнутого множества A из $(X, \mathcal{T})$, не содержащего x, $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$, для некоторого $i \in I$. □

10.1.10 Следствие. Если $(X, \mathcal{T})$ в Лемме 10.1.9 является T_1-пространством, то условие (ii) леммы является лишним. □

10.1.11 Определения. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}')$ - топологические пространства. Говорят, что $(X, \mathcal{T})$ может быть **вложено** в $(Y, \mathcal{T}')$ если существует непрерывное отображение $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ такое, что $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (f(X), \mathcal{T}'')$ - гомеоморфизм, где $\mathcal{T}''$ - топология подпространства на $f(X)$, индуцированная топологией на $(Y, \mathcal{T}')$. Отображение $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ называется **вложением**.

Упражнения 10.1

1. Для каждого $i \in I$ из некоторого множества индексов, пусть $(A_i, \mathcal{T}'_i)$ есть подпространство $(X_i, \mathcal{T}_i)$.

   (i) Докажите, что $\prod_{i \in I}(A_i, \mathcal{T}'_i)$ является подпространством $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$.

   (ii) Докажите, что $\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}$.

   (iii) Докажите, чтот $\mathrm{Int}(\prod_{i \in I} A_i) \subseteq \prod_{i \in I}(\mathrm{Int}(A_i))$.

   (iv) Приведите пример, в котором включение из (iii) строгое.

2. Пусть J - некоторое множество индексов, и для каждого $j \in J$, $(G_j, \mathcal{T}_j)$ - топологическое пространство, гомеоморфное пространству Кантора, а I_j - топологическое пространство, гомеоморфное $[0, 1]$. Докажите, что $\prod_{j \in J} I_j$ - непрерывный образ пространства $\prod_{j \in J}(G_j, \mathcal{T}_j)$.

3. Пусть $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ - произвольное бесконечное семейство сепарабельных метризуемых пространств. Докажите, что $\prod_{j \in J}(X_j, \mathcal{T}_j)$ - гомеоморфно подпространству пространства $\prod_{j \in J} I_j^\infty$, где каждое из I_j^∞ гомеоморфно Гильбертову кубу..

4. (i) Пусть J - произвольное бесконечное семейство индексов, а $\{(X_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j}) : i \in \mathbb{N}$ и $j \in J\}$ - семейство гомеоморфных топологических пространств. Докажите, что

$$\prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in\mathbb{N}}(X_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j})\right) \cong \prod_{j\in J}(X_{1,j}, \mathcal{T}_{1,j}).$$

(ii) Пусть для каждого $j \in J$ из произвольного бесконечного семейства индексов пространство $(A_j, \mathcal{T}'_j)$ гомеоморфно дискретному пространству $\{0, 2\}$, а $(G_j, \mathcal{T}_j)$ гомеоморфно пространству Кантора. Выведите из (i), что

$$\prod_{j\in J}(A_j, \mathcal{T}'_j) \cong \prod_{j\in J}(G_j, \mathcal{T}_j).$$

(iii) Пусть для каждого $j \in J$ из произвольного бесконечного семейства индексов пространство I_j гомеоморфно $[0, 1]$, а I_j^∞ гомеоморфно Гильбертову кубу I^∞. Выведите из (i), что

$$\prod_{j\in J} I_j \cong \prod_{j\in J} I_j^\infty.$$

(iv) Пусть J, I_j, I_j^∞ и $(A_j, \mathcal{T}'_j)$ такие же как в (ii) и (iii). Докажите, что $\prod_{j\in J} I_j$ и $\prod_{j\in J} I_j^\infty$ являются непрерывными образами пространства $\prod_{j\in J}(A_j, \mathcal{T}'_j)$.

(v) Пусть J и I_j такие же, как в (iii). Выведите из $\#3$ и (iii), что если для каждого $j \in J$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ - сепарабельное метризуемое пространство, то $\prod_{j\in J}(X_j, \mathcal{T}_j)$ гомеоморфно некоторому подпространству $\prod_{j\in J} I_j$.

10.2 Лемма Цорна

Нашей следующей задачей является доказательство Теоремы Тихонова в общем случае, которая утверждает, что произвольное произведение компактных пространств компактно. Однако, в доказательстве мы используем Лемму Цорна, которая требует предварительного обсуждения.

10.2.1 Определения. **Частичный порядок** на множестве X это бинарное отношение, обозначаемое как $\leq$, которое удовлетворяет следующим условиям:

(i) $x \leq x$, для всех $x \in X$ (**рефлексивность**)

(ii) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$, для $x, y \in X$ (**антисимметричность**), и

(iii) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$, для$x, y, z \in X$ (**транзитивность**)

Множество X с частичным порядком $\leq$ называется **частично упорядоченным множеством** и обозначается как $(X, \leq)$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то мы пишем $x < y$.

10.2.2 Примеры. Прототипом частично упорядоченных множеств является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с обычным порядком.

Аналогично, множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ с обычными порядками являются частично упорядоченными множествами. □

10.2.3 Пример. Пусть $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, и пусть $\leq$ определено следующим образом:

$$n \leq m \quad \text{if} \quad n \text{ делит } m$$

Так, например, $3 \leq 6$, но $3 \not\leq 5$. (Проверка того, что $\mathbb{N}$ с этим порядком является частично упорядоченным множеством, оставляется читателю в качестве упражнения.) □

10.2.4 Пример. Пусть X - класс всех подмножеств некоторого множества U. Мы можем определить частичный порядок на X следующим образом

$$A \leq B \quad \text{если} \quad A \text{ подмножество } B$$

где A и B из X.

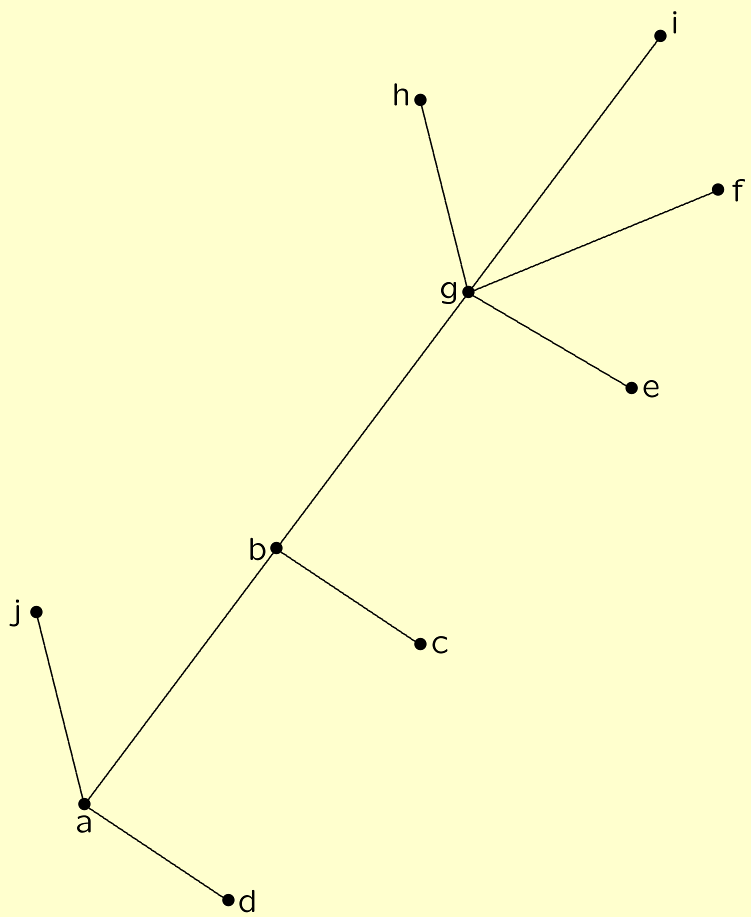
Легко проверить, что это частичный порядок. □

10.2.5 Пример. Пусть $(X, \leq)$ - частично упорядоченное множество. Мы можем определить новый частичный порядок $\leq^*$ на X положив

$$x \leq^* y \quad \text{if} \quad y \leq x.$$

□

10.2.6 Пример. Существует удобный способ изображения частично упорядоченных множеств посредством диаграмм.



Элемент x меньше элемента y тогда и только тогда, когда из x можно достичь y, двигаясь вверх по отрезкам. Например, в нашей диаграмме

$$a < b,\ a < g,\ a < h,\ a < i,\ a < j,\ a < f,\ b < g,\ b < h,$$
$$b < i,\ b < f,\ c < b,\ c < f,\ c < g,\ c < h,\ c < i,\ d < a,\ d < b,$$
$$d < g,\ d < h,\ d < f,\ d < i,\ d < j,\ e < f,\ e < g,\ e < h,\ e < i,$$
$$f < g,\ f < h,\ g < h,\ g < i.$$

Однако $d \nleq c$, $c \nleq d$, $e \nleq f$, $f \nleq e$, итп. □

10.2.7 Определение. Элементы x и y из частично упорядоченного множества $(X, \leq)$ называются **сравнимыми** если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

10.2.8 Замечание. На диаграмме вверху мы видели, что элементы d и c не сравнимы. Также e и f тоже не сравнимы.

В $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ с обычными порядками любые два элемента сравнимы.

В Примере 10.2.4, 3 и 5 не сравнимы. □

10.2.9 Определения. Частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ называется **линейно упорядоченным** если в нем любые два элемента сравнимы. В этом случае порядок $\leq$ называется **линейным порядком**.

10.2.10 Примеры. Обычные порядки на $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ являются линейными.

Частичный порядок из Примера 10.2.4 не является линейным (если U имеет по крайней мере два элемента). □

10.2.11 Определение. Пусть $(X, \leq)$ - частично упорядоченное множество. Элемент $s \in X$ называется **наибольшим элементом** множества X если $x \leq s$, для всех $x \in X$.

10.2.12 Определение. Пусть $(X, \leq)$ - частично упорядоченное множество, а Y - подмножество X. Элемент $t \in X$ называется **верхней границей** для Y если $y \leq t$, для всех $y \in Y$.

Важно отметить, что верхняя граница для Y не обязательно должна принадлежать Y.

10.2.13 Определение. Пусть $(X, \leq)$ - частично упорядоченное множество. Элемент $w \in X$ называется **максимальным** если из $w \leq x$, где $x \in X$, следует $w = x$.

10.2.14 Замечание. Важно различать понятия максимального и наибольшего элементов. Рассмотрим диаграмму из Примера 10.2.6. В ней нет наибольшего элемента! Однако, j, h, i и f являются максимальными элементами. □

10.2.15 Замечание. Мы теперь в состоянии сформулировать Лемму Цорна. Несмотря на название "Лемма", это, на самом деле аксиома, которую можно принять без доказательства. Она эквивалентна некоторым другим аксиомам теории множеств, как, например, Аксиоме Выбора или Теорема о Вполне-упорядоченности. [См., например, Halmos [13] или Wilder [33].] Мы принимаем Лемму Цорна как одну из аксиом теории множеств и будем свободно пользоваться ею.

10.2.16 Аксиома. (Лемма Цорна) Пусть $(X, \leq)$ - непустое частично упорядоченное множество в котором каждое линейно упорядоченное подмножество обладает верхней границей. Тогда в $(X, \leq)$ есть максимальный элемент.

10.2.17 Пример. Давайте применим Лемму Цорна к диаграмме из Примера 10.2.6. Она содержит несколько линейно упорядоченных подмножеств:

$$\{i, g, b, a\},\ \{g, b, a\},\ \{b, a\},\ \{g, b\},\ \{i, g\},\ \{a\},\ \{b\},$$
$$\{g\},\ \{i\},\ \{i, b, a\},\ \{i, g, a\},\ \{i.a\},\ \{g, a\},\ \{h, g, e\},$$
$$\{h, e\},\ \{g, e\},\ \text{etc.}$$

Каждое из них обладает верхней границей $--\ i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, h, h, h,$ итп. Лемма Цорна утверждает, что должен быть максимальный элемент. На самом деле, в этом множестве 4 максимальных элемента - j, h, f и i. □

Упражнения 10.2

1. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$. Нарисуйте диаграмму для частично упорядоченного множества $(X, \leq)$ где

$$v < a,\ v > b,\ v < c,\ v < d,\ v < e,\ v < f,\ v < u,$$
$$a < c,\ a < d,\ a < e,\ a < f,\ a < u,$$
$$b < c,\ b > d,\ b < e,\ b < f,\ b < u,$$
$$c < d,\ c < e,\ c < f,\ c < u,$$
$$d < e,\ d < f,\ d < u,$$
$$e < u,\ f < u.$$

2. В Примере 10.2.3 укажите, которые из следующих подмножеств $\mathbb{N}$ линейно упорядочены:

(a) $\{21, 3, 7\}$;

(b) $\{3, 6, 15\}$;

(c) $\{2, 6, 12, 72\}$;

(d) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$;

(e) $\{5\}$.

3. Пусть $(X, \leq)$ - линейно упорядоченное множество. Докажите, что если x и y - максимальные элементы X, то $x = y$.

4. Пусть $(X, \leq)$ - частично упорядоченное множество. Докажите, что если x и y - наибольшие элементы X, то $x = y$.

5. Пусть $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ частично упорядоченно следующим образом:

$$x \leq y \quad \text{если } y \text{ кратно } x.$$

Нарисуйте диаграмму и найдите все максимальные элементы $(X, \leq)$. Есть ли в $(X, \leq)$ наибольший элемент?

6.* Используя Лемму Цорна докажите, что у каждого векторного пространства V есть базис.
[Подсказка: (i) Сначала рассмотрите случай $V = \{0\}$.

(ii) Предположите, что $V \neq \{0\}$ и определите

$$\mathcal{B} = \{B : B \text{ множество линейно независимых векторов из } V.\}$$

Докажите, что $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(iii) Определите частичный порядок $\leq$ на $\mathcal{B}$ следующим образом

$$B_1 \leq B_2 \text{ если } B_1 \subseteq B_2.$$

Пусть $\{B_i : i \in I\}$ - произвольное линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{B}$. Докажите, что $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ - линейно независимое множество векторов из V.

(iv) Выведите, что $A \in \mathcal{B}$ и является верхней границей для $\{B_i : i \in I\}$.

(v) Используйте Лемму Цорна чтобы показать существование максимального элемента в $\mathcal{B}$. Докажите, что этот максимальный элемент является базисом для V.]

10.3 Теорема Тихонова

10.3.1 Определение. Пусть X - некоторое множество, а $\mathcal{F}$ - некоторое семейство подмножеств X. Говорят, что $\mathcal{F}$ обладает **свойством конечных пересечений** если для любого конечного числа $F_1, F_2, \ldots, F_n$ членов $\mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$.

10.3.2 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Пространство $(X, \mathcal{T})$ компактно тогда и только тогда, когда каждое семейство $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств X со свойством конечных пересечений удовлетворяет $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что каждое семейство $\mathcal{F}$, замкнутых подмножеств X со свойством конечных пересечений, удовлетворяет $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. И пусть $\mathcal{U}$ - произвольное открытое покрытие X. Пусть $\mathcal{F}$ семейство дополнений членов из $\mathcal{U}$. Каждое из $F \in \mathcal{F}$ замкнуто в $(X, \mathcal{T})$. Так как $\mathcal{U}$ - открытое покрытие X, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Тогда по нашему предположению, $\mathcal{F}$ не удовлетворяет свойству конечных пересечений. Поэтому, для некоторых $F_1, F_2, \ldots, F_n$ из $\mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$. Поэтому, $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n = X$, где $U_i = X \setminus F_i$, $i = 1, \ldots, n$. То есть, $\mathcal{U}$ обладает конечным подпокрытием. Следовательно, $(X, \mathcal{T})$ компактно.

Обратное утверждение доказывается аналогично. □

10.3.3 Лемма. Пусть X - некоторое множество, а $\mathcal{F}$ - семейство подмножеств X, обладающее свойством конечных пересечений. Тогда существует максимальное семейство подмножеств X, содержащее $\mathcal{F}$, и обладающее свойством конечных пересечений.

Доказательство. Пусть Z - семейство всех семейств подмножеств множества X, содержащих $\mathcal{F}$, и обладающих свойством конечных пересечений. Определим частичный порядок $\leq$ на Z следующим образом: если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ из Z, то положим $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ если $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Пусть Y - произвольное линейно упорядоченное подмножество семейства Z. Чтобы применить Лемму Цорна, нам надо проверить, что у Y есть верхняя граница. Мы утверждаем, что $\bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$ - верхняя граница Y. Очевидно это множество содержит $\mathcal{F}$, поэтому надо только показать, что оно удовлетворяет свойству конечных пересечений. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$. Тогда каждое $S_i \in \mathcal{Y}_i$, для некоторого $\mathcal{Y}_i \in Y$. Так как Y линейно упорядочено, одно из $\mathcal{Y}_i$ содержит все остальные. Таким образом, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ все принадлежат этому $\mathcal{Y}_i$. Так как $\mathcal{Y}_i$ удовлетворяет свойству конечных пересечений, $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \neq \emptyset$. Следовательно, $\bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$ удовлетворяет свойству конечных пересечений и, поэтому, является верхней границей в X множества Y. По Лемме Цорна, Z обладает максимальным элементом. $\square$

Мы теперь в состоянии доказать наиболее общую Теорему Тихонова.

10.3.4 Теорема. (Теорема Тихонова) Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - произвольное семейство топологических пространств. Пространство $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно.

Доказательство. В доказательстве мы воспользуемся Предложением 10.3.2. Пусть $\mathcal{F}$ - произвольное семейство замкнутых подмножеств X, удовлетворяющи свойству конечных пересечений. Нам надо показать, что $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

По Лемме 10.3.3 существует максимальное семейство $\mathcal{H}$ (не обязательно замкнутых) подмножеств $(X, \mathcal{T})$, содержащих $\mathcal{F}$, и удовлетворяющих свойству конечных пересечений. Нам надо доказать, что $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{H} \neq \emptyset$, откуда следует требуемый результат $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, так как каждое из $F \in \mathcal{F}$ замкнуто.

По выбору $\mathcal{H}$, если $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$, для всех $n \in \mathbb{N}$, то множество $H' = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n \in \mathcal{H}$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup \{H'\}$. Оно содержит $\mathcal{H}$, содержит $\mathcal{F}$ и удовлетворяет свойству конечных пересечений. В силу максимальности $\mathcal{H}$ оно совпадает с ним. Поэтому, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ и $H' = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n \in \mathcal{H}$.

Пусть S - произвольное подмножество множества X такое, что пересекается нетривиально с каждым членом $\mathcal{H}$. Мы утверждаем, что $\mathcal{H} \cup \{S\}$ удовлетворяет свойству конечных пересечений. Пусть $H_1', H_2', \ldots, H_m'$ - произвольные члены $\mathcal{H}$. Нам надо показать, что $S \cap H_1' \cap H_2' \cap \ldots H_m' \neq \emptyset$. Согласно предыдущему абзацу, $H_1' \cap H_2' \cap \ldots H_m' \in \mathcal{H}$. Поэтому по предположению, $S \cap (H_1' \cap H_2' \cap \ldots H_m') \neq \emptyset$. Следовательно $\mathcal{H} \cup \{S\}$ удовлетворяет свойству конечных пересечений и содержит $\mathcal{F}$. Опять используя максимальность $\mathcal{H}$, мы видим, что $S \in \mathcal{H}$.

Зафиксируем $i \in I$, и пусть $p_i : \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ - отображение проекции. Тогда семейство $\{p_i(H) : H \in \mathcal{H}\}$ удовлетворяет свойству конечных пересечений. Следовательно, семейство $\{\overline{p_i(H)} : H \in \mathcal{H}\}$ тоже удовлетворяет свойству конечных пересечений. Так как $(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно, $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{p_i(H)} \neq \emptyset$. Для каждого $i \in I$ мы можем найти точку $x_i \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{p_i(H)}$. Положим $x = \prod_{i \in I} x_i \in X$.

Мы покажем, что $x \in \bigcap_{h \in \mathcal{H}} \overline{H}$. Пусть O - произвольное открытое множество, содержащее x. Тогда O содержит открытую базовую окрестность точки x вида $\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(U_i)$, где $U_i \in \mathcal{T}_i$, $x_i \in U_i$, а J - конечное подмножество I. Так как $x_i \in \overline{p_i(H)}$, $U_i \cap p_i(H) \neq \emptyset$, для всех $H \in \mathcal{H}$. Поэтому $p_i^{-1}(U_i) \cap H \neq \emptyset$, для всех $H \in \mathcal{H}$. Согласно вышеприведенному наблюдению, отсюда следует, что $p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{H}$, для всех $i \in J$. Так как $\mathcal{H}$ удовлетворяет свойству конечных пересечений, $\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(U_1) \cap H \neq \emptyset$, для всех $H \in \mathcal{H}$. Поэтому, $O \cap H \neq \emptyset$ для всех $H \in \mathcal{H}$. Следовательно, $x \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{H}$, как и требовалось.

В обратную сторону, если $\prod_{I \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно, то по Предложениям 7.2.1 и 10.1.5 (i) каждое из $(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно. $\square$

10.3.5 Обозначение. Пусть A - произвольное множество, и пусть для каждого $a \in A$ топологическое пространство $(I_a, \mathcal{T}_a)$ гомеоморфно $[0,1]$. Пространство произведения $\prod_{a \in A}(I_a, \mathcal{T}_a)$ мы будем обозначать через I^A и называть его **кубом**.

Заметим, что $I^{\mathbb{N}}$ - Гильбертов куб, который мы обозначаем через I^∞.

10.3.6 Следствие. Для произвольного множества A, куб I^A компактен.

10.3.7 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство. Тогда оно гомеоморфно подпространству куба I^X.

Доказательство. Без ограничения общности, предположим, что $d(a, b) \le 1$ для всех a и b из X. Для каждого $a \in X$, пусть f_a - непрерывное отображение (X, d) в $[0, 1]$, определенное как

$$f_a(x) = d(x, a).$$

Легко показать, что семейство $\{f_a : a \in X\}$ разделяет точки и замкнутые множества (см. доказательство Теоремы 9.4.11). Поэтому, согласно Следствию 10.1.10 Леммы Вложения, (X, d) гомеоморфно подпространству куба I^X. $\square$

Этот результат наводит нас на вопрос: Какие из топологических пространств гомеоморфны подпространствам кубов? Сейчас мы займемся этим вопросом.

10.3.8 Определения. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **вполне регулярным** если для каждой точки $x \in X$ и каждого открытого множества $U \ni x$, существует непрерывная функция $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in X \setminus U$. Если $(X, \mathcal{T})$ к тому же Хаусдорфово, то оно называется **пространством Тихонова** (или $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством).

10.3.9 Предложение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная на X метрикой d. Тогда $(X, \mathcal{T})$ - пространство Тихонова.

Доказательство. Пусть $a \in X$, а U - произвольное открытое множество, содержащее a. Тогда, для некоторого $\varepsilon > 0$, U содержит открытый шар с центром в a и радиусом ε. Определим $f : (X, d) \longrightarrow [0, 1]$ следующим образом

$$f(x) = \min\left\{1, \frac{d(x,a)}{\varepsilon}\right\}, \qquad \text{для } x \in X.$$

Тогда f непрерывно, $f(a) = 0$ и $f(y) = 1$, для всех $y \in X \setminus U$. Так как (X, d) к тому же Хаусдорфово, оно является пространством Тихонова. □

10.3.10 Следствие. Пространство $[0, 1]$ является Тихоновским пространством. □

10.3.11 Предложение. Если $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - семейство вполне регулярных пространств, то $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ вполне регулярно.

Доказательство. Пусть $a = \prod_{i \in I} a_i \in \prod_{i \in I} X_i$, а U - произвольное открытое множество, содержащее a. Тогда существуют конечное подмножество J множества I и множества $U_i \in \mathcal{T}_i$ такие, что

$$a \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq U$$

где $U_i = X_i$ для всех $i \in I \setminus J$. Так как $(X_j, \mathcal{T}_j)$ вполне регулярно для каждого $j \in J$, существует непрерывное отображение $f_j : (X_j, \mathcal{T}_j) \longrightarrow [0, 1]$ такое, что $f_j(a_j) = 0$ и $f_j(y) = 1$, для всех $y \in X_j \setminus U_j$. Рассмотрим $f_j \circ p_j \colon \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow [0, 1]$, где p_j означает проекцию $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ на $(X_j, \mathcal{T}_j)$.

Если мы определим $f(x) = \max\{f_j \circ p_j(x) \colon j \in J\}$, для всех $x \in \prod_{i \in I} X_i$, то $f : \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow [0, 1]$ непрерывно (так как J конечно). Далее, $f(a) = 0$, а $f(y) = 1$ для всех $y \in X \setminus U$. Поэтому, $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ вполне регулярно. □

Следующее предложение легко доказывается и поэтому оставляется в качестве упражнения.

10.3.12 Предложение. Если $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - произвольное семейство Хаусдорфовых пространств, то $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - Хаусдорфово пространство.

Доказательство. Упражняйтесь. □

10.3.13 Следствие. Если $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - произвольное семейство Тихоновских пространств, то $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ - Тихоновское пространство. □

10.3.14 Следствие. Для произвольного множества X, куб I^X является Тихоновским пространством. □

10.3.15 Предложение. Подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.

Доказательство. Упражняйтесь. □

10.3.16 Следствие. Подпространство Тихоновского пространства является Тихоновским.

Доказательство. Упражняйтесь. □

10.3.17 Предложение. Если $(X, \mathcal{T})$ - произвольное Тихоновское пространство, то оно гомеоморфно подпространству некоторого куба.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ - семейство всех непрерывных отображений $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0,1]$. Как легко следует из Следствия 10.1.10 к Лемме Вложения и определения вполне регулярности, оценочное отображение $e\colon (X, \mathcal{T}) \to I^{\mathcal{F}}$ является вложением. □

Теперь мы в состоянии охарактеризовать подпространства кубов. Сопоставив Предложение 10.3.17 и Следствия 10.3.14 и 10.3.16, мы получаем:

10.3.18 Предложение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ может быть вложено в куб тогда и только тогда, когда оно является Тихоновским. □

10.3.19 Замечание. Теперь нашей целью является показать, что класс Тихоновских пространств достаточно большой, в частности, содержит все компактные Хаусдорфовы пространства.

10.3.20 Определения. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **нормальным пространством** если для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B, существуют открытые множества U и V такие, что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$. Хаусдорфово нормальное пространство называется **T_4-пространством**.

10.3.21 Замечание. В Упражнении 6.1 #9 было отмечено, что каждое метризуемое пространство является нормальным. Чуть позже мы убедимся в том, что каждое компактное Хаусдорфово пространство является нормальным. Сначала мы докажем, что каждое нормальное Хаусдорфово пространство является Тихоновским (то есть, каждое T_4-пространство является $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством)

10.3.22 Теорема. (Лемма Урысона) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Пространство $(X, \mathcal{T})$ нормально тогда и только тогда, когда для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B из $(X, \mathcal{T})$ существует непрерывная функция $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0,1]$ такая, что $f(a) = 0$ для всех $a \in A$, а $f(b) = 1$ для всех $b \in B$.

Доказательство. Предположим, что для всех A и B существует такая функция f. Тогда $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ и $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ открыты в $(X, \mathcal{T})$ и удовлетворяют условиям $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $A \cap B = \emptyset$. Следовательно, $(X, \mathcal{T})$ нормально.

В обратную сторону, предположим, что $(X, \mathcal{T})$ нормально. Мы построим семейство $\{U_i : i \in D\}$ открытых подмножеств X, где множество D определяется как $D = \left\{\frac{k}{2^n} : k = 1, 2, \ldots, 2^n,\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Таким образом, D множество двоичных рациональных чисел такое, что $A \subseteq U_i$, $U_i \cap B = \emptyset$ и $d_1 \leq d_2$ влекут $U_{d_1} \subseteq U_{d_2}$. Так как $(X, \mathcal{T})$ нормально, для каждой пары A, B непересекающихся замкнутых множеств, существуют непересекающиеся открытые множества $U_{\frac{1}{2}}$ и $V_{\frac{1}{2}}$ такие, что $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ и $B \subseteq V_{\frac{1}{2}}$. Итак, мы имеем, что $A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq V_{\frac{1}{2}}^C \subseteq B^C$ где значок C означает дополнение в X (то есть, $V_{\frac{1}{2}}^C = X \setminus V_{\frac{1}{2}}$ и $B^C = X \setminus B$).

Теперь рассмотрим непересекающиеся замкнутые множества A и $U_{\frac{1}{2}}^C$. Опять, в силу нормальности, существуют непересекающиеся открытые множества $U_{\frac{1}{4}}$ и $V_{\frac{1}{4}}$ такие, что $A \subseteq U_{\frac{1}{4}}$ и $U_{\frac{1}{2}}^C \subseteq V_{\frac{1}{4}}$. Также, так как $V_{\frac{1}{2}}^C$ и B - непересекающиеся замкнутые множества, существуют непересекающиеся открытые множества $U_{\frac{3}{4}}$ и $V_{\frac{3}{4}}$ такие, что $V_{\frac{1}{2}}^C \subseteq U_{\frac{3}{4}}$ и $B \subseteq V_{\frac{3}{4}}$. То есть, мы имеем

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq V_{\frac{1}{4}}^C \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq V_{\frac{1}{2}}^C \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq V_{\frac{3}{4}}^C \subseteq B^C.$$

Продолжая по индукции, для каждого $d \in D$ мы построим открытые множества U_d и V_d, такие, что

$$A \subseteq U_{2^{-n}} \subseteq V_{2^{-n}}^C \subseteq U_{2.2^{-n}} \subseteq V_{2.2^{-n}}^C \subseteq \cdots \subseteq U_{(2^n-1)2^{-n}} \subseteq V_{(2^n-1)2^{-n}}^C \subseteq B^C.$$

В частности, мы имеем, что для $d_1 \leq d_2$ из D, $U_{d_1} \subseteq U_{d_2}$.

Определим $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0,1]$ следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{d : x \in U_d\}, & \text{if } x \in \bigcup_{d \in D} U_d \\ 1, & \text{if } x \notin \bigcup_{d \in D} U_d. \end{cases}$$

Заметим, наконец, что так как $A \subseteq U_d$, для всех $d \in D$, то $f(a) = 0$ для всех $a \in A$. Также, если $b \in B$, то $b \notin \bigcup_{d \in D} U_d$ и, поэтому, $f(b) = 1$. Итак, нам осталось показать, что f непрерывна.

Пусть $f(x) = y$, где $y \neq 0, 1$ положим $W = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, для некоторого $\varepsilon > 0$ (где $0 < y - \varepsilon < y + \varepsilon < 1$). Так как D плотно в $[0, 1]$, мы можем выбрать d_0 и d_1 такие, что $y - \varepsilon < d_0 < y < d_1 < y_0 + \varepsilon$. Тогда, по определению f, $x \in U = U_{d_1} \setminus \overline{U}_{d_0}$, и открытое множество U удовлетворяет $f(u) \subseteq W$. Если $y = 1$, то мы возьмем $W = (y - \varepsilon, 1]$, выберем d_0 так, что $y - \varepsilon < d_0 < 1$, и положим $U = X \setminus \overline{U}_{d_0}$. Опять, $f(U) \subseteq W$. Наконец, если $y = 0$, возьмем $W = [0, y + \varepsilon)$, выберем d_1 так, что $0 < d_1 < Y + \varepsilon$ и положим $U = U_{d_1}$, чтобы опять получить $f(U) \subseteq W$. Следовательно, f непрерывна. □

10.3.23 Следствие. Если $(X, \mathcal{T})$ нормальное Хаусдорфово пространство, то оно является Тихоновским пространством; то есть, каждое T_4-пространство является $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством. Следовательно, оно гомеоморфно некоторому подпространству некоторого куба.

□

10.3.24 Предложение. Каждое компактное Хаусдорфово пространство $(X, \mathcal{T})$ нормально.

Доказательство. Пусть A и B - непересекающиеся замкнутые подмножества $(X, \mathcal{T})$. Зафиксируем $b \in B$. Тогда, так как $(X, \mathcal{T})$ Хаусдорфово, для каждого $a \in A$ существуют открытые множества U_a и V_a такие, что $a \in U_a$, $b \in V_a$ и $U_a \cap V_a = \emptyset$. Поэтому $\{U_a : a \in A\}$ - открытое покрытие A. Так как A компактно, существует конечное подпокрытие $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_n}$. Положим $U_b = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \dots \cup U_{a_n}$ и $V_b = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots V_{a_n}$. Тогда мы имеем, что $A \subseteq U_b$, $b \in V_b$, и $U_b \cap V_b = \emptyset$. Выбирая в качестве b произвольные точки из B, мы получим открытое покрытие $\{V_b : b \in B\}$ множества B. Так как B компактно, существует конечное подпокрытие $V_{b_1}, V_{b_2}, \dots, V_{b_m}$. Положим $V = V_{b_1} \cup V_{b_2} \cup \dots \cup V_{b_m}$ и $U = U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \dots \cap U_{b_m}$. Тогда $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, и $U \cap V = \emptyset$. Следовательно, $(X, \mathcal{T})$ нормально. □

10.3.25 Следствие. Каждое компактное Хаусдорфово пространство вкладывается в куб. □

10.3.26 Замечание. Сейчас мы докажем теорему Урысона о метризуемости, которая дает достаточное условие для метризуемости топологического пространства. Она также дает необходимое и достаточное условие для метризуемости компактного пространства – а именно, что оно должно быть Хаусдорфовым и удовлетворять второй аксиоме счетности.

10.3.27 Определения. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **регулярным** если для каждого $x \in X$ и каждого $U \in \mathcal{T}$ таких, что $x \in U$, существует $V \in \mathcal{T}$ такое, что $x \in \overline{V} \subseteq U$. Если $(X, \mathcal{T})$ к тому же Хаусдорфово, оно называется **T_3-пространством**.

10.3.28 Замечание. Легко проверяется, что каждое $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство является T_3-пространством. Поэтому, согласно Следствию 10.3.23, каждое T_4-пространство является T_3-пространством. На самом деле, у нас есть иерархии:

$$\text{компактное Хаусдорфово пространство} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

$$\text{метризуемое пространство} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

□

10.3.29 Предложение. Каждое нормальное Хаусдорфово пространство $(X, \mathcal{T})$, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

Доказательство. Достаточно показать, что $(X, \mathcal{T})$ вкладывается в Гильбертов куб I^∞. Согласно Следствию 9.4.10, чтобы в этом убедиться, достаточно найти счетное семейство непрерывных отображений из $(X,\mathcal{T})$ в $[0,1]$, разделяющих точки и замкнутые множества.

Пусть B - некоторая счетная база топологии $\mathcal{T}$. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех пар (V,U) таких, что $U\in\mathcal{B}$, $V\in\mathcal{B}$ и $\overline{V}\subseteq U$. Тогда S счетно. Для каждой пары (V,U) из $\mathcal{S}$ мы можем, по Лемме Урысона, найти непрерывное отображение $f_{VU}\colon(X,\mathcal{T})\longrightarrow[0,1]$ такое, что $f_{VU}(\overline{V})=0$ и $f_{VU}(X\setminus U)=1$. Выберем в качестве $\mathcal{F}$ семейство функций f, полученных таким образом. Тогда $\mathcal{F}$ счетно.

Чтобы убедиться в том, что $\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, рассмотрим точку $x\in X$ и произвольное открытое множество W, содержащее x. Тогда существует $U\in\mathcal{B}$ такое, что $x\in U\subseteq W$. Согласно Замечанию 10.3.28, $(X,\mathcal{T})$ регулярно и, поэтому, существует множество $P\in\mathcal{T}$ такое, что $x\in P\subseteq\overline{P}\subseteq U$. Следовательно существует $V\in\mathcal{B}$ такое, что $x\in V\subseteq P$. Поэтому, $x\in\overline{V}\subseteq\overline{P}\subseteq U$. Тогда $(V,U)\in\mathcal{S}$ и если f_{VU} соответствующее отображение из $\mathcal{F}$, то $f_{VU}(x)=0\notin\{1\}=\overline{f_{VU}(X\setminus W)}$. □

10.3.30 Лемма. Каждое регулярное пространство $(X,\mathcal{T})$, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально.

Доказательство. Пусть A и B - непересекающиеся замкнутые подмножества $(X,\mathcal{T})$, а B - счетная база для $\mathcal{T}$. Так как $(X,\mathcal{T})$ регулярно, а $X\setminus B$ - открытое множество, для каждого $a\in A$ существует $V_a\in\mathcal{B}$ такое, что $\overline{V}_a\subseteq X\setminus B$.

Так как $\mathcal{B}$ счетно, мы можем записать члены $\{V_a : a\in A\}$ как V_i, $i\in\mathbb{N}$; то есть, $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i$ и $\overline{V}_i\cap B=\emptyset$, for all $i\in\mathbb{N}$.

Аналогично, мы можем выбрать множества U_i из $\mathcal{B}$, $i\in\mathbb{N}$ такие, что $B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ и $\overline{U}_i\cap A=\emptyset$, для всех $i\in\mathbb{N}$.

Теперь определим $U_1'=U_1\setminus\overline{V}_1$ и $V_1'=V_1\setminus\overline{U}_1$.

Тогда $U_1'\cap V_1'=\emptyset$, $U_1'\in\mathcal{T}$, $V_1'\in\mathcal{T}$, $U_1'\cap B=U_1\cap B$, и $V_1'\cap A=V_1\cap A$.

Затем определим по индукции

$$\overline{U}_n'=U_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{V}_i \quad \text{и} \quad V_n'=V_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_i$$

Тогда $U'_n \in \mathcal{T}$, $V'_n \in \mathcal{T}$, $U'_n \cap B = U_n \cap B$, и $V'_n \cap A = A_n \cap A$.

Теперь определим $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n$ и $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V'_n$.

Тогда $U \cap V = \emptyset$, $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$, $A \subseteq V$, и $B \subseteq U$.

Следовательно, $(X, \mathcal{T})$ - нормальное пространство. □

Теперь мы можем вывести из Предложения 10.3.29. и Леммы 10.3.30 теорему Урысона о метризуемости, , которая обобщает Предложение 10.3.29.

10.3.31 Теорема. (Теорема Урысона о Метризуемости) Каждое регулярное Хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо. □

Из Теоремы Урысона о Метризуемости, Предложения 9.4.4, и Предложения 9.4.17, легко выводится следующий критерий метризуемости компактных пространств

10.3.32 Следствие. Компактное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно Хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности. □

10.3.33 Замечание. Как упоминалось в Замечании 10.3.21, каждое метризуемое пространство нормально. Тогда из Предложения 9.4.17 следует, что сепарабельное метрическое пространство нормально, Хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности. Таким образом, теорема Урысона 9.4.11, которая утверждает, что каждое сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно подпространству Гильбертова куба,, является следствием (доказательства) Предложения 10.3.29.

Упражнения 10.3

1. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **пространством Линделефа** если каждое открытое покрытие X имеет счетное подпокрытие. Докажите следующие утверждения.
   (i) Каждое регулярное пространство Линделефа нормально.
   [Подсказка: попробуйте метод из Леммы 10.3.30. Заметим, что в Упражнении 9.4 #8 мы увидели, что каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является пространством Линделефа.]
   (ii) Прямая Соргенфрея $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ является пространством Линделефа.
   (iii) Если $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, которое имеет замкнутое несчетное дискретное подпространство, то $(X, \mathcal{T})$ не является пространством Линделефа.
   (iv) Из (iii) вверху и Упражнения 8.1 #12 следует, что пространство произведения $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ не является пространством Линделефа.
   [Теперь мы знаем из (ii) и (iv), что произведение двух пространств Линделефа не обязательно является пространством Линделефа.]

2. Докажите, что произвольное произведение регулярных пространств регулярно.

3. Проверьте, что любое замкнутое подпространство нормального пространства нормально.

4. Докажите, что если $(X, \mathcal{T})$ - бесконечное связное Тихоновское пространство, то X - несчетно.

5. Хаусдорфово пространство $(X, \mathcal{T})$ называется k_ω**-пространством** если существует счетное семейство X_n, $n \in \mathbb{N}$, компактных подмножеств X такое, что
   (a) $X_n \subseteq X_{n+1}$, для всех n,
   (b) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$,

(c) произвольное подмножество A множества X замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap X_n$ компактно для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Докажите, что

(i) каждое компактное Хаусдорфово пространство является k_ω-пространством,

(ii) каждое счетное дискретное пространство является k_ω-пространством,

(iii) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ являются k_ω-пространствами,

(iv) каждое k_ω-пространство является нормальным;

(v) каждое метризуемое k_ω-пространство является сепарабельным;

(vi) каждое метризуемое k_ω-пространство может быть вложено в Гильбертов куб;

(vii) каждое замкнутое подпространство k_ω-пространства является k_ω-пространством;

(viii) если $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}')$ - k_ω-пространства, то $(X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T}')$ является k_ω-пространством.

6. Докажите, что каждое $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство является T_3-пространством.

7. Докажите, что для метризуемых пространств условия (i) Линделефовости пространства, (ii) сепарабельности, и (iii) удовлетворения второй аксиоме счетности, эквивалентны.

8. Говорят, что топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет **первой аксиоме счетности** если для каждого $x \in X$, существует счетное семейство U_i, $i \in \mathbb{N}$ открытых множеств, содержащих x, такое, что если $V \in \mathcal{T}$ и $x \in V$, то $V \supseteq U_{n'}$ для некоторого n.

(i) Докажите, что каждое метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(ii) Проверьте, что каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но обратное неверно. (Подсказка: Рассмотрите дискретные пространства.)

(iii) Докажите, что если $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathbb{N}\}$- счетное семейство пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, то $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$ тоже удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(iv) Проверьте, что произвольное подпространство пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, тоже удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(v) Пусть X - произвольное несчетное множество. Докажите, что куб I^X не удовлетворяет первой аксиоме счетности, и, поэтому не является метризуемым.
[Отметьте, что I^X является примером [компактного Хаусдорфова и, следовательно,] нормального пространства, не являющегося метризуемым.]

(vi) Обобщите (v) вверху следующим образом: если J - произвольное несчетное множество, а каждое из $(X, \mathcal{T}_j)$ содержит более одной точки, то $\prod_{j\in J}(X_j, \mathcal{T}_j)$ не является метризуемым.

9. Докажите, что класс всех Тихоновских пространств является наименьшим классом топологических пространств, содержащим $[0, 1]$ и замкнутым относительно взятия подпространств и образования декартовых произведений.

10. Докажите, что произвольное подпространство вполне регулярного пространства само вполне регулярно.

11. Используя Предложение 8.6.8, докажите, что если $(G, \mathcal{T})$ - топологическая группа, то $(G, \mathcal{T})$ - регулярное пространство.
[На самом деле, каждая топологическая группа является вполне регулярным пространством, но это намного труднее доказать.]

12. Докажите, что если $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ - произвольное семейство связных пространств, то $\prod_{j\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ связно.
[Подсказка: Пусть $x = \prod_{i\in I} x_i \in \prod_{i\in I} X_i$. И пусть S состоит из множества всех точек из $\prod_{i\in I} X_i$, которые отличаются от $x = \prod_{i\in I} x_i$ не более чем в $\boxed{\text{конечном}}$ числе координат. Докажите, что $C_X(x) \supseteq S$. Затем покажите, что S плотно в $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$. Наконец, используйте то, что $C_X(x)$ замкнуто].

13. Пусть $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ - произвольное семейство топологических пространств. Докажите, что $\prod_{j\in j}(X_j, \mathcal{T}_j)$ локально связно тогда и только тогда, когда каждое из $(X_j, \mathcal{T}_j)$ локально связно, а все, за исключением конечного числа $(X_j, \mathcal{T}_j)$, связны.

14. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ - прямая Соргенфрея. Докажите следующие утверждения.
   (i) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ - нормальное пространство.
   (ii) Если $(X, \mathcal{T})$ - сепарабельное Хаусдорфово пространство,то существует не более $\mathfrak{c}$ различных непрерывных функций $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$.
   (iii) Если $(X, \mathcal{T})$ - нормальное пространство, имеющее несчетное дискретное подпространство, то существует по крайней мере $2^{\mathfrak{c}}$ различных непрерывных функций $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$. [Подсказка: Используйте Лемму Урысона.]
   (iv) Выведите из (ii) и (iii) вверху и Упражнения 8.1 #12, что $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ не является нормальным пространством.
   [Мы теперь знаем, что произведение двух нормальных пространств не обязятельно нормально.]

10.4 Компактификация Стоуна-Чеха

10.4.1 Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, $(\beta X, \mathcal{T}')$ - компактное Хаусдорфово пространство, а $\beta\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\beta X, \mathcal{T}')$ - непрерывное отображение. Пространство $(\beta X, \mathcal{T}')$ вместе с отображением β называется **компактификацией Стоуна-Чеха** пространства $(X, \mathcal{T})$ если для произвольного компактного Хаусдорфова пространства $(Y, \mathcal{T}'')$ и произвольного непрерывного отображения $\phi : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}'')$, существует единственное непрерывное отображение $\Phi : (\beta X, \mathcal{T}') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}'')$ такое, что $\Phi \circ \beta = \phi$; то есть, диаграмма, приведенная ниже, коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}') \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\phi"'] & (\beta X, \mathcal{T}') \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\
& (Y, \mathcal{T}'')
\end{tikzcd}$$

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ Отображение β, как правило, не сюръективно, поэтому $\beta(X)$ обычно не равно βX.

10.4.2 Замечание. Те, кто знаком с теорией категорий, сразу поймут, что существование компактификации Стоуна-Чеха следует из Теоремы Фрейда о Присоединенном функторе и стирающего функтора из категории компактных Хаусдорфовых пространств и непрерывных функций в категорию топологических пространств и непрерывных функций.[См. Maclane [23].

Несмотря на то, что компактификация Стоуна-Чеха существует для всех топологических пространств, она очень важна именно в случае Тихоновских пространств. Отображение β является вложением тогда и только тогда, когда пространство $(X, \mathcal{T})$ Тихоновское. Часть “только тогда” очевидна, так как компактное Хаусдорфово пространство $(\beta X, \mathcal{T}')$ является Тихоновским и, поэтому, таковым является любое его подпространство.

Теперь мы займемся существованием компактификации Стоуна-Чеха для Тихоновских пространств и покажем, что отображение β в этом случае является вложением.

10.4.3 Лемма. Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{T}')$ - тихоновские пространства, а $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}(Y)$ - семейства всех непрерывных функций из X и Y в $[0,1]$, соответственно. Далее, пусть e_X и e_Y - оценочные отображения из X в $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} I_f$ и Y в $\prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} I_g$, соответственно, где $I_f \cong I_g \cong [0,1]$, для всех f и g. Если ϕ - произвольное непрерывное отображение из X в Y, то существует непрерывное отображение Φ из $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} I_f$ в $\prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} I_g$ такое, что $\Phi \circ e_X = e_Y \circ \Phi$; то есть, следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}') \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "e_X"'] & (Y, \mathcal{T}') \arrow[d, "e_Y"] \\
\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} I_f \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} I_g
\end{tikzcd}$$

Более того, $\Phi(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$.

Доказательство. Пусть $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} x_f \in \prod_{f\in\mathcal{F}(X)} I_f$. Определим $\Phi\left(\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} x_f\right) = \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} y_g$, где y_g определены следующим образом: так как $g \in \mathcal{F}(Y)$, g - непрерывное отображение из $(Y, \mathcal{T}')$ в $[0,1]$, поэтому $g \circ \phi$ - непрерывное отображение из $(X, \mathcal{T})$ в $[0,1]$. Таким образом, $g \circ \phi = f$, для некоторого $f \in \mathcal{F}(X)$. Положим $y_g = x_f$, что определяет отображение Φ.

Чтобы доказать непрерывность Φ, рассмотрим $U = \prod_{g\in\mathcal{F}(Z)} U_g$ - базовое открытое множество, содержащее
$\Phi(\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} x_f) = \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} y_g$. Тогда $U_g = I_g$ для всех $g \in \mathcal{F}(Y) \backslash \{g_{i_1}, \dots, g_{i_n}\}$, и произвольных $g_{i_1}, \dots, g_{i_n}$. Положим $f_{i_1} = g_{i_1} \circ \phi$, $f_{i_2} = g_{i_2} \circ, \dots, f_{i_n} = g_{i_n} \circ \phi$. Далее, определим $V = \prod_{f\in\mathcal{F}(X)} V_f$, где $V_f = I_f$, для некоторого $f \in \mathcal{F}(X) \setminus \{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n}\}$, и $V_{f_{i_1}} = U_{g_{i_1}}, V_{f_{1_2}} = U_{g_{i_2}}, \dots, V_{f_{i_n}} = U_{g_{i_n}}$. Очевидно, что $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} x_f \in V$ и $\Phi(V) \subseteq U$. Поэтому, Φ непрерывно.

Для доказательства коммутативности диаграммы заметим, что

$$\Phi(e_X(x)) = \Phi\Big(\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} f(x)\Big) = \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} g(\phi(x)), \text{ для всех } x \in X.$$

Поэтому, $\Phi \circ e_X = e_Y \circ \phi$.

Наконец, так как Φ непрерывно, $\Phi(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$,, как и требовалось. □

10.4.4 Лемма. Пусть Φ_1 и Φ_2 - непрерывные отображения топологического пространства $(X,\mathcal{T})$ в Хаусдорфово пространство $(Y,\mathcal{T}')$. Если Z - плотное подмножество $(X,\mathcal{T})$, а $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$ для всех $z \in Z$, то $\Phi_1 = \Phi_2$ на X.

Доказательство. Предположим, что $\Phi_1(x) \neq \Phi_2(x)$, для некоторой точки $x \in X$. Тогда так как $(Y,\mathcal{T}')$ Хаусдорфово, существуют открытые множества $U \ni \Phi_1(x)$ и $V \ni \Phi_2(x)$, где $U \cap V = \emptyset$. Поэтому, $\Phi_1^{-1}(U) \cap \Phi_2^{-1}(V)$ - открытое множество, содержащее x.

Так как Z плотно в $(X,\mathcal{T})$, существует точка $z \in Z$ такая, что $z \in \Phi_1^{-1}(U) \cap \Phi_2^{-1}(V)$. Поэтому, $\Phi_1(z) \in U$ и $\Phi_2(z) \in V$. Но $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$. Поэтому $U \cap V \neq \emptyset$. Противоречие.

Следовательно, $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$, для всех $x \in X$. □

10.4.5 Предложение. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - произвольное Тихоновское пространство, $\mathcal{F}(X)$ - семейство непрерывных отображений из $(X,\mathcal{T})$ в $[0,1]$, а e_X - оценочное отображение из $(X,\mathcal{T})$ в $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} I_f$, где $I_f \cong [0,1]$. Положим $(\beta X,\mathcal{T}')$ равным $\overline{e_X(X)}$ с топологией подпространства, а $\beta : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (\beta X,\mathcal{T}')$ равным отображению e_X. Тогда $(\beta X,\mathcal{T}')$ вместе с отображением β является компактификацией Стоуна-Чеха пространства $(X,\mathcal{T})$.

Доказательство. Сначала отметим, что $(\beta X, \mathcal{T}')$ действительно компактное Хаусдорфово пространство, так как является замкнутым подпространством компактного Хаусдорфова пространства.

Пусть ϕ - непрерывное отображение из $(X, \mathcal{T})$ в произвольное компактное Хаусдорфово пространство $(Y, \mathcal{T}'')$. Нам надо построить отображение Φ , чтобы как в Определении 10.4.1 диаграмма была коммутативной, и доказать единственность Φ.

Пусть $\mathcal{F}(Y)$ - семейство всех непрерывных функций из $(Y, \mathcal{T}'')$ в $[0,1]$, а e_Y - оценочное отображение из $(Y, \mathcal{T}'')$ в $\prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g$, где каждое из $I_g \cong [0,1]$.

По Лемме 10.4.3, существует непрерывное отображение $\Gamma : \prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f \longrightarrow \prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g$, такое, что $e_Y \circ \phi = \Gamma \circ e_X$, и $\Gamma(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$; то есть, $\Gamma(\beta X) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$.

Так как $(Y, \mathcal{T}'')$ - компактное Хаусдорфово пространство, а e_Y is инъективно, то $\overline{e_Y(Y)} = e_Y(Y)$, а $e_Y \colon (Y, \mathcal{T}'') \longrightarrow (e_Y(Y), \mathcal{T}''')$ - гомеоморфизм, где $\mathcal{T}'''$ - топология подпространства на $e_Y(Y)$. Поэтому $e_Y^{-1} : (e_Y(Y), \mathcal{T}''') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}'')$ - гомеоморфизм.

Положим $\Phi = e_Y^{-1} \circ \Gamma$, так что Φ - непрерывное отображение из $(\beta X, \mathcal{T}')$ в $(Y, \mathcal{T}'')$. Далее,

$$\begin{aligned}
\Phi(\beta(x)) &= \Phi(e_X(x), && \text{для всех } x \in X \\
&= e_Y^{-1}(\Gamma(e_X(x))) \\
&= e_Y^{-1}(e_Y(\phi(x))), && \text{так как } e_Y \circ \phi = \Gamma \circ e_X \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

Поэтому, $\Phi \circ \beta = \phi$, как и требовалось.

Теперь предположим, что существуют два непрерывных отображения Φ_1 и Φ_2 из $(\beta X, \mathcal{T}')$ в $(Y, \mathcal{T}'')$, где $\Phi_1 \circ \beta = \phi$ и $\Phi_2 \circ \beta = \phi$. Тогда $\Phi_1 = \Phi_2$ на плотном подмножестве $\beta(X)$ пространства $(\beta X, \mathcal{T}')$. Поэтому, по Лемме 10.4.4, $\Phi_1 = \Phi_2$. Следовательно, отображение Φ единственно. □

10.4.6 Замечание. В Определении 10.4.1 мы определили компактификацию Стоуна-Чеха, подразумевая, что для каждого $(X, \mathcal{T})$ имеется, в некотором смысле, единственное $(\beta X, \mathcal{T}')$. В следующем Предложении уточняется, в каком смысле это верно. Но сначала нам надо доказать следующую лемму.

10.4.7 Лемма. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а $(Z, \mathcal{T}_1)$ вместе с отображением $\beta\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z, \mathcal{T}_1)$ является некоторой компактификацией Стоуна-Чеха для $(X, \mathcal{T})$. Тогда $\beta(X)$ плотно в $(Z, \mathcal{T}_1)$.

Доказательство. Предположим, что $\beta(X)$ не плотно в $(Z, \mathcal{T}_1)$. Тогда существует элемент $z \in Z \setminus \overline{\beta(X)}$. Так как $(Z, \mathcal{T}_1)$ - компактное Хаусдорфово пространство, согласно Замечанию 10.3.28, это Тихоновское пространство.

Заметив, что $Z \setminus \overline{\beta(X)}$ - открытое множество, содержащее z, мы заключаем, что существует непрерывное отображение $\Phi_1\colon (Z, \mathcal{T}_1) \longrightarrow [0, 1]$, где $\Phi_1(z) = 1$ и $\Phi_1(\overline{\beta(X)}) = 0$. Аналогично, существует непрерывное отображение $\Phi_2\colon (Z, \mathcal{T}_1) \longrightarrow [0, \frac{1}{2}]$, где $\Phi_2(z) = \frac{1}{2}$ и $\Phi_2(\overline{\beta(X)}) = 0$. Итак у нас есть следующие две коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}') \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\phi"'] & (Z, \mathcal{T}_1) \arrow[d, dashed, "\Phi_1"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}') \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\phi"'] & (Z, \mathcal{T}_1) \arrow[d, dashed, "\Phi_2"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

где $\phi(x) = 0$, для всех $x \in X$. Это противоречит единственности отображения Φ из Определения 10.4.1. Следовательно, $\beta(X)$ плотно в $(Z, \mathcal{T}_1)$. $\square$

10.4.8 Предложение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а $(Z_1, \mathcal{T}_1)$ вместе с отображением $\beta_1 \colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z_1, \mathcal{T}_1)$ - компактификация Стоуна-Чеха пространства $(X, \mathcal{T})$. Если $(Z_2, \mathcal{T}_2)$ вместе с отображением $\beta_2 \colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z_2, \mathcal{T}_2)$ тоже компактификация Стоуна-Чеха пространства $(X, \mathcal{T})$, то $(Z_1, \mathcal{T}_1) \cong (Z_2, \mathcal{T}_2)$. На самом деле, существует гомеоморфизм $\Theta \colon (Z_1, \mathcal{T}_1) \to (Z_2, \mathcal{T}_2)$ такой, что $\Theta \circ \beta_1 = \beta_2$.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}') \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & (Z_1, \mathcal{T}_1) \arrow[d, dashed, "\Theta"] \\
& (Z_2, \mathcal{T}_2)
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Так как $(Z_1, \mathcal{T}_1)$ вместе с β_1 - компактификация Стоуна-Чеха пространства $(X, \mathcal{T})$, а β_2 - непрерывное отображение из $(X, \mathcal{T})$ в компактное Хаусдорфово пространство $(Z_2, \mathcal{T}_2)$, то существует непрерывное отображение $\Theta \colon (Z_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Z_2, \mathcal{T}_2)$ такое, что $\Theta \circ \beta_1 = \beta_2$.

Аналогично, существует непрерывное отображение $\Theta_1 \colon (Z_2, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (Z_1, \mathcal{T}_1)$ такое, что $\Theta_1 \circ \beta_2 = \beta_1$. Поэтому, для каждого $x \in X$, $\Theta_1(\Theta(\beta_1(x))) = \Theta_1(\beta_2(X)) = \beta_1(x)$; То есть, если id_{Z_1} - тождественное отображение на $(Z_1, \mathcal{T}_1)$, то $\Theta_1 \circ \Theta = \mathrm{id}_{Z_1}$ на $\beta_1(X)$, которое, по Лемме 10.4.7, плотно в $(Z_1, \mathcal{T}_1)$. Поэтому, по Лемме 10.4.4, $\Theta_1 \circ \Theta = \mathrm{id}_{Z_1}$ на Z_1.

Аналогично, $\Theta \circ \Theta_1 = \mathrm{id}_{Z_2}$ на Z_2. Следовательно, $\Theta = \Theta_1^{-1}$ и так как оба отображения непрерывны, это означает, что Θ - гомеоморфизм. □

10.4.9 Замечание. Замети, что **если $(X, \mathcal{T})$ - произвольное Тихоновское пространство**, а $(\beta X, \mathcal{T}')$ вместе с $\beta \colon (X, \mathcal{T}) \to (\beta X, \mathcal{T}')$ - компактификация Стоуна-Чеха, то из доказательства Предложения 10.4.5 видно, что β - вложение. На самом деле, **обычно**, в этом случае, X **отождествляется с βX, и пространство $(X, \mathcal{T})$ рассматривается как подпространство**

пространства $(\beta X, \mathcal{T}')$. В таком случае, мы не упоминаем вложение β, а $(\beta X, \mathcal{T}')$ называем компактификацией Стоуна-Чеха.

10.4.10 Замечание. Для компактного Хаусдорфова пространства $(X, \mathcal{T})$ компактификация Стоуна-Чеха пространства $(X, \mathcal{T})$ совпадает с $(X, \mathcal{T})$. Очевидно, что $(X, \mathcal{T})$ вместе с тождественным отображением в себя обладает всеми свойствами компактификации Стоуна-Чеха. По единственности, это и есть компактификация Стоуна-Чеха. Это также легко видеть из доказательства Предложения 10.4.5, где мы увидели, что для компактного Хаусдорфова пространства $(Y, \mathcal{T}'')$ отображение $e_Y : (Y, \mathcal{T}'') \longrightarrow (e_Y(Y), \mathcal{T}''')$ является гомеоморфизмом.

10.4.11 Замечание. Компактификации Стоуна-Чеха даже для очень хороших пространств, как правило, весьма громоздки. Например, $[0,1]$ не является - компактификацией Стоуна-Чеха пространства $(0,1]$, так как непрерывное отображение $\phi\colon (0,1] \longrightarrow [-1,1]$, определенное как $\phi(x) = \sin(\frac{1}{x})$, не продолжается до непрерывного отображения $\Phi\colon [0,1] \longrightarrow [-1,1]$. На самом деле, можно показать, что компактификация Стоуна-Чеха пространства $(0,1]$ не метризуема.

Упражнение 10.4

1. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - пространство Тихонова, а $(\beta X, \mathcal{T}')$ - ее компактификация Стоуна-Чеха. Докажите, что $(X, \mathcal{T})$ связно тогда и только тогда, когда $(\beta X, \mathcal{T}')$ связно.

   [Подсказка: Сначала проверьте, что если $(X, \mathcal{T})$ имеет по крайней мере 2 точки, оно связно тогда и только тогда, когда не существует непрерывного отображения из $(X, \mathcal{T})$ на дискретное пространство $\{0,1\}$.]

2. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - пространство Тихонова, а $(\beta X, \mathcal{T}')$ - ее компактификация Стоуна-Чеха. Докажите, что если $(A, \mathcal{T}_1)$ - подпространство пространства $(\beta X, \mathcal{T}')$, а $A \supseteq X$, то $(\beta X, \mathcal{T}')$ также компактификация Стоуна-Чеха для $(A, \mathcal{T}_1)$.

[Подсказка: Проверьте, что каждое непрерывное отображение из $(X, \mathcal{T})$ в $[0,1]$ может быть продолжено до непрерывного отображения пространства $(A, \mathcal{T}_1)$ в $[0,1]$. Затем используйте конструкцию $(\beta X, \mathcal{T}')$.]

3. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - плотное подмножество компактного Хаусдорфова пространства $(Z, \mathcal{T}_1)$. Докажите, что если каждое непрерывное отображение из $(X, \mathcal{T})$ в $[0,1]$ может быть продолжено до непрерывного отображения из $(Z, \mathcal{T}_1)$ в $[0,1]$, то $(Z, \mathcal{T}_1)$ - компактификация Стоуна-Чеха пространства $(X, \mathcal{T})$.

10.5 Заключение

Наконец мы определили произведение произвольного числа топологических пространств и доказали Теорему Тихонова для общего случая. Мы также обобщили Лемму Вложения на общий случай. Это было использовано для характеризации Тихоновских пространств как гомеоморфных подпространствам некоторого куба (то есть произведению копий $[0,1]$).

Лемма Урысона позволила нам доказать следующие отношения между свойствами отделимости:

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Далее, и (компактность + Хаусдорфовость) и Метризуемость влекут T_4.

Мы также познакомились с очень сильной теоремой метризуемости – а именно, Теоремой Урысона о Метризуемости, которая утверждает, что каждое регулярное Хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

В конце главы мы обсудили компактификацию Стоуна-Чеха, которая сама по себе является очень важной темой. (См. Hindman and Strauss [16] and Walker [32].)

Приложение 1: Бесконечные множества

Введение

Когда-то в далекой стране было два отеля, Обычный Отель (с конечным числом комнат) и Бесконечный Отель Гильберта (необычный отель с бесконечным числом комнат, пронумерованных числами $1, 2, \ldots n, \ldots$). Как-то в город приехал визитцр и решил остановиться в отеле. Сначала он пошел в Обычный Отель, но там ему сказали, что все комнаты заняты, но что в Бесконечном Отеле Гильберта ему всегда могут найти свободную комнату. В Бесконечном Отеле Гильберта оказалось, что все комнаты заняты. Однако, администратор отеля сказал, что в этом отеле всегда можно разместить новоприбывшего клиента, не выселяя никого. Он переселил гостя из комнаты 1 в комнату 2, гостя из комнаты 2 в комнату 3 и так далее. В итоге, комната 1 освободилась!

Из этого примера видно, насколько различны конечные и бесконечные множества. В этом Приложении мы ставим целью дать краткое введение в теорию бесконечных множеств. Это замечательный предмет, который, если вы с ним не сталкивались раньше, может преподнести несколько сюрпризов. Мы узнаем, что “бесконечные множества не были созданы одинаковыми некоторые из них больше, чем другие. Сначала даже непонятно, что это предложение может означать. Нам надо определить понятие “большее множество". Более того, мы должны определить, что мы имеем ввиду, когда говорим, что “два множества имеют равное количество элементов".

A1.1 Счетные множества

A1.1.1 Определения. Пусть A и B - некоторые множества. Говорят, что множества A и B **равномощны** , обозначается как $A \sim B$, если существует взаимно-однозначное (биективное) отображение f множества A на B.

A1.1.2 Предложение. Пусть A, B и C - множества.

(i) Тогда $A \sim A$.

(ii) Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

(iii) Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Набросок доказательства.

(i) Тождественное отображение f на A, определенное как $f(x) = x$, для всех $x \in A$, является взаимно-однозначным отображением A на себя.

(ii) Если f - биекция A на B, то у нее есть обратное отображение g из B на A, которое тоже является взаимно-однозначным.

(iii) Если $f: A \to B$ и $g: B \to C$ - взаимно-однозначные соответствия, то их композиция $gf: A \to C$ тоже является взаимно-однозначным соответствием.

$\square$

Предложение A1.1.2 утверждает, что отношение “$\sim$” рефлексивно (i), симметрично (ii), и транзитивно (iii); то есть, “$\sim$” является **отношением эквивалентности**.

A1.1.3 Предложение. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\{1, 2, \ldots, m\}$ равномощны тогда и только тогда, когда $n = m$.

Доказательство. Упражняйтесь. $\square$

Теперь мы в состоянии явно определить термины “конечное множество” и “бесконечное множество”.

A1.1.4 Определения. Пусть S - некоторое множество.

(i) Множество S называется **конечным** если оно либо пустое $\emptyset$, либо равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Если множество S не является конечным, то оно называется **бесконечным**.

(iii) Если $S \sim \{1, 2, \ldots, n\}$, то говорят, что S - множество **мощности** n, и пишут card $S = n$.

(iv) Мощность пустого множества полагается равной 0, card $\emptyset = 0$.

Следующим нашим шагом является определение “наименьшего” бесконечного множества. Такие множества мы будем называть счетно бесконечными. На этом этапе мы еще не знаем существуют ли “бОльшие” множества – в действительности, мы даже не знаем, что “бОльшее” может означать.

A1.1.5 Определения. Пусть S - некоторое множество.

(i) Множество S называется **счетно бесконечным** если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

(ii) Множество S называется **счетным**, если оно конечно или счетно бесконечно.

(iii) Если S - счетно бесконечно, то то говорят что его **мощность равна** $\aleph_0$, обозначается card $S = \aleph_0$.

(iv) Множество S называется **несчетным** если оно не является счетным.

A1.1.6 Замечание. Если множество S счетно бесконечно, то $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ где $f : \mathbb{N} \to S$ - взаимно-однозначное соответствие. То есть, мы можем $\boxed{\text{перечислить}}$ элементы из S. Конечно же, если S непустое и конечное, мы также можем перечислить его элементы $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Итак, мы можем перечислить элементы любого счетного множества. В обратную сторону, если элементы S могут быть перечислены, то S - счетно так как перечисление определяет взаимно-однозначное соответствие с $\mathbb{N}$ или $\{1, 2, \ldots, n\}$. $\square$

A1.1.7 Пример. Множество S всех четных натуральных чисел является счетно бесконечным.

Доказательство. Отображение $f : \mathbb{N} \to S$, определенное формулой $f(n) = 2\,n$, для всех $n \in \mathbb{N}$, является взаимно-однозначным соответствием. $\square$

Пример A1.1.7 заслуживает некоторого размышления. Мы полагаем, что если между двумя множествами есть взаимно-однозначное соответствие, то они "одинакового размера". Но здесь показано, что $\mathbb{N}$ находится во взаимно-однозначном соответствии с одним из своих $\boxed{\text{собственных}}$ подмножеств. Такого не происходит с конечными множествами. В действительности, конечные множества могут быть охарактеризованы как множества, которые не равномощны своим собственным подмножествам.

A1.1.8 Пример. Множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно бесконечно.

Доказательство. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ определенное как

$$f(n) = \begin{cases} m, & \text{если } n = 2m,\ m \geq 1 \\ -m, & \text{если } n = 2m+1,\ m \geq 1 \\ 0, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

является взаимно-однозначным соответствием. $\square$

A1.1.9 Пример. Множество S квадратов всех целых чисел счетно бесконечно.

Доказательство. Функция $f : \mathbb{N} \to S$, определенная формулой $f(n) = n^2$, является взаимно-однозначным соответствием. $\square$

Пример A1.1.9 впервые был найден Галилео Галилеем около 1600 года. Этот пример его очень беспокоил и даже навел на мысль, что бесконечное не должно быть предметом изучения для людей.

A1.1.10 Предложение. Множество S, равномощное счетному множеству, является счетным.

Доказательство. Упражняйтесь. □

A1.1.11 Предложение. Если S счетное множество, а $T \subset S$, то T тоже счетно.

Доказательство. Так как S счетно, мы можем перечислить его элементы $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ (конечный список если S конечно, бесконечный если S счетно бесконечно).

Пусть t_1 первый элемент s_i из T (если $T \neq \emptyset$), t_2 второй элемент s_i из T (если $T \neq \{t_1\}$), t_3 третий элемент s_i из T (если $T \neq \{t_1, t_2\}$), ...

Этот процесс завершается только если $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ для некоторого n, что означает, что T конечно. Если же процесс не завершается за конечное число шагов, мы получаем список $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ элементов множества T. Этот список содержит все элементы из T, так как если $s_i \in T$, то мы достигнем s_i не позже чем через i шагов; то есть, s_i содержится в списке. Следовательно, T счетно бесконечно. В любом случае, T счетно. □

В качестве немедленного следствия Предложения A1.1.11 и Примера 1.1.8 мы имеем следующий результат.

A1.1.12 Следствие. Каждое подмножество $\mathbb{Z}$ iсчетно. □

A1.1.13 Лемма. Если $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ счетно бесконечное семейство счетно бесконечных множеств такое, что $S_i \cap S_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ счетно бесконечное множество.

Доказательство. Так как каждое из S_i счетно бесконечно, $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in}, \ldots\}$. Расположим s_{ij} в квадратной таблице и перечислим их, двигаясь зигзагом вверх и вниз как показано на рисунке внизу.

$$\begin{array}{ccccccc}
s_{11} & \to & s_{12} & & s_{13} & \to & s_{14} \quad \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
s_{21} & & s_{22} & & s_{23} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
s_{31} & & s_{32} & & s_{33} & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Это показывает что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ может быть перечислено, и, очевидно, является бесконечным. $\square$

В Лемме A1.1.13 мы предположили, что множества S_i не пересекаются. Если это не так, то доказательство можно слегка изменить, удалив повторяющиеся элементы, что дает:

A1.1.14 Лемма. Если $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ счетно бесконечное семейство счетно бесконечных множеств, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ счетно бесконечно. $\square$

A1.1.15 Предложение. Объединение счетного семейства счетных множеств счетно.

Доказательство. Упражняйтесь. $\square$

A1.1.16 Предложение. Если S и T - счетно бесконечные множеств, то произведение $S \times T = \{\langle s, t\rangle : s \in S, t \in T\}$ тоже счетно бесконечно.

Доказательство. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ и $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$. Тогда

$$S \times T = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\langle s_i, t_1\rangle, \langle s_i, t_2\rangle, \ldots, \langle s_i, t_n\rangle, \ldots\}.$$

То есть, $S \times T$ счетно бесконечное объединение счетно бесконечных множеств, и, следовательно, само счетно бесконечно. $\square$

A1.1.17 Следствие. Конечное произведение счетных множеств счетно. $\square$

Теперь мы готовы применить наши наблюдения по поводу счетных множеств для получения более существенных результатов.

A1.1.18 Лемма. Множество, $\mathbb{Q}^{>0}$, всех положительных рациональных чисел счетно бесконечно.

Доказательство. Пусть S_i множество всех положительных рациональных чисел со знаменателем i, где $i \in \mathbb{N}$. Тогда $S_i = \left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \ldots, \frac{n}{i}, \ldots\right\}$ и $\mathbb{Q}^{>0} = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Так как каждое из S_i счетно бесконечно, согласно Предложению A1.1.15 $\mathbb{Q}^{>0}$ счетно бесконечно. $\square$

Теперь мы можем доказать, что множество, $\mathbb{Q}$, всех рациональных чисел счетно бесконечно; то есть, существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathbb{Q}$ и (на первый взгляд) намного меньшим множеством, $\mathbb{N}$, натуральных чисел.

A1.1.19 Теорема. Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно бесконечно.

Доказательство. Очевидно, что множество $\mathbb{Q}^{<0}$ всех отрицательных рациональных чисел равномощно множеству, $\mathbb{Q}^{>0}$, всех положительных рациональных чисел и, поэтому, по Предложению A1.1.10 и Лемме A1.1.18, множество $\mathbb{Q}^{<0}$ само счетно бесконечно.

Наконец, заметим, что $\mathbb{Q}$ является объединением трех множеств $\mathbb{Q}^{>0}$, $\mathbb{Q}^{<0}$ и $\{0\}$ и, поэтому, счетно бесконечно по Предложению A1.1.15. $\square$

A1.1.20 Следствие. Любое множество рациональных чисел счетно бесконечно.

Доказательство. Это следует из Теоремы A1.1.19 и Предложения A1.1.11. □

A1.1.21 Определения. Действительное число x называется **алгебраическим числом** если существуют натуральное n и целые $a_0, a_1, \ldots, a_n$ где $a_0 \neq 0$ такие, что

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Действительное число, не являющееся алгебраическим, называется **трансцендентным числом**.

A1.1.22 Пример. Каждое рациональное число является алгебраическим.

Доказательство. Если $x = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ и $q \neq 0$, то $qx - p = 0$; то есть, x алгебраическое число с $n = 1$, $a_0 = q$, и $a_n = -p$. □

A1.1.23 Пример. Число $\sqrt{2}$ является алгебраическим, но не рациональным.

Доказательство. Хотя $x = \sqrt{2}$ и является иррациональным, оно удовлетворяет уравнению $x^2 - 2 = 0$ и, поэтому, является алгебраическим. □

A1.1.24 Замечание. Легко проверить, что $\sqrt[4]{5} - \sqrt{3}$ алгебраическое число так как удовлетворяет уравнению $x^8 - 12x^6 + 44x^4 - 288x^2 + 16 = 0$. На самом деле, любое действительное число, которое можно получить из целых чисел при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, произведения, деления и извлечения корней произвольных степеней, является алгебраическим. □

A1.1.25 Замечание. Замечание A1.1.24 показывает, что “большинство” чисел, которые мы рассматриваем, являются алгебраическими. Показать, что заданное число трансцендентно, может оказаться очень сложной задачей.

Впервые это удалось Лиувиллю в 1844, когда он доказал трансцендентность числа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000000100\ldots$$

В 1873 Эрмит показал, что e трансцендентно. В 1882 Линдеман доказал, что число π трансцендентно, таким образом ответив отрицательно на 2,000 проблему о квадратуре круга. (Проблема заключается в следующем: имея круг радиуса 1, можно ли, используя только линейку и циркуль, построить квадрат такой же площади? Полное описание этой проблемы и доказательства трансцендентности чисел e и π могут быть найдены в книге, Джонса, Морриса и Пирсона [18].) $\square$

Теперь мы займемся доказательством того, что множество $\mathcal{A}$ всех алгебраических чисел счетно бесконечно. Этот результат сильнее, чем Теорема A1.1.19, которая является следствием этого результата.

A1.1.26 Теорема. Множество $\mathcal{A}$ всех алгебраических чисел счетно бесконечно.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$ и каждое $a_i \in \mathbb{Z}$, и определим его **высоту** как $k = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$.

Пусть для каждого натурального k, A_k обозначает множество всех корней всех многочленов высоты k. Очевидно, что $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Поэтому, чтобы показать, что $\mathcal{A}$ счетно бесконечно, достаточно, по Предложению A1.1.15, показать, что каждое из A_k конечно.

Если f многочлен степени n то, очевидно, что $n \leq k$ и $|a_i| \leq k$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому, множество всех многочленов высоты k конечно.

Далее, многочлен степени n имеет самое большее n корней. Следовательно, каждый многочлен высоты k имеет не более k корней. Следовательно, A_k конечно, как и требовалось. $\square$

A1.1.27 Следствие. Произвольное множество алгебраических чисел счетно. $\square$

Заметьте, что Следствие A1.1.20. является частным случаем Следствия A1.1.27.

До сих пор мы не привели примера несчетного множества. Прежде, чем это сделать, заметим, что некоторые отображения не выводят нас за пределы счетных множеств.

A1.1.28 Предложение. Пусть X и Y - некоторые множества, а f - отображение из X в Y.

(i) Если X счетно, а f сюръективно, то Y тоже счетно.

(ii) Если Y счетно, а f инъективно, то X счетно.

Доказательство. Упражняйтесь. □

A1.1.29 Предложение. Пусть S - счетное множество. Тогда множество всех конечных подмножеств S тоже счетно.

Доказательство. Упражняйтесь. □

A1.1.30 Определение. Пусть S - некоторое множество. Множество всех подмножеств S называется **степенным множеством** множества S и обозначается через $\mathcal{P}(S)$.

A1.1.31 Теорема. (Георг Кантор) Для произвольного множества S, степенное множество, $\mathcal{P}(S)$, не равномощно множеству S; то есть, $\mathcal{P}(S) \not\sim S$.

Доказательство. Нам надо показать, что не существует взаимно-однозначного соответствия между S и $\mathcal{P}(S)$. Мы докажем больше: не существует сюръективного отображения из S на $\mathcal{P}(S)$.

$\boxed{\text{Предположим}}$, что существует сюръективное отображение $f\colon S \to \mathcal{P}(S)$. Для каждого $x \in S$, $f(x) \in \mathcal{P}(S)$, или, что то же, $f(x) \subseteq S$.

Пусть $T = \{x : x \in S \text{ and } x \notin f(x)\}$. Тогда $T \subseteq S$; то есть, $T \in \mathcal{P}(S)$. Поэтому $T = f(y)$ для некоторого $y \in S$, так как f отображает S на $\mathcal{P}(S)$. Теперь либо $y \in T$, либо $y \notin T$.

Случай 1.

$$\begin{aligned} y \in T &\Rightarrow y \notin f(y) \quad \text{(по определению } T\text{)} \\ &\Rightarrow y \notin T \quad \text{(так как } f(y) = T\text{).} \end{aligned}$$

Поэтому Случай 1 невозможен.

Случай 2.

$$\begin{aligned} y \notin T &\Rightarrow y \in f(y) \quad \text{(по определению Т)} \\ &\Rightarrow y \in T \quad \text{(так как } f(y) = T\text{).} \end{aligned}$$

Следовательно, и Случай 2 невозможен.

Полученное противоречие доказывает теорему. □

A1.1.32 Лемма. Произвольное множество S равномощно некоторому подмножеству своего степенного множества, $\mathcal{P}(S)$.

Доказательство. Определим отображение $f\colon S \to \mathcal{P}(S)$ как $f(x) = \{x\}$, для всех $x \in S$. Очевидно, что f взаимно-однозначное соответствие между S и $f(S)$. □

A1.1.33 Предложение. Если S - бесконечное множество, то $\mathcal{P}(S)$ несчетно.

Доказательство. Так как S бесконечно, то $\mathcal{P}(S)$ тоже бесконечно. По Теореме A1.1.31, $\mathcal{P}(S)$ оно не равномощно S.

$\boxed{\text{Предположим}}$ $\mathcal{P}(S)$ - счетно бесконечно. Тогда по Предложению A1.1.11, Лемме 1.1.32 и Предложению A1.1.10, S - счетно бесконечно. То есть, S и $\mathcal{P}(S)$ равномощны, что неверно. Значит, $\mathcal{P}(S)$ несчетно. □

Предложение A1.1.33 показывает существование несчетных множеств. Однако скептик может сказать, что этот пример искусственный. Поэтому в завершение этого раздела мы покажем, что многие из хорошо известных и важных множеств являются несчетными.

A1.1.34 Лемма. Множество всех действительных чисел из полуоткрытого интервала $[1,2)$ несчетно.

Доказательство. (Диагональный метод Кантора) Мы покажем, что множество всех действительных чисел из $[1,2)$ не может быть перечислено.

Пусть $L = \{r_1, r_2, \dots r_n \dots\}$ произвольный список действительных чисел из множества $[1,2)$, записанных в десятичной системе счисления:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1.r_{11}r_{12}\dots r_{1n}\dots \\ r_2 &= 1.r_{21}r_{22}\dots r_{2n}\dots \\ &\vdots \\ r_m &= 1.r_{m1}r_{m2}\dots r_{mn}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Рассмотрим действительное число a, вида $1.a_1a_2\dots a_n\dots$ где, для каждого $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{если } r_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{если } r_{nn} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $a_n \neq r_{nn}$ и, поэтому, $a \neq r_n$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, a не появляется в списке L. Поэтому не существует списка всех действительных чисел из $[1,2)$; то есть, это множество несчетно. □

A1.1.35 Теорема. Множество, $\mathbb{R}$, всех действительных чисел несчетно.

Доказательство. $\boxed{\text{Предположим}}$, что $\mathbb{R}$ счетно. Тогда пр Предложению A1.1.11 множество всех действительных чисел интервала $[1, 2)$ было бы счетным, что противоречит Лемме A1.1.34. Таким образом, $\mathbb{R}$ несчетно. □

A1.1.36 Следствие. Множество, $\mathbb{I}$, всех иррациональных чисел несчетно.

Доказательство. $\boxed{\text{Предположим}}$, что $\mathbb{I}$ счетно. Тогда $\mathbb{R}$ было бы счетным как объединение двух счетных множеств: $\mathbb{I}$ and $\mathbb{Q}$. Что противоречит предыдущей теореме. □

Используя аналогичное рассуждение, мы получаем следующий результат.

A1.1.37 Следствие. Множество всех трансцендентных чисел несчетно. □

A1.2 Кардинальные числа

В предыдущем разделе мы определили понятия счетной и несчетной бесконечности и подразумевали, без подробных разъяснений, что несчетные множества "больше", чем счетно бесконечные множества. Чтобы объяснить, что мы имели ввиду говоря "больше", нам понадобится следующая теорема.

Дальнейшее изложение основано на книге Халмоша [13]

A1.2.1 Теорема. (Кантор-Шредер-Бернштейн) Пусть S и T - некоторые множества. Если S равномощно некоторому подмножеству T, а T равномощно некоторому подмножеству S, то S и T равномощны.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что S и T не пересекаются. Пусть $f : S \to T$ и $g : T \to S$ - взаимно-однозначные отображения. Нам надо найти биекцию множества S на T.

Мы будем говорить, что элемент s является **родителем** элемента $f(s)$, я $f(s)$ является **отпрыском** s. Также t является родителем $g(t)$, а $g(t)$ - отпрыском t. Каждый элемент $s \in S$ порождает бесконечную последовательность отпрысков: $f(s)$, $g(f(s))$, $f(g(f(s)))$, и т.д. Каждый член такой последовательности будет называться **предком** всех последующих членов последовательности.

Возьмем произвольный элемент $s \in S$. При последовательном нахождении предков этого элемента, может возникнуть три случая:

(i) список предков конечен, и заканчивается элементом из S, не имеющим предка;

(ii) список предков конечен, и заканчивается элементом из T, не имеющим предка;

(iii) список предков бесконечен.

Пусть S_S - множество тех элементов из S, которые "зарождаются"в S; то есть, S_S это множество $S \setminus g(T)$ плюс все его наследники в S. Пусть S_T - множество тех элементов из S, которые "зарождаются"в T; то есть, S_T множество наследников в S множества $T \setminus f(S)$. Пусть S_∞ множество всех элементов из S у которых нет предков без родителей. Тогда S является объединением трех непересекающихся множеств S_S, S_T и S_∞. Аналогично, T является объединением трех, похожим образом определенных, непересекающихся множеств: T_T, T_S, и T_∞.

Ясно, что ограничение f на S_S является биекцией S_S на T_S.

Пусть g^{-1} - обратное отображение к g. Очевидно, что ограничение g^{-1} на S_T является биекцией S_T на T_T.

Наконец, ограничение f на S_∞ является биекцией S_∞ на T_∞.

Определим отображение $h : S \to T$ следующим образом

$$h(s) = \begin{cases} f(s) & \text{если } s \in S_S \\ g^{-1}(s) & \text{если } s \in S_T \\ f(s) & \text{если } s \in S_\infty. \end{cases}$$

Тогда h является биекцией S на T. То есть, S и T равномощны. $\square$

Нашей следующей задачей является определение “кардинальных чисел”.

A1.2.2 Определения. Семейство, $\aleph$, множеств называется **кардинальным числом** если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) Пусть S и T - некоторые множества. Если S и T принадлежат $\aleph$, то $S \sim T$;

(ii) Пусть A и B - некоторые множества. Если A принадлежит $\aleph$, а $B \sim A$, то B тоже принадлежит $\aleph$.

Если $\aleph$ - кардинальное число, а A - некоторое множество из $\aleph$, то мы пишем card $A = \aleph$.

Определения A1.2.2 могут, на первый взгляд, показаться странными. Кардинальное число определяется как семейство множеств. Давайте рассмотрим пару частных случаев:

Если множество A имеет два элемента, мы пишем card $A = 2$; кардинальное число 2 является семейством всех множеств, равномощных множеству $\{1, 2\}$, то есть семейством всех двухэлементных множеств.

Если множество S счетно бесконечно, то мы пишем card $S = \aleph_0$; в этом случае кардинальное число $\aleph_0$ является семейством всех множеств, равномощных $\mathbb{N}$.

Пусть S и T - некоторые множества. Множество S равномощно T тогда и только тогда, когда card $S =$ card T.

A1.2.3 Определения. Мощность $\mathbb{R}$ обозначается через $\mathfrak{c}$; то есть, card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$. Мощность $\mathbb{N}$ обозначается через $\aleph_0$.

Мы использовали символ $\mathfrak{c}$ в Определении A1.2.3, так как мы рассматриваем $\mathbb{R}$ как “континуум”.

Сейчас мы определим отношение порядка на кардинальных числах.

A1.2.4 Определения. Пусть m и n - кардинальные числа. Мы говорим, что кардинал m меньше или равен кардинала n, то есть $m \leq n$, если существуют множества S и T такие, что card $m = S$, card $T = n$, и S равномощно некоторому подмножеству множества T. Далее, мы говорим, что кардинал m строго меньше, чем n, то есть $m < n$, если $m \leq n$ и $m \neq n$.

Так как $\mathbb{N}$ является подмножеством $\mathbb{R}$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ и card $\mathbb{N} = \aleph_0$, и $\mathbb{R}$ іне равномощно $\mathbb{N}$, мы немедленно получаем следующий результат.

A1.2.5 Предложение. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. □

Мы также знаем, что для произвольного множества S, S равномощно некоторому подмножеству $\mathcal{P}(S)$, и S не равномощно самому $\mathcal{P}(S)$, откуда мы выводим следующий результат.

A1.2.6 Теорема. Для любого множества S, card $S <$ card $\mathcal{P}(S)$. □

Следующее является переформулировкой Теоремы Кантора-Шредера-Бернштейна.

A1.2.7 Теорема. Пусть m и n - кардинальные числа. Если $m \leq n$ и $n \leq m$, то $m = n$. □

A1.2.8 Замечание. Заметим, что существует бесконечно много бесконечных кардиналов. Это очевидно из следующего факта:

$$(*) \qquad \aleph_0 = \text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots \qquad \square$$

Следующий результат является немедленным следствием Теоремы A1.2.6.

A1.2.9 Следствие. Не существует наибольшего кардинального числа. □

Заметим, что если множество S состоит из n элементов, то множество всех подмножеств этого множества $\mathcal{P}(S)$ имеет 2^n элементов. Это мотивирует следующее обозначение.

A1.2.10 Определение. Если мощность множества S равна $\aleph$, то мощность $\mathcal{P}(S)$ обозначается через $2^{\aleph}$.

Тогда мы можем переписать выражение $(*)$ вверху как:

$$(**)\qquad \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots .$$

При взгляде на эту последовательность кардинальных чисел возникают следующие вопросы:

(1) Является ли $\aleph_0$ наименьшим кардинальным числом?

(2) Равен ли кардинал $\mathfrak{c}$ какому-либо из кардиналов из этого листа?

(3) Существует ли кардинальное число, находящееся строго между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$?

Эти вопросы, особенно (1) и (3), очень непросты. Их исследование требует глубокого изучения аксиом теории множеств. Мы не можем предложить серьезное обсуждение аксиом теории множеств в этом приложении. Тем не менее, чуть позже, мы коснемся некоторых из этих вопросов.

В заключение этого раздела мы определим мощности некоторых знакомых нам множеств.

A1.2.11 Лемма. Пусть a и b - действительные числа, где $a < b$. Тогда

(i) $[0,1] \sim [a,b]$;

(ii) $(0,1) \sim (a,b)$;

(iii) $(0,1) \sim (1,\infty)$;

(iv) $(-\infty,-1) \sim (-2,-1)$;

(v) $(1,\infty) \sim (1,2)$;

(vi) $\mathbb{R} \sim (-2,2)$;

(vii) $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

Набросок доказательства. (i) заметьте, что $f(x) = a + bx$ определяет взаимно-однозначную функцию из $[0,1]$ на $[a,b]$. (ii) и (iii) доказываются аналогично подбором подходящих функций. (iv) доказывается применением (iii) и (ii). (v) следует из (iv). (vi) следует из (iv) и (v) и замечания, что $\mathbb{R}$ является объединением непересекающихся множеств $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$ и $(1,\infty)$. (vii) следует из (vi) и (ii). $\square$.

A1.2.12 Предложение. Пусть a и b - действительные числа, где $a < b$. Если S - произвольное подмножество $\mathbb{R}$ такое, что $(a,b) \subseteq S$, то $\text{card}\, S = \mathfrak{c}$. В частности, $\text{card}\,(a,b) = \text{card}\,[a,b] = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Используя Лемму A1.2.11 заметим, что

$$\text{card}\, \mathbb{R} = \text{card}\,(a,b) \leq \text{card}\,[a,b] \leq \text{card}\, \mathbb{R}.$$

Поэтому, $\text{card}\,(a,b) = \text{card}\,[a,b] = \text{card}\, \mathbb{R} = \mathfrak{c}$. $\square$.

A1.2.13 Предложение. Мощность множества точек эвклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ равна мощности континуума, то есть $\text{card}\,(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}$.

Набросок доказательства. По Предложению A1.2.12, $\mathbb{R}$ равномощно полуоткрытому интервалу $[0,1)$, и легко показать, что нам достаточно доказать, что $[0,1) \times [0,1) \sim [0,1)$.

Определим $f : [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$ так, что $f(x)$ есть точка $\langle x, 0\rangle$. Тогда f - взаимно-однозначное отображение $[0,1)$ в $[0,1) \times [0,1)$ и, поэтому, $\mathfrak{c} = \text{card}\,[0,1) \leq \text{card}\,[0,1) \times [0,1)$.

По Теореме Кантора-Шредера-Бернштейна, достаточно найти взаимно-однозначное отображение g из $[0,1) \times [0,1)$ в $[0,1)$. Определим

$$g(\langle 0.a_1a_2 \ldots a_n \ldots, 0.b_1b_2 \ldots b_n \ldots, \rangle) = 0.a_1b_1a_2b_2 \ldots a_nb_n \ldots .$$

Очевидно, что g определено корректно (так как каждое действительное число из $[0,1)$ имеет единственное десятичное представление, не оканчивающееся на 99...9...) и является взаимно-однозначным, что завершает доказательство. $\square$

A1.3 Кардинальная Арифметика

Мы начнем с определения суммы кардинальных чисел. Конечно же, в случае конечных кардиналов, это определение должно совпадать с обычным сложением.

A1.3.1 Определение. Пусть α и β - некоторые кардиналы, а A и B множества такие, что $\text{card}\,A = \alpha$ и $\text{card}\,B = \beta$. Тогда **сумма кардиналов α и β** обозначается через $\alpha + \beta$ и равно $\text{card}\,(A \cup B)$.

A1.3.2 Замечание. Для того, чтобы убедиться, что вышеприведенное определение корректно и не зависит от выбора множеств A и B, необходимо убедиться, что если A_1 и B_1 - непресекающиеся множества, а A и B непересекающиеся множества такие, что $\text{card}\,A = \text{card}\,A_1$ и $\text{card}\,B = \text{card}\,B_1$, то $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$; то есть, $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A_1 \cup B_1)$. Поскольку проверка этого утверждения не представляет трудности, мы оставляем ее в качестве упражнения. $\square$

A1.3.3 Предложение. Для любых кардинальных чисел α, β и γ:

(i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(ii) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

(iii) $\alpha + 0 = \alpha$;

(iv) If $\alpha \leq \beta$ то $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Доказательство. Упражняйтесь □

A1.3.4 Предложение.

(i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(iv) Для любого конечного кардинала n, $n + \aleph_0 = \aleph_0$ и $n + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Доказательство.

(i) Список $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$ показывает, что объединение пересечение двух счетно бесконечных множеств - $\mathbb{N}$ и множества отрицательных целых является счетно бесконечным.

(ii) Заметив, что $[-2,-1] \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, мы получаем card $[-2,-1]$ + card $\mathbb{N} \leq$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$. Поэтому, $\mathfrak{c} =$ card $[-2,-1] \leq$ card $([-2,-1] \cup \mathbb{N}) =$ card $[-2,-1]$ + card $\mathbb{N} = \mathfrak{c} + \aleph_0 \leq \mathfrak{c}$.

(iii) Заметьте, что $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} =$ card $((0,1) \cup (1,2)) \leq$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ откуда требуемый результат вытекает немедленно.

(iv) Заметьте, что $\aleph_0 \leq n + \aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ and $\mathfrak{c} \leq n + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, откуда требуемый результат вытекает немедленно. □

Далее мы определим произведение кардинальных чисел.

A1.3.5 Определение. Пусть α и β - произвольные кардинальные числа, а непересекающиеся множества A и B таковы, что card $A = \alpha$ и card $B = \beta$. Тогда **произведение кардинальных чисел α and β** обозначается через $\alpha\beta$ и равно card $(A \times B)$.

Также как и в случае определения суммы кардиналов, необходима рутинная проверка того, что $\alpha\,\beta$ не зависит от выбора множеств A и B.

A1.3.6 Предложение. Для любых кардинальных чисел α, β и γ

(i) $\alpha\beta = \beta\alpha$;

(ii) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;

(iii) $1.\alpha = \alpha$;

(iv) $0.\alpha = 0$;

(v) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

(vi) Для произвольного конечного кардинала n, $n\alpha = \alpha + \alpha + \ldots \alpha$ (n-членов);

(v1i) Если $\alpha \leq \beta$, то $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Доказательство. Упражняйтесь $\square$

A1.3.7 Предложение.

(i) $\aleph_0\,\aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{c}\,\aleph_0 = \mathfrak{c}$;

(iv) Для произвольного конечного кардинала n, $n\,\aleph_0 = \aleph_0$ and $n\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Набросок доказательства. (i) следует из Предложения A1.1.16, (ii) следует из Предложения A1.2.13. Для того, чтобы проверить (iii), заметим, что $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.1 \leq \mathfrak{c}\,\aleph_0 \leq \mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Доказательство (iv) очевидно. $\square$

Следующим шагом является определение степени кардинальных чисел; то есть, если α и β - кардиналы, мы определим α^{β}.

A1.3.8 Определения. Пусть α и β - кардинальные числа, а непересекающиеся множества A и B таковы, что card $A = \alpha$, а card $B = \beta$. Множество всех отображений f из B в A обозначается через A^B. Далее, α^{β} определяется как card A^B.

Как и раньше, нам надо проверить корректность данного определения, то есть, что α^{β} не зависит от выбора множеств A и B. Надо также проверить, что если n и m - конечные кардиналы, A - множество из n элементов, а B - множество из m элементов, то существует в точности n^m различных функций из B в A.

Еще надо уточнить следующее: Если α - кардинал, а A - множество такое, что card $A = \alpha$, то у нас есть два разных опре5деления 2^{α}. Вышеприведенное определение утверждает, что 2^{α} - мощность множества всех отображений из A в двухэлементное множество $\{0, 1\}$. ОС другой стороны, Определение A1.2.10 определяет 2^{α} как card $(\mathcal{P}(A))$. Нам достаточно найти биекцию θ между $\{0, 1\}^A$ и $\mathcal{P}(A)$. Пусть $f \in \{0, 1\}^A$. Тогда $f \colon A \to \{0, 1\}$. Определим $\theta(f) = f^{-1}(1)$. Проверка того, что θ биекция оставляется читателю в качестве упражнения.

A1.3.9 Предложение. Для произвольных кардинальных чисел α, β и γ:

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$;

(ii) $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$;

(iii) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{(\beta\gamma)}$;

(iv) $\alpha \le \beta$ влечет $\alpha^{\gamma} \le \beta^{\gamma}$;

(v) $\alpha \le \beta$ влечет $\gamma^{\alpha} \le \gamma^{\beta}$.

Доказательство. Упражняйтесь □

После Определения A1.2.10 мы задали три вопроса. Теперь мы можем ответить на второй из них.

A1.3.10 Лемма. $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Заметим, что card $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0}$ и card $(0,1) = \mathfrak{c}$. Так как отображение $f\colon (0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, определенное как $f(0.a_1a_2\dots a_n\dots) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\rangle$, является инъекцией, то $\mathfrak{c} \le \aleph_0^{\aleph_0}$.

По Теореме Кантора-Шредера-Бернштейна, для завершения доказательства достаточно найти инъективное отображение g из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $(0,1)$. Если $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\rangle$ - произвольный элемент из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то каждое из $a_i \in \mathbb{N}$, и мы можем написать

$a_i = \dots a_{in}\, a_{i(n-1)}\, \dots a_{i2}\, a_{i1}$, где для некоторого $M_i \in \mathbb{N}$, $a_{in} = 0$, для всех $n > M_i$ [Например, $187 = \dots 0\,0 \dots 0\,1\,8\,7$ и поэтому если $a_i = 187$, то $a_{i1} = 7$, $a_{i2} = 8$, a_{i3}=1 и $a_{in} = 0$, for $n > M_i = 3$.] Теперь определим отображение g следующим образом

$$g(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\rangle) = 0.a_{11}a_{12}a_{21}a_{13}a_{22}a_{31}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{16}\dots.$$

(Сравните с доказательством Леммы A1.1.13.)

Очевидно, что g инъекция, что завершает доказательство. $\square$

Сейчас мы сформулируем замечательный результат, впервые доказанный Кантором.

A1.3.11 Теорема. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Сначала заметим, что по Лемме A1.3.10, $2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. То есть, нам осталось проверить, что $\mathfrak{c} \le 2^{\aleph_0}$. Для этого достаточно найти инъективное отображение f из множества $[0,1)$ в $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Каждый элемент x из $[0,1)$ имеет представление в двоичной системе счисления $x = 0.x_1x_2\dots x_n\dots$, где каждое из x_i равно 0 или 1. Двоичное представление единственно, за исключением случаев, когда она заканчивается бесконечной последовательностью единиц; например,

$$1/4 = 0.0100\dots0\dots = 0.0011\dots1\dots.$$

Если договориться, что в подобных случаях мы будем выбирать представление, оканчивающееся нулями, то такое представление чисел из $[0,1)$ единственно. Определим отображение $f\colon [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, которое отображает $x \in [0,1)$ в функцию $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, определенную как $f(x)(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Чтобы убедиться, что f инъективно, рассмотрим произвольные x и y из $[0,1)$ где $x \neq y$. Тогда $x_m \neq y_m$, для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому, $f(x)(m) = x_m \neq y_m = f(y)(m)$. Следовательно, две функции $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ и $f(y)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ не равны. Следовательно, f инъективно, как и требовалось. □

A1.3.12 Следствие. Если α - кардинальное число такое, что $2 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$, то $\alpha^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Заметьте, что $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \alpha^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. □

Приложение 2: Личности в Топологии

Для написания этого приложения использовались в основном *The MacTutor History of Mathematics Archive* [30] и Bourbaki [6]. Честно говоря, весь материал этого приложения должен рассматриваться как прямые цитаты из этих источников, хотя иногда я слегка отклонялся от прямого цитирования и включал только материал, который считал уместным в этой книге.

Рене Луи Бэр

Рене Луи Бэр родился в Париже в 1874 году. В 1905 он получил должность на Факультете Науки в Дижоне, где позднее, в 1907 году, стал Прфессором Анализа. Он оставил работу в 1925 после длительной болезни и скончался в 1932 году. Отзывы о его преподавании сильно разнятся, может быть из-за плохого здоровья: "Некоторые описывали его лекции как очень четкие и ясные, другие утверждали, что то, чему он учит настолько сложно, что находится за пределами человеческого понимания."

Стефан Банах

Стефан Банах родился в Островско, Австро-Венгрия – ныне Польша – в 1892 году. Он преподавал математику в Львовском Техническом Университете начиная с 1920 года, где он защитил свою докторскую диссертацию, которая, как говорится, ознаменовала рождение функционального анализа. В своей диссертации, написанной в 1920 году, он аксиоматически определил то, что сегодня называется Банаховым пространством. Название ’Банахово пространство’ было введено Фреше. В 1924 году Банах получил должность профессора. Продолжая публиковать важные научные труды, он также написал школьные учебники по арифметике, геометрии и алгебре. Теорема Банаха об Открытом Отображении, доказаная в 1929 году, использует теоретико-множественные понятия, введенные Бэром в его диссертации, защищенной в 1899 году. Парадокс Банаха-Тарского появился в совместной статье этих математиков (Банах и Альфред Тарский) в 1926 году в Fundamenta Mathematicae озаглавленный как *Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent*. Этот

удивительный парадокс показывает, что шар может быть разделен на подмножества такие, что сгруппировав из по-другому, можно получить два шара, идентичные первому. Для такого разделения применяется Аксиома Выбора, что послужило причиной сомнения в этой аксиоме некоторых математиков. Парадокс Банаха-Тарского был главным достижением аксиоматической теории множеств того периода. В 1929 году, совместно с Гуго Штейнгаузом, он основал новый журнал *Studia Mathematica* , а Банах и Штейнгауз стали его редакторами. Редакционной политика заключалась . . . в фокусировании на исследованиях в области

функционального анализа и смежных областей. Стиль работы Банаха был очень необычным. Он любил проводить математические исследования со своими коллегами в различных кафе города Львова. Станислав Улам вспоминает частые собрания в Шотландском кафе (cf. Mauldin [24]): “Было очень трудно пересидеть или перепить Банаха во время этих собраний. Мы обсуждали проблемы, предложенные прямо там, в течении долгих часов, без какого-либо прогресса. Обычно, на следующий день Банах появлялся с несколькими небольшими бумажками,

содержащими наброски найденного доказательства.” В 1939 году, прямо перед началом Второй Мировой Войны, Банах был избран президентом Польского Математического Общества. Окупация Львова нацистами в июне 1941, создала очень тяжелые условия жизни для Банаха. К концу 1941 года Банах подрабатывал кормлением вшей в Германском институте инфекционных заболеваний. Это было его единственным источником дохода на протяжении всей оккупации

Львова, вплоть до июля 1944 года. Банах умер в 1945 году.

Луитзен Эгбертус Ян Брауэр

Луитзен Эгбертус Ян Брауэр родился в 1881 году в Роттердаме, Нидерландах. Будучи студентом Амстердамского университета он получил новые результаты по непрерывным движениям на четырехмерной сфере. Он получил степень мастера в 1904 году. Докторская диссертация Брауэра, опубликованная в 1907 году, внесла существенный вклад в дискуссию между Бэртраном Расселом и Жюлем Анри Пуанкаре о логических основах математики. Брауэр вскоре обнаружил, что его философские идеи вызвали споры и разногласия. Брауэр приложил немало усилий по изучению различных проблем из знаменитого списка проблем Давида Гильберта, предложенного им на Международном Математиче Конгрессе в Париже в 1900 году. В частности, Брауэр предпринял попытки доказательства пятой проблемы Гильберта о группах Ли. Его доклад на Международно Математическом Конгрессе в Риме в 1908 году был посвящен топологическим основам групп Ли. Брауэр был избран членом Королевской Академии Наук в 1912 году и в том же году получил должность экстраординарного Профессора по теории множеств, теории функций и аксиоматическим основам математики в Амстердамском Университете, где он проработал до 1951 года. Бартел Леендерт ван дер Варден, который учился в Амстердаме с 1919 по 1923 годы, писал о Брауэре: *Брауэр приезжал в университет один раз в неделю читать лекции, сам он жил в Ларене. Вообще говоря это не разрешалось, он должен был жить в Амстердаме, но для него делалось исключение. ... Однажды на лекции я задал ему вопрос. Перед следующей лекцией его ассистент сказал мне, что Брауэр не любит, когда ему задают вопросы на лекции. Он просто не желал отвечать на них, он всегда смотрел на доску и никогда на студентов.* Несмотря на то что наиболее значительный вклад он внес именно в топологию, Брауэр никогда не читал курсов по топологии, он читал только курсы по основаниям интуиционизма. По-видимому, он больше не был убежден в верности своих результатов по топологии, так как их доказательства не были корректными с точки зрения интуиционизма, и он оценивал все, что сделал в топологии, свой величайший вклад, как не вполне корректный с точки зрения своей философии. Как уже было упомянуто, Брауэр считается одним из основателей топологии. Почти все его работы по топологии относятся к раннему периоду его карьеры и получены между 1909 и 1913 годами. Он открыл характеристики топологических отображений на декартовой плоскости и получил рад теорем о неподвижной точке. Его первая теорема о неподвижной точке, в которой показано, что сохраняющее ориентацию непрерывное взаимно-однозначное отображение сферы в себя имеет неподвижную точку, появилось в результате его исследований по пятой проблеме Гильберта. Изначально доказаная для 2-мерной сферы, впоследствии она была обобщена Брауэром на случай сфер произвольных размерностей. Другим его результатом исключительной важности является доказательство инвариантности топологической размерности. Наряду с доказательством важных результатов в топологии, Брауэр также развил методы, которые стали стандартными

инструментами в топологических исследованиях. В частности, он использовал симплициальную аппроксимацию, при помощи которой непрерывные отображения аппроксимируются при помощи кусочно-линейных. Он также ввел понятия степени отображения, обобщил Теорему Жордана о кривых на случай n-мерных пространств и определил топологические пространства в 1913 году. Ван дер Варден, в вышеприведенной цитате говорит, что Брауэр не читал лекций по своим результатам в топологии так как они не согласовывались с математическим интуиционизмом. На самом деле, Брауэр широко известен как основатель доктрины математического

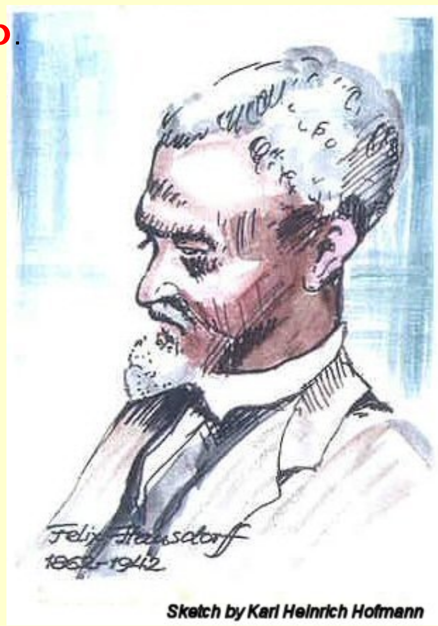
интуиционизма, который рассматривает математику как построение умственных конструкций, подчиняющихся самоочевидным законам. Его доктрина существенно отличалась от формализма Гильберта и логицизма Рассела. Его докторская диссертация 1907 года подвергла критике логические основания математики и ознаменовала зарождение Школы Интуиционизма. В своей статье 1908 года *Ненадежность Логических Принципов* Брауэр отвергает правомерность использования Закона Исключенного Третьего в математических доказательствах. Этот принцип утверждает, что произвольное математическое утверждение либо истинно, либо ложно. В 1918 он опубликовал систему теории множеств, развитую без принципа исключенного третьего. В 1932 он был принят в рыцари Ордена Голландского Льва. Он активно участвовал в основании нового журнала, Compositio Mathematica, в 1934. Во время второй мировой войны Брауэр активно помогал Голландскому Сопротивлению, в частности, он поддерживал еврейских студентов в этот тяжелый период. После выхода в отставку в 1951 году, Брауэр читал лекции в Южной Африке в 1952 году, и в США и Канаде в 1953 году. В 1962 году, несмотря, на то, что ему было за 80, ему предложили должность в Монтане. Он погиб в 1966 году в Бларикуме, Нидерланды, в результате автомобильной катастрофы.

Морис Фреше

Морис Фреше родился во Франции в 1878 году. Он ввел понятия метрического пространства и компактности в (см Главу 7) в своей диссертации 1906 года. Он работал в ряде университетов, в том числе в Парижском Университете с 1928 по 1948 год. Его исследования внесли значительный вклад в топологию, теорию вероятностей и статистику. Он скончался в 1973 году.

Феликс Хаусдорф

Одним из выдающихся математиков первой половины двадцатого века был **Феликс Хаусдорф**. Ему принадлежат выдающиеся работы по топологии, метрическим пространствам, функциональному анализу, алгебрам Ли и теории множеств. Он родился в Бреслау, Германия (ныне Вроцлав, Польша) в 1868 году. Он закончил университет Лейпцига и работал там до 1910 года, когда он получил позицию в университете Бонна. В 1935, как еврей, он вынужден был уволиться согласно Нацистским Нюрнбергским Законам. Он продолжал свои исследования по математике на протяжении нескольких последующих лет, но мог



публиковаться только за пределами Германии. В
1942 он должен был быть направлен в лагерь интернированных. Чтобы избежать этого, он, его жена и сестра совершили самоубийство.

Вацлав Серпинский

Вацлав Серпинский родился в 1882 году в Варшаве, Российская Империя (ныне Польша). Спустя пятьдесят лет после окончания Варшавского Университета, Серпинский вспоминал о проблемах возникших в связи с тем, что он, поляк, получал образование во время русской оккупации: *. . . мы должны были посещать годичные лекции по русскому языку. . . . Каждый из студентов считал честью для себя получение наихудшего результата по этому предмету. . . . я не ответил ни на один вопрос . . . и получил неудовлетворите отметку. ... Я выдержал все экзамены, после чего лектор посоветовал мне пересдать экзамен по русскому, иначе я не получу диплома по математике. . . . Я отказался, сказав, что это будет впервые в истории Университета, что некто, получивший отличные отметки по всем предметам, защитивший диссертацию и получивший золотую медаль, не получит степени кандидата математических наук, а получит степень 'реального студента' из-за отметки по русскому языку. Серпинском повезло, что лектор поменял оценку по русскому языку на 'хорошо', так что он получил свою степень.* Серпинский окончил университет в 1904 году и стал работать школьным учителем математики и физики в женской гимназии. Однако, когда школа была закрыта в результате забастовки, Серпинский отправился в Краков для работы над докторской степенью. В Ягелонском Университете в Кракове он получил докторскую степень и в 1908 году получил назначение в Львовский Университет. В 1907 году Серпинский впервые
заинтересовался Теорией Множеств. Он случайно наткнулся на теорему, в которой утверждалось, что точки плоскости могут быть определены одним параметром. Он написал Тадеушу Банашевичу, спрашивая, кат такое может быть возможно. В ответ он получил одно слово 'Кантор'. Серпинский начал изучать теорию множеств и в 1909 году, впервые в истории, прочитал курс

лекций, полностью посвященный теории множеств. С 1908 по 1914 годы, во время работы в Львовском Университете, он опубликовал три книги и большое количество научных статей. Книги назывались *Теория иррациональных чисел* (1910), *Наброски Теории Множеств* (1912) и *Теория Чисел* (1912). Когда началась первая мировая война в 1914 году, Серпинский и его семья находились в России. Серпинский был интернирован в Вятку. Однако, Дмитрий Федорович Егоров и Николай Николаевич Лузин узнав, что он был интернирован, выхлопотали для него разрешение на проживание в Москве. Серпинский провел остаток войны в Москве, работая с Лузиным. Вместе они начали изучение аналитических множеств. После завершения Первой Мировой Войны в 1918 году, Серпинский вернулся во Львов. Однако, вскоре после этого, он принял приглашение занять должность в Варшавском Университете. В 1919 году он получил там должность профессора, где и провел всю оставшуюся жизнь. В 1920 году Серпинский, совместно со своим бывшим студентом Стефаном Мазуркевичем, основали матиматический журнал Fundamenta Mathematica. Серпинский был редактором этого журнала, который специализировался по теории множеств. Начиная с этого времени, Серпинский занимался в основном теорией множеств, а также точечно-множественной топологией и функциями действительной переменной. В теории множеств он внес значительный вклад в изучение аксиомы выбора и континуум гипотезы. Он изучал кривую Серпинского, которая является замкнутой кривой, содержащей все внутренние точки квадрата – "заполняющая пространство кривая". Длина этой кривой равна бесконечности, а охватываемая площадь есть 5/12 от площади квадрата. В честь Серпинского названы два фрактала – треугольник Серпинского и ковер Серпинского. Серпинский продолжал
сотрудничество с Лузиным по изучению аналитических и проективных множеств. Серпинский также принимал активное участие в развитии математики в Польше. В 1921 году он был избран в Польскую Академию и получил должность декана в Варшавском Университете. В 1928 году он стал вице-президентом Варшавского Научного Общества и был избран президентом Польского Математического Общества. В 1939 году, с началом второй мировой войны, жизнь в Варшаве сильно изменилась. Серпинский продолжал работать в 'Подпольном Варшавском Университете' в то время как официально он был служащим в муниципалитете

Варшавы. Он продолжал публиковаться так как ему удавалось переправлять свои статьи в Италию. Каждая из этих статей заканчивалась словами: *Доказательства этих теорем будут опубликованы в Fundamenta Mathematica*, что означало 'Польша выживет'. После восстания 1944 года нацисты сожгли его дом, уничтожив его библиотеку и личную переписку. Серпинский рассказал об этих трагических событиях на лекции, прочитанной в 1945 году. Он рассказывал о своих студентах, которые погибли во время войны: *В июле 1941 года один из моих бывших студентов Станислав Ружевич был зверски убит. Он был профессором в Университете Яна Казимера во Львове . . . выдающимся математиком и замечательным педагогом. В 1943 был убит один из наиболее выдающихся моих студентов, Станислав Сакс. Он работал ассистентом профессора в Варшавском Университете, и был одним из лидирующих экспертов в мире по теории интеграла. . . В 1942 году был убит другой мой студент Адольф Линденбаум. Он работал ассистентом профессора в Варшавском Университете, и опубликовал замечательные работы по теории множеств.* Вспомнив коллег, погибших во время войны, таких как Юлиус Павел Шаудер, а также тех кто умер из-за войны, таких как Самуэль Дикстейн и Станислав Заремба, Серпинский продолжал: *Таким образом, более половины математиков, преподававших в наших университетах были убиты. Это было огромной потерей для польской математики, которая активно развивала такие области как теория множеств и топология . . . В дополнение к людским потерям, польская математика пострадала также в результате варварства нацистов, которые сожгли Варшавскую Библиотеку, в которой хранились тысячи томов математических книг, журналов и репринтов различных авторов. Почти все издания Fundamenta Mathematica (32 тома) и десять томов Математической Монографии были полностью сожжены. Также в огне погибли частные библиотеки всех четверых профессоров математики Варшавского Университета, а также их манускрипты и наброски книг, написанные во время войны.* Серпинский является автором огромного количества статей (724) и 50 книг. Он вышел в отставку в 1960 году, но продолжал проводить семинары по теории чисел в Польской Академии Наук вплоть до 1967 года. Он также был главным редактором Acta Arithmetica, основанным в 1958 году, и членом редакции Rendiconti dei Circolo Matimatico di Palermo, Compositio Mathematica и Zentralblatt für Mathematik. Анджей Роткевич, один из бывших студентов Серпинского, писал: *Серпинский обладал великолепным здоровьем и очень жизнерадостным харакрером. . . . Он мог работать при любых условиях.* Серпинский скончался в 1969 году.

Приложение 3: Теория Хаоса и Динамические Системы

Введение

В этом приложении мы дадим почувствовать вкус теории хаоса и динамических систем, но не более. Большая часть материала содержится в упражнениях. В некоторых местах требуется знание математического анализа. Если вы еще не изучали анализ, вы можете пропустить это приложение полностью, либо просто перелистать его, чтобы получить представление о материале.

A3.1 Итерации и Орбиты

A3.1.1 Определение. Пусть S- множество, а f - функция, отображающее множество S в себя; то есть, $f\colon S \to S$. Функции $f^1, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots$ определяются по индукции следующим образом:
$f^1\colon S \to S$ определяется как $f^1(x) = f(x)$; то есть $f^1 = f$;
$f^2\colon S \to S$ определяется как $f^1(x) = f(f(x))$; то есть $f^2 = f \circ f$;
$f^3\colon S \to S$ определяется как $f^3(x) = f(f(f(x)))$; то есть, $f^3 = f \circ f \circ f = f \circ f^2$;
если f^{n-1} определена
$f^n\colon S \to S$ определяется как $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$; то есть, $f^n = f \circ f^{n-1}$.
Каждая из функций $f^1, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots$ называется **итерацией** функции f.

Заметим, что $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, для $n, m \in \mathbb{N}$.

A3.1.2 Определения. Пусть f - функция, отображающее множество S в себя. Если $x_0 \in S$, тогда последовательность $x_0, f^1(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots$ называется **орбитой** точки x_0. Точка x_0 называется **начальной точкой** орбиты.

Существуют разные типы орбит, наиболее важным из которых является неподвижная точка.

A3.1.3 Определение. Пусть f - отображение множества S в себя. Точка $a \in S$ называется **неподвижной точкой** отображения f если $f(a) = a$.

A3.1.4 Пример. Мы можем найти неподвижные точки функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ графически, просто нарисовав кривую $y = f(x)$ и найдя ее пересечения с $y = x$. В точках пересечения, и только в них, мы имеем $f(x) = x$.

$\square$

А3.1.5 Пример.

$\square$

Упражнения A3.1

1. Пусть функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определены как $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = x \sin x$, and $h(x) = x^2 - 2$, для всех $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Вычислите $f^1(x)$ и $f^2(x)$.

   (b) Вычислите $g^2(x)$ и $g^2(1)$.

   (c) Вычислите $h^2(x)$ и $h^3(x)$.

2. (a) Пусть $C(x) = \cos(x)$, посчитайте с помощью калькулятора [в радианах с точностью до 4 десятичных знаков]

   $C^{10}(123)$, $C^{20}(123)$, $C^{30}(123)$, $C^{40}(123)$, $C^{50}(123)$, $C^{60}(123)$, $C^{70}(123)$, $C^{80}(123)$, $C^{90}(123)$, $C^{100}(123)$, $C^{100}(500)$ и $C^{100}(1)$. Что вы заметили?

   (b) Пусть $S(x) = \sin(x)$, посчитайте с помощью калькулятора $S^{10}(123)$, $S^{20}(123)$, $S^{30}(123)$, $S^{40}(123)$, $S^{50}(123)$, $S^{60}(123)$, $S^{70}(123)$, $S^{80}(123)$, $S^{90}(123)$, $S^{100}(123)$. Что вы заметили?

3. Пусть функция $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой $h(x) = x^2$, для всех $x \in \mathbb{R}$. Вычислите орбиты функции h для каждого из следующих начальных значений: 0, 1, -1, 0.5, 0.25.

4. Найдите все неподвижные точки функции f из Упражнения 1 вверху.

5. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой $f(x) = x^3 - 3x$. Найдите все неподвижные точки функции f.

A3.2 Неподвижные Точки и Периодические Точки

A3.2.6 Определение. Пусть f - отображение множества S в себя. Точка $a \in S$ называется **потенциально неподвижной** если a не является неподвижной точкой, но некоторая точка на орбите a является неподвижной.

А3.2.1 Определения. Пусть f - отображение множества S в себя. Если $x \in S$, то точка $x \in S$ называется **периодической** если существует натуральное p такое, что $f^p(x) = x$. Наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(x) = x$, называется **простым периодом** x.

А3.2.2 Определение. Пусть f - отображение множества S в себя. Точка $x_0 \in S$ называется **потенциально периодической** если x_0 сама не периодическая, но некоторая точка на ее орбите периодическая.

А3.2.3 Замечание. Мы видели, что точки могут быть неподвижными, потенциально неподвижными, периодическими, потенциально периодическими. Однако, важно понимать, что большинство точек не являются таковыми. □

Упражнения А3.2

1. Проверьте, что точка -1 является потенциально неподвижной для функции $f(x) = x^2$.

2. Найдите потенциально неподвижные точки функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенной как $f(x) = |x|$.

3. . Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$. Проверьте, что $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ и $f(2) = 0$, то есть орбитой точки 0 является $0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Следовательно, 0 - периодическая точка с простым периодом 3.

4. Докажите, что если x - периодическая точка функции $f: S \to S$ с простым периодом m, то орбита x содержит в точности m точек.

5. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой $f(x) = x^2 - 1$. Проверьте, что точки $\sqrt{2}$ и 1 потенциально периодические.

6. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную как $f(x) = |1 - x|$.

    (i) найдите все неподвижные точки f.

    (ii) Если m - нечетное целое, что можно сказать об орбите m?

    (iii) Если m - четное целое, что можно сказать об орбите m?

A3.3 Фазовые Портреты, Притягивающие и Отталкивающие Неподвижные Точки

Мы собираемся изучать динамические системы, то есть, процессы в движении. Такими процессами являются, например, движения планет, изменения погоды, рост населения итп. Некоторые утверждают, что динамические системы могут помочь играть на бирже ценных бумаг.

Очень хорошим способом изображения всех орбит динамической системы является фазовый портрет системы. Это рисунок орбит на действительной прямой.

На фазовом портрете мы изображаем неподвижные точки как **жирные точки**, а движение вдоль орбит **стрелками**.

A3.3.1 Пример. Если $f(x) = x^3$, то неподвижными точками являются 0, 1, и -1. Если $|x_0| < 1$, то орбита x_0 является последовательностью, стремящейся к 0; мы это запишем как $f^n(x_0) \to 0$. Если $|x_0| > 1$, тогда орбитой является последовательность (расходящаяся), сходящаяся к ∞; то есть, $f^n(x_0) \to \pm\infty$. Фазовый портрет приведен внизу:

□

A3.3.2 Определение. Пусть a - неподвижная точка функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Точка a называется **притягивающей неподвижной точкой** f если существует открытый интервал I, содержащий a, такой, что если $x \in I$, то $f^n(x) \to a$ при $n \to \infty$.

A3.3.3 Определение. Пусть a - неподвижная точка функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Точка a называется **отталкивающей неподвижной точкой** f если существует открытый интервал I, содержащий a, такой, что если $x \in I$ где $x \neq a$, то существует целое n такое, что $f^n(x) \notin I$.

A3.3.4 Пример. Заметим, что 0 является притягивающей неподвижной точкой для $f(x) = x^3$, а -1 и 1 - отталкивающими неподвижными точками для этой же функции. □

A3.3.5 Определение. Неподвижная точка, не являющаяся ни отталкивающей, ни притягивающей называется **нейтральной неподвижной точкой**.

Упражнения A3.3

1. Проверьте, что рисунок внизу является фазовым портретом функции $f(x) = x^2$ и определите к какому типу относится каждая из неподвижных точек.

2. Нарисуйте фазовые портреты для каждой из следующих функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определите к какому типу относится каждая из неподвижных точек.

   (i) $f(x) = -x^3$.

   (ii) $f(x) = 4x$.

   (iii) $f(x) = x - x^2$.

   (iv) $f(x) = \sin x$.

3. Пусть $D\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ - **удваивающая функция**, определенная выражением

$$D(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

   [Мы могли бы определить D короче - $D(x) = 2x \pmod 1$.]

   (i) Проверьте, что точка $\frac{1}{99}$ является периодической и найдите ее простой период.

   (ii) Объясните, почему $\frac{1}{n}$ для каждого натурального n является либо периодической, либо потенциально периодической точкой.

   (iii) Объясните, почему $\frac{1}{2^n}$ - потенциально неподвижная точка для каждого натурального n.

   (iv) Запишите в явном виде формулы для $D^2(x)$ и $D^3(x)$, где $0 \le x < 1$.

   (v) Найдите все неподвижные точки D^2 и D^3.

4. Нарисуйте фазовый портрет функции $f(x) = 2x(1-x)$. [Это пример так называемой **логистической функции** которая естественным образом возникает в демографии и экологии.]

A3.4 Графический Анализ

A3.4.1 Замечание. До сих пор мы использовали фазовые портреты для того, чтобы определить, является ли точка x_0 неподвижной, периодической, потенциально периодической итп. Этот метод особенно полезен в случаях размерности больше одного. Но для функций вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мы можем использовать **графический анализ**. Это делается следующим образом.

Пусть для заданной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нам надо определить тип точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Для этого мы находим орбиты точек a, находящихся рядом с x_0.
Сначала мы рисуем график функции f и накладываем на него график функции $y = x$.

Чтобы найти орбиту точка a, отмечаем точку (a, a). Далее, проводим через нее ветикальную прямую до пересечения с графиком f в точке $(a, f(a))$. Затем, через полученную точку проводим горизонтальную прямую до пересечения с графиком $y = x$ в точке $f(a), f(a)$. Опять, через полученную точку проводим вертикальную прямую до пересечения с f в точке $(f(a), f^2(a))$. А затем, через полученную точку проводим горизонтальную прямую до пересечения с графиком $y = x$ в точке $(f^2(a), f^2(a))$. Мы продолжаем этот процесс, а точки a, $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $\ldots$ образуют орбиту a. $\square$

A3.4.2 Пример. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную формулой $f(x) = x^4$. Нарисуем график этой функции и наложим на него прямую $y = x$. Для нахождения неподвижных точек решаем уравнение $f(x) = x$; то есть, решаем $x^4 = x$.

Легко видеть, что неподвижными точками являются 0 и 1. Проведем графический анализ близлежащих к ним точек, как описано вверху. Диаграмма внизу показывает, что происходит рядом с точкой 1.

$\square$

Следующие примеры демонстрируют графический анализ для некоторых функций, чтобы показать, как сильно могут отличаться результаты анализа. А заодно они помогут вам самим приобрести навыки графического анализа.

A3.4.3 Пример.

На рисунке вверху $f(x) = \sin x + x + 2$.

$\square$

A3.1.16 Пример.

На рисунке вверху $f(x) = x^2 - 1.5$.

Упражнения А3.4

1. При помощи графического анализа определите тип каждой из неподвижных точек функции $f(x) = x^4$.

2. Используйте графический анализ для описания орбит функции $f(x) = 2x$ и для определения типа ее неподвижной точки.

3. Найдите неподвижные точки функции $f(x) = \sqrt{x}$ и, используя графический анализ, определите их типы.

4. Используйте графический анализ для описания всех орбит функции $f(x) = x - x^2$.

5. Используйте графический анализ для описания всех орбит функции $f(x) = e^x$.

6. Пусть $f(x) = |x - 2|$. Используйте графический анализ для описания всех орбит функции f. Было бы поучительно использовать разные цвета; например, один цвет для периодических орбит, другой - для потенциально периодических орбит, а третий для потенциально неподвижных орбит.

7. Пусть $D : [0, 1) \to [0, 1)$ - удваивающая функция, определенная как $D(x) = 2x$ mod(1).

   (i) Докажите, что $x \in [0, 1)$ является рациональным числом тогда и только тогда, когда x является периодической или потенциально периодической точкой D.

   (ii) Проверьте, что множеством всех периодических точек D является

   $$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{0, \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2}{2^n - 1}, \frac{3}{2^n - 1}, \dots, \frac{2^n - 2}{2^n - 1}\right\}.$$

   [Подсказка. Может оказаться полезным нахождение формулы для D^n для нахождения ее точек пересечения с $y = x$.]

   (iii) Проверьте, что множество периодических точек D плотно в $[0, 1)$. [Мы увидим, что это является одним из двух условий хаотичности динамической системы $([0, 1), D)$.]

А3.5 Бифуркация

А3.5.1 Замечание. Было бы естественно спросить, каждая ли непрерывная функция $f\colon S \to \mathbb{R}$ имеет неподвижную точку, где $S \subseteq \mathbb{R}$? Ответом конечно же является $\boxed{\text{нет}}$. Например, если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена как $f(x) = x+1$, то, очевидно, у нее нет неподвижных точек. То есть это замечательно, что мы можем гарантировать существование неподвижных точек для $\boxed{\text{всех}}$ непрерывных функций из $[0,1]$ в себя. Более точно, мы уже доказали следующее следствие:

5.2.11 Следствие. (Теорема о Неподвижной Точке) Пусть f - непрерывное отображение из $[0,1]$ в себя. Тогда существует точка $z \in [0,1]$ такая, что $f(z) = z$.

Конечно же вышеприведенный результат не позволяет нам найти неподвижную точку, он утверждает, что существует по крайней мере одна такая точка.

Было бы хорошо иметь простой способ определения типа неподвижной точки. Для "хороших"функций в этом смысле могут оказаться полезными Теоремы А3.5.2 и А3.5.3. $\square$

А3.5.2 Теорема. Пусть S - интервал в $\mathbb{R}$, а a - точка из внутренности интервала S, являющаяся неподвижной точкой функции $f\colon S \to \mathbb{R}$. Если f - дифференцируема в a и $|f'(a)| < 1$, то a - притягивающая неподвижная точка для f.

Доказательство. Так как $|f'(a)| < 1$, мы имеем $|f'(a)| < k < 1$, где k - положительное действительное число, определенное как $k = \frac{|f'(a)|+1}{2}$.

По определению, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Поэтому для x “достаточно близких” к a, мы имеем $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \leq k$; точнее, существует интервал $I = [a-\delta, a+\delta]$, для некоторого $\delta > 0$, такой, что $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \leq k$, для всех $x \in I$ и $x \neq a$.

Так как a - неподвижная точка, $f(a) = a$. Поэтому

$$|f(x) - a| \leq k|x-a|\,, \quad \text{для всех } x \in I. \tag{1}$$

Следовательно, $f(x)$ ближе к a, чем x и, поэтому, $f(x)$ тоже лежит в I. То есть, мы можем повторить это рассуждение, заменив x на $f(x)$ и получить

$$|f^2(x) - a| \le k|f(x) - a|\,, \quad \text{для всех } x \in I. \tag{2}$$

Из (1) и (2), получаем

$$|f^2(x) - a| \le k^2|x - a|\,, \quad \text{для всех } x \in I. \tag{3}$$

Заметив, что $|k| < 1$ влечет $k^2 < 1$, опять повторим это рассуждение . По индукции получим

$$|f^n(x) - a| \le k^n|x - a|\,, \quad \text{для всех } x \in I \text{ и } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Так как $|k| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$. Из (4) следует, что $f^n(x) \to a$ при $n \to \infty$. Мы доказали, что a - притягивающая неподвижная точка. $\square$

Доказательство Теоремы A3.5.3 аналогично доказательству Теоремы A3.5.2 и оставляется в качестве упражнения.

A3.5.3 Теорема. Пусть S - интервал в $\mathbb{R}$, а a - точка из внутренности интервала S, являющаяся неподвижной точкой функции $f\colon S \to \mathbb{R}$. Если f - дифференцируема в a и $|f'(a)| > 1$, то a - отталкивающая неподвижная точка для f.

A3.5.4 Замечание. Важно отметить, что Теоремы A3.5.2 и A3.5.3 не дают $\boxed{\text{необходимых и достаточных}}$ условий. Они утверждают, что $\boxed{\text{если}}$ f' существует и $|f'(x)| < 1$ в интервале, содержащем неподвижную точку a, то a - притягивающая неподвижная точка; и $\boxed{\text{если}}$ $|f'(x)| > 1$ в интервале, содержащем неподвижную точку a, то a отталкивающая неподвижная точка. Если ни одно из этих условий не выполняется, мы не можем сказать ничего! Например, может случиться так, что f не дифференцируема в a, но a является притягивающей неподвижной точкой для f. (Например для $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ для которой 0 является притягивающей неподвижной точкой.)

Даже если f - дифференцируема в a, Теоремы A3.1.17 и A3.1.18 не могут сказать ничего в случае $f'(a) = 1$. Рассмотрим, например, $f(x) = \sin x$. Эта функция дифференцируема в 0 с $f'(0) = \cos(0) = 1$. Поэтому Теоремы A3.1.17 и A3.1.18 не позволяют ничего сказать. Однако, 0 **является** притягивающей неподвижной точкой для f. $\square$

A3.5.5 Замечание. Одним из самых важных семейств функций в этой теории является семейство **квадратичных отображений** $Q_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $c \in \mathbb{R}$, и $Q_c(x) = x^2 + c$. Удивительным свойством этих отображений является то, что динамика Q_c меняется с изменением c. Следующая теорема показывает это. Мы оставляем доказательство теоремы читателям, в качестве упражнения.

A3.5.6 Теорема. (Первая Теорема Бифуркации) Пусть Q_c - квадратичная функция, где $c \in \mathbb{R}$.

(i) Если $c > \frac{1}{4}$, то все орбиты сходятся к бесконечности; то есть, для всех $x \in \mathbb{R}$, $(Q_c)^n(x) \to \infty$ при $n \to \infty$.

(ii) Если $c = \frac{1}{4}$, то Q_c имеет в точности одну неподвижную точку в $x = \frac{1}{2}$, являющуюся нейтральной.

(iii) Если $c < \frac{1}{4}$, то Q_c имеет две неподвижные точки - $a_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ и $a_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$.

  (a) Точка a_+ всегда отталкивающая.

  (b) Если $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, то a_- - притягивающая точка.

  (c) Если $c < -\frac{3}{4}$, то a_- - отталкивающая точка.

A3.5.7 Замечание. Термин **бифуркация** означает разделение на два. В вышеприведенной теореме мы видели, что при $c > \frac{1}{4}$ неподвижных точек не существует; при $c = \frac{1}{4}$ существует в точности одна неподвижная точка; при $c < \frac{1}{4}$ эта неподвижная точка разделяется на две — a_+ и a_-. Мы скажем больше о бифуркации чуть позже.

A3.5.8 Определение. Пусть f - функция, отображающая множество S в себя. Если у точки $x \in S$ имеется простой период m, то орбитой x является $\{x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\}$ и эта орбита называется **m-циклом**.

A3.5.9 Определения. Пусть a - периодическая точка функции $f\colon S \to S$, с простым периодом m, $m \in \mathbb{N}$. [То есть, a - неподвижная точка функции $f^m\colon S \to S$.] Точка a называется **притягивающей периодической точкой** функции f, если она является притягивающей неподвижной точкой функции f^m. Аналогично, a называется **отталкивающей периодической точкой** функции f, если она является отталкивающей неподвижной точкой функции f^m.

Следующая теорема оставляется в качестве упражнения.

A3.5.10 Теорема. (Вторая Теорема Бифуркации) Пусть Q_c - квадратичная функция, где $c \in \mathbb{R}$.

(a) Если $-\frac{3}{4} \leq c < \frac{1}{4}$, то у Q_c не существует 2-циклов.

(b) Если $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, то Q_c имеет притягивающий 2-цикл, $\{q_-, q_+\}$, где $q_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c-3})$ и $q_- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c-3})$.

(c) Если $c < -\frac{5}{4}$, то Q_c имеет отталкивающий 2-цикл $\{q_-, q_+\}$.

A3.5.11 Замечание. Во Второй Теореме Бифуркации мы познакомились с новым типом бифуркации, называемой **удваивающей период бифуркацией**. При уменьшении c меньше $-\frac{3}{4}$, случаются две вещи: неподвижная точка a_- из притягивающей становится отталкивающей, и появляется новый 2-цикл, $\{q_-, q_+\}$. Заметьте, что когда $c = -\frac{3}{4}$, мы имеем $q_- = q_+ = -\frac{1}{2} = a_-$. То есть эти две новые периодические точки зарождаются в a_- при $c = -\frac{3}{4}$.

Мы скажем больше об удваивающих период бифуркациях при рассмотрении однопараметрических семейств функций (таких как $Q_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящих от параметра c, или логистических функций $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, зависящих от параметра λ). □

Упражнения А3.5

1. Докажите Теорему А3.5.3.

2. Используя Теоремы А3.5.2 и А3.5.3 определите типы неподвижных точек для каждой из следующих функций:

   (i) $f_1(x) = 3x$.

   (ii) $f_2(x) = \frac{1}{4x}$.

   (iii) $f_3(x) = x^3$.

3. Докажите Первую Теорему Бифуркации (Теорема А3.5.6).

4. Пусть x - периодическая точка квадратичной функции Q_c периода два. Докажите следующие утверждения

   (i) Докажите, что $x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$.

   (ii) Почему точки $a_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ and $a_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$ удовлетворяют уравнению из (i)?

   [Подсказка. Используйте Первую Теорему Бифуркации.]

   (iii) Используя (ii), покажите, что если x - периодическая точка функции Q_c простого периода 2, то $x^2 + x + c + 1 = 0$.

   (iv) Докажите, что если x - периодическая точка простого периода 2, то x является одной из точек

   $q_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c-3})$ или $q_- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c-3})$.

   (v) Докажите, что Q_c имеет 2-цикл тогда и только тогда, когда $c < -\frac{3}{4}$. [Обратите внимание, что случай $c = -\frac{3}{4}$ не рассматривается.]

(vi) Используя Теорему А3.1.17 покажите, что квадратичная функция Q_c имеет q_- и q_+ в качестве притягивающих периодических точек если $|\frac{dQ_c^2(x)}{dx}| = |4x^3 + 4cx| < 1$ при $x = q_-$ и $x = q_+$.

(vii) Заметив, что q_- и q_+ удовлетворяют уравнению $x^2 + x + c + 1 = 0$ (из (iii) и (iv) вверху), покажите, что

$$4x^3 + 4cx = 4x(x^2 + c) = 4x(-1 - x) = 4(c + 1).$$

(viii) Используя (vi), (vii), и (v) покажите, что при $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, q_+ и q_- являются притягивающими периодическими точками функции Q_c.

(ix) Аналогично, покажите, что при $c < -\frac{5}{4}$, q_+ и q_- являются отталкивающими периодическими точками.

(x) Выведите Вторую Теорему Бифуркации (Теорема А3.5.10) из доказанных выше упражнений.

A3.6 Магия периода 3: Период 3 Влечет Хаос

A3.6.1 Замечание. В 1964, советский математик А.Н. Сарковский опубликовал статью (Sarkovskii [27]) в украинском журнале. В этой статье доказывалась замечательная теорема, которая осталась незамеченной. В 1975 Джеймс Йорк и Т-Ю. Ли опубликовали статью (Yorke and Li [34]) в *American Mathematical Monthly*. Несмотря на то, что термин "хаос" использовался и прежде в научной литературе, по-настоящему популярным он стал после этой статьи. Основной результат статьи, Теорема о Периоде Три, изумительна, но является очень частным случаем Теоремы Сарковского, которая была доказана декадой раньше. Приведенное здесь обсуждение Теоремы о Периоде Три основано на изложении Роберта Л. Девани в его книге (Devaney [7]).

A3.6.2 Теорема. (Теорема о Периоде Три) Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Если у f имеется периодическая точка простого периода 3, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ у нее есть периодическая точка простого периода n.

Доказательство. Упражнения A3.6 #1–4.. □

A3.6.3 Замечание. Теорема о Периоде Три замечательна. Но как было сказано раньше, верен более общий результат, известный как теорема Сарковского. Мы не дадим доказательства, просто отметим, что доказательство аналогично приведенному выше.

Для формулировки теоремы Сарковского нам надо упорядочить натуральные числа следующим образом, известным как порядок Сарковского на натуральных числах:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$
$$2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ \ldots$$
$$2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7\ldots$$
$$2^3\cdot 3,\ 2^3\cdot 5,\ 2^3\cdot 7\ldots$$
$$\vdots$$
$$\ldots,\ 2^n,\ 2^{n-1},\ \ldots,\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1,\ 1.$$

A3.6.4 Теорема. (Теорема Сарковского) Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Если у f имеется периодическая точка простого периода n и n появляется раньше k в порядке Сарковского на натуральных числах, то у f имеется периодическая точка простого периода k.

A3.6.5 Замечания. (i) сначала заметим, что так как 3 - первое число в порядке Сарковского, Теорема Сарковского влечет Теорему о Периоде Три.

(ii) Далее, заметим, что так как числа вида 2^n появляются в конце порядка Сарковского, то функция f имеет $\boxed{\text{конечное}}$ число периодических точек, только если все они вида 2^n.

(iii) В третьих заметим, что Теорема Сарковского верна для функций, отображающих $\mathbb{R}$ в себя. Если в формулировке теоремы заменить $\mathbb{R}$ на другое пространство, утверждение может оказаться неверным. Однако, $\mathbb{R}$ может быть заменен любым замкнутым интервалом $[a, b]$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим непрерывную функцию $f\colon [a, b] \to [a, b]$. Далее продолжим f до непрерывной функции $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определив $f'(x) = f(x)$, для $x \in [a, b]$; $f'(x) = f(a)$ если $x < a$; и $f'(x) = f(b)$, если $x > b$. Утверждение для f может быть выведено из утверждения для f'.

Замечательно, что обращение теоремы Сарковского также верно, но мы не будем доказывать этот результат. См. (Dunn [9])

3А.6.6 Теорема. (Обращение Теоремы Сарковского) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и l появляется раньше n в порядке Сарковского. Тогда существует непрерывная функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с периодической точкой простого периода n, не имеющая периодической точки простого периода l.

А3.6.7 Замечание. Из обращения Теоремы Сарковского следует, например, что существует непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в себя, у которой есть периодическая точка простого периода 6, и, следовательно, периодическая точка любого четного простого периода, но не существует периодических точек нечетных простых периодов, за исключением 1.

Упражнения А3.6

1. Пусть f - непрерывное отображение интервала I в $\mathbb{R}$. Используя Предложения 4.3.5 и 5.2.1, докажите, что $f(I)$ - интервал.

2. Используйте теорему Вейерштрасса о промежуточном значении (Теорема 5.2.9) для доказательства следующего результата:

   Предложение А. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ где $a < b$, а $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Докажите, что если $f(I) \supseteq I$, то f имеет неподвижную точку в I.*

   [Подсказка. (i) Покажите, что существуют точки $s, t \in [a, b]$ такие, что $f(s) = c \leq a \leq s$ и $f(t) = d \geq b \geq t$.

   (ii) Определим $g(x) = f(x) - x$ и заметим, что g - непрерывна и $g(s) \leq 0$ и $g(t) \geq 0$.

   (iii) Примените теорему Вейерштрасса о промежуточном значении к g.]

3. Используйте теорему Вейерштрасса о промежуточном значении для доказательства следующего результата:

Предложение B. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, где $a < b$. Далее, пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, а $f([a,b]) \supseteq J = [c,d]$, где $c, d \in \mathbb{R}$ и $c < d$. Докажите, что существует подинтервал $I' = [s,t]$ интервала $I = [a,b]$ такой, что $f(I') = J$.*

[Подсказки. (i) Проверьте, что $f^{-1}(\{c\})$ и $f^{-1}(\{d\})$ - непустые замкнутые множества.

(ii) Используя (i) и Лемму 3.3.2 (вверху) проверьте, что существует наибольшее число s такое, что $f(s) = c$.

(ii) $\boxed{\text{Рассмотрите случай, когда существует некоторое } x > s \text{ такое, что } f(x) = d.}$ Проверьте, что существует наименьшее число такое, что $t > s$ и $f(t) = d$.

(iii) $\boxed{\text{Предположите}}$, что существует $y \in [s,t]$ такое, что $f(y) < c$. Используйте теорему Вейерштрасса о промежуточном значении для получения противоречия.

(iv) Аналогично, покажите, что не существует $z \in [s,t]$ такого, что $f(z) > d$.

(v) Докажите, что при условиях как в (ii), $f([s,t]) = [c,d] = J$, как и требовалось.

(vi) Теперь рассмотрите случай, что не существует $x > s$ такого, что $f(x) = d$. Пусть s' - наибольшее число такое, что $f(s') = d$. Ясно, что $s' < s$. Пусть t' - наименьшее число такое, что $t' > s'$ и $f(t') = c$. Проверьте, что $f([s',t']) = [c,d] = J$, как и требовалось.]

4. Пусть f такая же как в Теореме A3.6.2. То есть существует точка a из $\mathbb{R}$ простого периода 3. Тогда $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$, где $a \neq b$, $a \neq c$ и $b \neq c$. Рассмотрим случай $a < b < c$. Остальные случаи разбираются аналогично. Положим $I_0 = [a,b]$ и $I_1 = [b,c]$.

   (i) Используя упражнение 1 вверху, проверьте, что $f(I_0) \supseteq I_1$.

   (ii) Опять используя упражнение 1 вверху, проверьте, что $f(I_1) \supseteq I_0 \cup I_1$.

   (iii) Выведите из (ii) и Предложения B вверху, что существует замкнутый интервал $A_1 \subseteq I_1$ такой, что $f(A_1) = I_1$.

(iv) Заметив, что $f(A_1) = I_1 \supseteq A_1$, используйте предложение B опять, чтобы показать, что существует замкнутый интервал $A_2 \subseteq A_1$ такой, что $f(A_2) = A_1$.

(v) Заметьте, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq I_1$ и $f^2(A_2) = I_1$.

(vi) Докажите по индукции, что при $\boxed{n \geq 3}$ существуют замкнутые интервалы $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ такие, что

$$A_{n-2} \subseteq A_{n-3} \subseteq \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq I_1$$

и $f(A_i) = A_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n-2$, и $f(A_1) = I_1$.

(vii) Выведите из (vi), что $f^{n-2}(A_{n-2}) = I_1$ и $A_{n-2} \subseteq I_1$.

(viii) Заметив, что $f(I_0) \supseteq I_1 \supseteq A_{n-2}$, покажите, что существует замкнутый интервал $A_{n-1} \subseteq I_0$ такой, что $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$.

(ix) Наконец, используя то, что $f(I_1) \supset I_0 \supseteq A_{n-1}$, покажите, что существует замкнутый интервал $A_n \subset I_1$ такой, что $f(A_n) = A_{n-1}$.

(x) Собрав все вышедоказанное вместе, мы видим, что

$$A_n \xrightarrow{f} A_{n-1} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} A_1 \longrightarrow I_1$$

где $f(A_i) = A_{i-1}$ и $f^n(A_n) = I_1$. Используйте, что $A_n \subset I_1$ и Предложение A чтобы показать, что существует точка $x_0 \in A_n$ такая, что $f^n(x_0) = x_0$.

(xi) Заметьте, что точка x_0 из (x)является периодической точкой функции f периода n. [Нам осталось показать, что n - простой период для x_0.]

(xii) Используя то, что $f(x_0) \in A_{n-1} \subseteq I_0$ и $f^i(x_0) \in I_1$, при $i = 2, \ldots, n$, и $I_0 \cap I_1 = \{b\}$, покажите, что простой период x_0 равен n. [Обратите внимнание на то, что случай $f(x_0) = b$ должен быть исключен. Это можно сделать заметив, что $f^3(x_0) \in I_1$, но $f^2(b) = a \notin I_1$.]

(xiii) Из (xi), (xii) и (vi)выведите, что у f имеется периодическая точка простого периода n для любого $n \geq 3$. [Мы разберем случаи $n = 1$ и $n = 2$ ниже.]

(xiv) Используйте предложение A и то, что $f(I_1) \supseteq I_1$, чтобы показать, что у f есть неподвижная точка в I_1; то есть периодическая точка периода 1.

(xv) Заметьте, что $f(I_0) \supseteq I_1$ и $f(I_1) \supseteq I_0$. Используя предложение B покажите, что существует замкнутый интервал $B \subseteq I_0$ такой, что $f(B) = I_1$. Далее, заметьте, что $f^2(B) \supseteq I_0$, и из предложения A выведите, что существует точка $x_1 \in B$ такая, что $f^2(x_1) = x_1$. Проверьте, что $x_1 \in B \subseteq I_0 = [a, b]$, а $f(x_1) \in f(B) = I_1 = [b, c]$ и $x_1 \neq b$. Выведите отсюда, что x_1 - периодическая точка функции f простого периода 2. Это завершает доказательство теоремы о периоде три.

5. (i) Покажите, что теорема о периоде три неверна для $\mathbb{R}^2$. [Подсказка. Рассмотрите вращения вокруг начала координат.]

   (ii) Покажите, что теорема о периоде три неверна для $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

   (iii) Покажите, что теорема о периоде три неверна для S^1, где S^1 - окружность радиуса 1 в $\mathbb{R}^2$.

6. Докажите, что теорема Сарковского верна для открытого интервала (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$? [Подсказка. Легко получается из теоремы Сарковского для $\mathbb{R}$.]

A3.7 Хаотические Динамические Системы

A3.7.1 Замечания. Сегодня буквально тысячи научных публикаций и сотни научных книг посвящены хаотическим динамическим системам. Эти публикации относятся к различным областям знаний - биологии, экономике, экологии, финансам итд. Бессмысленно пытаться описать историю понятия хаос, термин использовался в книге Бытия в Ветхом Завете и в Хун-Тун (переводится с китайского как хаос) в Даосизме (Girardot [12]), философском учении, зародившемся 2200 лет назад в Китае, во времена династии Хань. Здесь мы сосредоточимся на двадцатом столетии.

Бессмысленно пытаться дать "всеобъемлющее" математическое определение понятия хаос. Здесь мы дадим одно правдоподобное определение, заметив, что существуют и другие определения, не эквивалентные данному. На самом деле, некоторые математики утверждают, что ни одно из существующих определений не охватывает в точности то, что мы подразумеваем под хоасом.

Как говорилось ранее, статья Йорка и Ли 1975 года привлекла широкий интерес к хаотическим динамическим системам. Однако, годом раньше австралийский ученый Роберт М. Мэй, позже лорд Роберт Мэй и президент Королевского Общества, опубликовал статью (May [25]), в которой утверждал "Некоторые простейшие нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие рост биологических популяций с непересекающимися поколениями, могут демонстрировать значительный спектр динамического поведения: от стабильных устойчивых состояний, до стабильных циклических осцилляций между популяциями с 2 точками, до стабильных циклов с 4, 8, 16, . . . точками, в хаотическом режиме, при котором (в зависимости от начального значения) могут появляться циклы произвольного периода, или даже абсолютно апериодические, но ограниченные, изменения популяции."

Жюль Анри Пуанкаре (1854 - 1912), один из величайших французских математиков, известный как основатель ряда направлений в математике, включая современную теорию нелинейной динамики, эргодическую теорию и топологию. Его работы послужили основанием для развития теории хаоса. В изданной в 1903 книге, переизданной в 2003 году(Poincarè [26]), он пишет: "Если бы мы знали в точности все законы природы и состояние вселенной в начальный момент, мы могли бы в точности предсказать состояние этой вселенной в следующий момент. Но даже если бы законы природы не были тайной для нас нас, мы могли бы описать начальное состояние вселенной только приблизительно, с некоторой погрешностью. Если бы мы могли предсказать последующее состояние вселенной с такой же погрешностью, это было бы то, что нам нужно, и мы могли бы сказать, что явление было предсказано, и что оно управляется законами. Но это не всегда так; может случиться так, что маленькая разница в начальных условиях дает огромную разницу в конечном состоянии. Маленькая ошибка при определении начального состояния может дать огромную ошибку при вычислении конечного состояния. Предсказание становится невозможным". Эта существенная особенность хаоса, так точно описанная Пуанкаре, впоследствии стала широко известна как *эффект бабочки*.

В 1952 году был опубликован небольшой рассказ известного писателя-фантаста Рея Бредбери под названием "Звук Грома"("И грянул гром"). В рассказе группа богатых бизнесменов отправилась на машине времени в доисторическу эпоху, чтобы поохотиться на динозавров. Один из охотников случайно убил доисторическую бабочку, и это незначительное событие изменило будущий мир, который они покинули.

Возможно именно этот рассказ побудил метеорологов назвать свой доклад Американской Ассоциации Развития Науки в Вашингтоне в 1973 году “Прогнозируемость: Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо Техасе?” Метеорологом был Едвард Нортон Лоренц (1917–) а под взмахом крыльев бабочки подразумевались незначительные изменения начальных условий, могущие вызвать значительные изменения впоследствии. Лоренц обнаружил существование подобных начальных условий совершенно случайно. Он прогонял на компьютере математическую модель прогноза погоды. Прогнав программу для некоторых начальных данных, он решил запустить ее еще раз. Он ввел начальные данные с распечатки предыдущего прогона программы, и запустил ее опять. Он обнаружил, что полученные результаты очень сильно отличались от предыдущих. Это произошло потому, что на распечатке числа округлялись до трех десятичных знаков, и он ввел число 0.506 вместо 0.506127. Он ожидал, что это округление может повлиять на результаты весьма незначительно. Так как повторный просчет опроверг его ожидания, Лоренц заключил, что незначительные изменения в начальных условиях вызвали огромную разницу в результатах. Поэтому прогнозирование в этом случае оказалось невозможным. Эффект чувствительности к начальным условиям, или эффект бабочки, оказался важным не только с теоретической точки зрения, но и с практической, например, в метеорологии. Это оказалось серьезным препятствием к прогнозированию погоды – по крайней мере, в той модели. Возможно, этот эффект был очевиден и в других практических приложениях.

Американские математики Джордж Давид Биркгоф (1884-Ч1944) и Гарольд Кальвин Марстон Морс (1892–1977) продолжили работу Пуанкаре по динамическим системам. В то время как Пуанкаре пользовался только топологическими методами в теории динамических систем, Биркгоф, в частности, использовал к тому же меру Лебега. В своей статье 1931 года Биркгоф и П.А. Смит Birkhoff and Smith [5] ввели понятие метрической транзитивности, которая является центральной в эргодической теории, и которая была использована Робертом Л. Девани в данном в 1986 году определении хаоса.

Три условия: транзитивность, чувствительность к начальным условиям и плотность периодических точек как в теореме о периоде три, были использованы Девани в его определении хаоса. □

A3.7.2 Определение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $f\colon X \to X$ - отображение множества X в себя. Тогда (X, f) называется **динамической системой**.

A3.7.3 Замечание. Было бы правильнее обозначать динамическую систему как (X, d, f), однако это обозначение не принято в существующей литературе.

A3.7.4 Определение. Пусть (X, d) - метрическое пространство, а $f\colon X \to X$ - отображение X в себя. Динамическая система (X, f) называется **транзитивной** если для данных $x, y \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$, существуют $z \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $d(z, y) < \varepsilon$ and $d(f^n(z), x) < \varepsilon$.

A3.7.5 Замечание. Проще говоря, транзитивность утверждает существование точки z, "близкой" к y и такой, что некоторая точка из орбиты z "близка" к x.

A3.7.6 Замечание. Наконец то мы определим хаос. Однако, следует быть осторожным, так как в литературе существует несколько неэквивалентных определений хаоса, кроме того, многие авторы не вполне определены, что они понимают под хаосом. Мы используем определение, данное Робертом Л. Девани, модифицированное в 1992 году группой Австралийских математиков.

A3.7.7 Определение. Динамическая система (X, f) называется **хаотической** если

(i) множество всех периодических точек f плотно в X, и

(ii) (X, f) - транзитивна.

A3.7.8 Замечание. До 1992 года в это определение обычно включали третье условие, а именно, что динамическая система (X, f), f чувствительна к начальным условиям. Однако, в 1992 году группа математиков из университета Ла Троб в Мельбурне, Австралия доказали, что это условие следует из двух условий Определения A3.7.7. Эта работа под названием “On Devaney's definition of chaos"(Об определении хаоса Девани) авторов Джон Банкс, Гари Дейвис, Питер Стейси, Джефф Брукс и Грант Каирнс была опубликована в American Mathematical Monthly (Banks et al. [1]). См. также (Banks et al. [2]).

A3.7.9 Определение. Говорят, что динамическая система (X, f) **чувствительна к начальным условиям** если существует $\beta > 0$ такое, что для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и $y \in X$ такие, что $d(x, y) < \varepsilon$ и $d(f^n(x), f^n(y)) > \beta$.

A3.7.10 Замечание. Это определение говорит, что независимо от выбора начальной точки x и произвольной (сколь угодно маленькой)окрестности точки x, всегда существует y из этой окрестности, чья орбита отдаляется от x по крайней мере на β. [β независимо от x.]

A3.7.11 Замечание. Согласно Замечанию A3.7.8 **любая хаотическая динамическая система чувствительна к начальным условиям**. Мы не собираемся доказывать это утверждение. Но в Упражнениях A3.7 # 2 мы покажем, что удваивающее отображение действительно является чувствительным к начальным условиям.

A3.7.12 Замечание. В 1994, Майкл Велленкуп и Рауль Берглунд Vellekoop and Berglund [31] доказали, что в частном случае, когда (X, d) - конечный или бесконечный интервал с эвклидовой метрикой, транзитивность влечет условие (ii) Определения A3.7.7, а именно, плотность множества периодических точек. Однако, Давид Асаф и Стив Годбуа IV and Gadbois [17] показали, что это неверно в общем случае.

Упражнения A3.7

1. Пусть отображение $D\colon [0,1) \to [0,1)$, определено формулой $D(x) = 2x \pmod 1$. Докажите, что динамическая система $([0,1), D)$ хаотическая.

   [Подсказки. Вспомните, что в Упражнении A3.4 #7 было доказано, что множеством всех периодических точек D является

   $$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{0, \frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}, \frac{3}{2^n-1}, \dots, \frac{2^n-2}{2^n-1}\right\}.$$

   и что множество P плотно в $[0,1)$. Поэтому условие (i) Определения A3.7.7 выполнено. Для проверки условия (ii) выполните следующие шаги:

   (a) Пусть заданы $x, y \in [0,1)$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{-n} < \varepsilon$. И для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, определено

   $$J_{k,n} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right).$$

   Покажите, что существует $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $x \in J_{k,n}$.

   (b) Проверьте, что $f^n(J_{k,n}) = [0,1)$.

   (c) Выведите из (b) существование $z \in J_{k,n}$ такого, что $f^n(z) = y$.

   (d) Докажите, что z обладает необходимыми свойствами из Определения A3.7.4 и, поэтому, $([0,1), D)$ - транзитивная динамическая система.

   (e) Выведите из предыдущего, что $([0,1), D)$ - хаотическая динамическая система.]

2. Докажите, что удваивающее отображение из Упражнения 1 вверху чувствительно к начальным условиям.

[Подсказки. Пусть $\beta = \frac{1}{4}$. И пусть для произвольного $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{-n} < \varepsilon$. Положим $s = f^n(x) + 0.251 \pmod 1$. Сначала проверьте, что $d(f^n(x), s) > \beta$. Как было замечено в Упражнении 1(a), $x \in J_{k,n}$, для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Но согласно Упражнению 1(b), $f^n(J_{k,n}) = [0, 1)$. Пусть $y \in J_{k,n}$ такое, что $f^n(y) = s$. Проверьте, что y обладает необходимыми свойствами (i) $d(x, y) < \varepsilon$ и (ii) $d(f^n(x), f^n(y) > \beta$.]

3. Пусть m - произвольное (фиксированное) натуральное число. Рассмотрим динамическую систему $([0, 1), f_m)$, где $f_m(x) = mx \pmod 1$. Докажите, что $([0, 1), f_m)$ хаотична.

   [Подсказка. См. Упражнение 1 вверху]

4. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, а f - непрерывное отображение из X в себя. Отображение f называется **топологически транзитивным** если для любой пары непустых открытых множеств U и V из $(X, \mathcal{T})$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Докажите, что если (X, d) - метрическое пространство, а $\mathcal{T}$ - топология, индуцированная метрикой d, то f транзитивно тогда и только тогда, когда оно топологически транзитивно.

A3.8 Сопряженные Динамические Системы

A3.8.1 Определение. Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) - метрические пространства, а (X_1, f_1) и (X_2, f_2) - динамические системы. Тогда (X_1, f_1) и (X_2, f_2) называются **сопряженными динамическими системами** если существует гомеоморфизм $h\colon (X_1, d_1) \to (X, d_2)$ такой, что $f_2 \circ h = h \circ f_1$; то есть, $f_2(h(x)) = h(f_1(x))$, для всех $x \in X_1$. Отображение h называется **сопряжением**.

3A.8.2 Замечание. В Упражнениях A3.8 #2 проверяется, что если динамические системы (X_1, f_1) и (X_2, f_2) сопряжены, то (X_2, f_2) и (X_1, f_1) также сопряжены. То есть, понятие сопряженности симметрично. □

А3.8.3 Замечание. Сопряженные динамические системы эквивалентны в том же смысле, в каком эквивалентны гомеоморфные пространства. Следующая теорема демонстрирует этот факт. Довольно часто анализ сложной динамической системы сводится к доказательству того, что она сопряжена уже изученной системе. □

A3.8.4 Теорема. Пусть (X_1, f_1) и (X_2, f_2) - сопряженные динамические системы, где h - сопряжение.

(i) Точка $x \in X_1$ является неподвижной точкой f_1 в X_1 тогда и только тогда, когда $h(x)$ - неподвижная точка f_2 в X_2.

(ii) Точка $x \in X_1$ является периодической точкой периода $n \in \mathbb{N}$ отображения f_1 из X_1 тогда и только тогда, когда $h(x)$ является периодической точкой периода n отображения f_2 из X_2.

(iii) Динамическая система (X, f_1) хаотична тогда и только тогда, когда динамическая система (X, f_2) тоже хаотична.

Доказательство. (i) и (ii) достаточно очевидны и оставляются в качестве упражнений.

Для доказательства (iii) предположим, что (X_1, f_1) хаотична. Пусть P - множество периодических точек f_1. Так как (X_1, f_1) хаотична, P плотно в X_1. Так как h непрерывно, легко видеть, что $h(P)$ плотно в множестве $h(X_1) = X_2$. Так как $h(P)$ - множество периодических точек (X_2, f_2), то (X_2, f_2) удовлетворяет условию (i) Определения A3.7.7.

Для завершения доказательства нам надо показать, что (X_2, f_2) транзитивна. Пусть $\varepsilon > 0$ и $u, v \in X_2$. Тогда существуют $x, y \in X_1$ такие, что $h(x) = u$ и $h(y) = v$. Так как h непрерывно, оно непрерывно и в точках $x, y \in X_1$. Поэтому, существует $\delta > 0$ такое, что

$$z \in X_1 \quad \text{и} \quad d_1(x, z) < \delta \Rightarrow d_2(h(x), h(z)) < \varepsilon, \tag{10.1}$$

и

$$z' \in X_1 \quad \text{и} \quad d_1(y, z') < \delta \Rightarrow d_2(h(y), h(z')) < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Так как (X_1, f_1) транзитивна, существуют $z \in X_1$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$d_1(x, z) < \delta \Rightarrow d_1(f_1^n(z), y) < \delta. \tag{10.3}$$

Пусть z выбрано так, что выполняется (10.3), положим $w = h(z)$. Используя это значение вместо z в (10.1), и взяв $f_1^n(z)$ вместо z' в (10.2), мы получим

$$d_2(u, w) = d_2(h(x), h(z)) < \varepsilon, \quad \text{из (10.1) и (10.3)} \tag{10.4}$$

и

$$\begin{aligned} d_2(f_2^n(w), v) &= d_2(f_2^n(h(z)), h(y)), \\ &= d_2(h(f_1^n(z), h(y)), \quad \text{as} \quad h \circ f_1 = f_2 \circ h, \\ &< \varepsilon, \end{aligned} \tag{10.5}$$

из (2) и (3). Теперь из (10.4) и (10.5) следует, что (X_2, f_2) транзитивна. □

Упражнения A3.8

1. Пусть $T\colon [0,1] \to [0,1]$ является функцией палатки, определенной как

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{для } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{для } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

   (i) Нарисуйте график T.

   (ii) Выведите формулу для T^2 и нарисуйте график T^2.

   (iii) Выведите формулу для T^3 и нарисуйте график T^3.

   (iv) Пусть $I_{k,n} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, для $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Проверьте, что $T^n(I_{k,n}) = [0,1]$.

   (v) Используя Предложение A из Упражнения 3.6 #2 покажите, что у T^n имеется неподвижная точка в каждом из $I_{k,n}$.

   (vi) Выведите из (v) существование периодической точки T в каждом из $I_{k,n}$.

   (vii) Используя вышеприведенные результаты, покажите, что $(T, [0,1])$ - хаотическая динамическая система.

2. Проверьте, что если (X_1, f_1) и (X_2, f_2) - сопряженные динамические системы, то (X_2, f_2) и (X_1, f_1) тоже сопряжены.

3. Пусть $L\colon [0,1] \to [0,1]$ - логистическая функция, определенная как $L(x) = 4x(1-x)$.

(i) Покажите, что отображение $h\colon [0,1] \to [0,1]$, определенное как $h(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x)$, является гомеоморфизмом $[0,1]$ на себя таким, что $h \circ T = L \circ h$, где T - функция палатки.

(ii) Выведите, что $([0,1], T)$ и $([0,1], L)$ - сопряженные динамические системы.

(iii) Выведите из (ii), Теоремы A3.8.4 и Упражнения 1 вверху, что $([0,1], L)$ - хаотическая динамическая система.

4. Рассмотрите квадратичное отображение $Q_{-2}\colon [-2,2] \to [-2,2]$, где $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$.

   (i) Докажите, что динамические системы $([-2,2], Q_{-2})$ и $([0,1], L)$ из Упражнения 3 сопряжены.

   (ii) Выведите, что $([-2,2], Q_{-2})$ - хаотическая динамическая система.

Приложение 4: Хаусдорфова размерность

Введение

В этом разделе мы обсуждаем понятие размерности Хаусдорфа, которая играет важную роль в изучении фракталов.

A4.1 Хаусдорфова Размерность

Мы начнем с предупреждения, что материал этого приложения намного сложнее большей части материала из начальных глав книги. Более того, понимание этого раздела не является необходимым для понимания остальной книги.

Мы обычно считаем точки 0-мерными, линии - 1-мерными, квадраты - 2-мерными, кубы - 3- итп. То есть, на интуитивном уровне мы считаем, что знаем, что такое размерность. Для произвольных топологических пространств существуют различные определения размерности. Как правило, для “хороших” пространств эти определения совпадают. Однако, даже такие "приличные" пространства как $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, таят сюрпризы.

В 1919 году Феликс Хаусдорф ввел понятие Хаусдорфовой размерности для метрического пространства. Удивительной особенностью Хаусдорфовой размерности является то, что она необязятельно принимает целые значения. Эта тема была развита десятилетием позже А.С.Бесиковичем, но привлекла внимание в 1970-х годах благодаря работам Бенуа Мандельброта по фрактальной геометрии, которые стимулировали развитие теории хоаса. Фракталы и теория хаоса широко используются в разных областях, включая экономику, финансы, метеорологию, физику и физиологию.

Мы начнем наше обсуждение с меры Хаусдорфа (или то, что некоторые называют мерой Хаусдорфа-Бесиковича). Некоторые читатели могут быть знакомы с родственным понятием меры Лебега, однако для понимания дальнейшего, это не является необходимым.

A4.1.1 Определение. Пусть Y - подмножество метрического пространства (X, d). Число $\sup\{d(x, y) : x, y \in Y\}$ называется **диаметром** множества Y и обозначается $\operatorname{diam} Y$.

A4.1.2 Определение. Пусть Y - подмножество метрического пространства (X, d), I - некоторое множество индексов, ε - положительное действительное число, а $\{U_i : i \in I\}$ семейство подмножеств X таких, что $Y \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ и, для каждого $i \in I$, $\operatorname{diam} U_i < \varepsilon$. Тогда $\{U_i : i \in I\}$ называется **ε-покрытием** множества Y.

Особенно нас будут интересовать счетные ε-покрытия. Поэтому мы зададимся вопросом: какие из подмножеств некоторого метрического пространства обладают счетными ε-покрытиями для всех $\varepsilon > 0$? Следующее предложение дает ответ на этот вопрос.

A4.1.3 Предложение. Пусть Y - некоторое подмножество метрического пространства (X, d), d_1 - индуцированная метрика на Y. Y обладает счетным ε-покрытием для всех $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда (Y, d_1) сепарабельно.

Доказательство. Предположим, что у Y имеется счетное ε-покрытие для всех $\varepsilon > 0$. в Частности, у Y есть счетное $(1/n)$-покрытие, $\{U_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $y_{n,i}$ - произвольная точка из $Y \cap U_{n,i}$. Мы увидим, что счетное множество $\{y_{n,i} : i \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$ плотно в Y. Очевидно, что для каждого $y \in Y$, существует $i \in \mathbb{N}$, такое, что $d(y, y_{n,i}) < 1/n$. Поэтому пусть O - произвольное открытое множество нетривиально пересекающееся с Y. и Пусть $y \in O \cap Y$. Тогда O содержит открытый шар B centre y радиуса $1/n$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $y_{n,i} \in O$, для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\{y_{n,i} : i \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$ плотно в Y, поэтому Y сепарабельно.

В обратную сторону, предположим, что Y сепарабельно. Тогда у него есть счетное плотное подмножество $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Действительно, для произвольных $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$, существует y_i, $i \in \mathbb{N}$ такое, что $d(y, y_i) < \varepsilon/2$. Поэтому семейство всех $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$, где U_i - открытый шар с центром в y_i и радиусом $\varepsilon/2$ является ε-покрытием Y, как и требовалось. □

Мы теперь в состоянии определить s-мерную Хаусдорфову меру подмножества метрического пространства. Более точно, мы определим эту меру для сепарабельных подмножеств метрического пространства. Конечно, если (X, d) - сепарабельное метрическое пространство, как, например, $\mathbb{R}^n$, для любого $n \in \mathbb{N}$, то все его подмножества сепарабельны. (См. Упражнение 6.3 #15.)

A4.1.4 Определение. Пусть Y - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d) и s - некоторое положительное действительное число. Для каждого положительного действительного $\varepsilon < 1$, положим

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_i)^s : \{U_i : i \in \mathbb{N}\} \text{ является } \varepsilon\text{-покрытием } Y \right\}, \text{ и}$$

$$\mathcal{H}^s(Y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \mathcal{H}^s_\varepsilon(Y), & \text{если предел существует;} \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{H}^s(Y)$ называется **внешней s-мерной Хаусдорфовой мерой** множества Y.

A4.1.5 Замечание. Заметьте, что если в Определении A4.1.4 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\mathcal{H}^s_{\varepsilon_1}(Y) \geq \mathcal{H}^s_{\varepsilon_2}(Y)$. Поэтому, так как ε стремится к 0, либо предел $\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y)$ существует, либо стремится к ∞. Это помогает понять определение $\mathcal{H}^s(Y)$.

A4.1.6 Замечание. Важно отметить, что если d_1 - метрика, индуцированная на Y метрикой d на X, то $\mathcal{H}^s(Y)$ зависит только от метрики d_1 на Y. Другими словами, если Y является также подмножеством метрического пространства (Z, d_2), и d_2 индуцирует ту же метрику d_1 на Y, то $\mathcal{H}^s(Y)$ не меняется. Например, s-мерная внешняя Хаусдорфова мера для замкнутого интервала [0,1] не зависит от того, рассматривается ли этот интервал как подмножество $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^n$, для любого натурального n.

A4.1.7 Лемма. Пусть Y - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d), s и t - положительные действительные числа, где $s < t$, а ε - положительное действительное число < 1. Тогда

(i) $H^t_\varepsilon(Y) \leq H^s_\varepsilon(Y)$, и

(ii) $H^t_\varepsilon(Y) \leq \varepsilon^{t-s} H^s_\varepsilon(Y)$.

Доказательство. Часть (i) немедленно следует из того, что $\varepsilon < 1$ и поэтому каждое $\operatorname{diam} U_i < 1$, что влечет $(\operatorname{diam} U_i)^t < (\operatorname{diam} U_i)^s$. Часть (ii) следует из того, что $\operatorname{diam} U_i < \varepsilon < 1$ и поэтому $(\operatorname{diam} U_i)^t < \varepsilon^{t-s}(\operatorname{diam} U_i)^s$. □

A4.1.8 Предложение. Пусть Y - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d), а s и t - положительные действительные числа, где $s < t$.

(i) Если $\mathcal{H}^s(Y) < \infty$, то $\mathcal{H}^t(Y) = 0$.

(ii) Если $0 \neq \mathcal{H}^t(Y) < \infty$, то $\mathcal{H}^s(Y) = \infty$.

Доказательство. Немедленно следует из Определения A4.1.3 и Леммы A4.1.7ii). □

A4.1.9 Замечание. Из Предложения A4.1.8 мы видим, что $\boxed{\text{если}}$ $\mathcal{H}^s(Y)$ конечным ненулевым числом для некоторого s, то для всех больших значений s, $\mathcal{H}^s(Y)$ равняется 0, а для всех меньших значений s, $\mathcal{H}^s(Y)$ равняется ∞. $\square$

Предложение A4.1.8 позволяет определить Хаусдорфову размерность.

A4.1.10 Определение. Пусть Y - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d). Тогда

$$\dim_H(Y) = \begin{cases} \inf\{s \in [0, \infty) : \mathcal{H}^s(Y) = 0\}, & \text{if } \mathcal{H}^s(Y) = 0 \text{ для некоторого } s > 0; \\ \infty, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется **Хаусдорфовой размерностью** множества Y.

Следующее предложение получается немедленно.

A4.1.11 Предложение. Пусть Y - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d). Тогда

(i) $$\dim_H(Y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{H}^s(Y) = 0 \text{ для всех } s; \\ \sup\{s \in [0, \infty) : \mathcal{H}^s(Y) = \infty\}, & \text{если супремум существует;} \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(ii) $$\mathcal{H}^s(Y) = \begin{cases} 0, & \text{если } s > \dim_H(Y); \\ \infty, & \text{если } s < \dim_H(Y). \end{cases}$$

$\square$

Вычисление Хаусдорфовой размерности метрического пространства не является легким делом. Здесь мы приводим пример, который может помочь.

A4.1.12 Пример. Пусть Y - произвольное конечное подмножество метрического пространства (X, d). Тогда $\dim_H(Y) = 0$.

Доказательство. Пусть $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, $N \in \mathbb{N}$. И пусть $O_\varepsilon(i)$ - открытый шар с центром в y_i и радиусом $\varepsilon/2$. Тогда $\{O_i : i = 1, \dots, N\}$ является ε-покрытием

Y. Поэтому

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}}(\operatorname{diam} U_i)^s : \{U_i\} \text{ открытое покрытие } Y\}\right\} \leq \sum_{i=1}^{N}(\operatorname{diam} O_i)^s = \varepsilon^s.N^{s+1}/2^s.$$

Таким образом, $\mathcal{H}^s(Y) \leq \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon^s.N^{s+1}/2^s = 0$. Поэтому, $\mathcal{H}^s(Y) = 0$, для всех $s > 0$. Следовательно, $\dim_H(Y) = 0$. □

Следующее предложение очевидно.

A4.1.13 Предложение. Если (Y_1, d_1) и (Y_2, d_2) - изометричные метрические пространства, то

$$\dim_H(Y_1) = \dim_H(Y_2).$$ □

A4.1.14 Предложение. Пусть Z и Y - сепарабельное подмножества метрического пространства (X, d). Если $Z \subset Y$, то $\dim_H(Z) \leq \dim_H(Y)$.

Доказательство. Упражнение. □

A4.1.15 Лемма. Пусть $Y = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d). Тогда

$$\mathcal{H}^s(Y) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(Y_i).$$

Доказательство. Упражнение. □

A4.1.16 Предложение. Пусть $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d). Тогда

$$\dim_H(Y) = \sup\{\dim_H(Y_i) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Из Леммы A4.1.15 немедленно следует, что

$$\dim_H(Y) \leq \sup\{\dim_H(Y_i) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Однако, согласно Предложению A4.1.14, $\dim_H(Y) \geq \dim_H(Y_i)$, для всех $i \in \mathbb{N}$. Соединив эти два наблюдения, получаем доказательство Предложения. □

A4.1.17 Предложение. Если Y - счетное подмножество метрического пространства (X, d), то $\dim_H(Y) = 0$.

Доказательство. Немедленно следует из Предложения A4.1.16 и Примера A4.1.12 □

В частности, Предложение A4.1.17 утверждает, что $\dim_H(\mathbb{Q}) = 0$.

A4.1.18 Пример. Пусть $[a, a+1]$, $a \in \mathbb{R}$ - замкнутый интервал из $\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ снабжено эвклидовой метрикой. Тогда $\dim_H[a, a+1] = \dim_H[0, 1] = \dim_H(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть d_a - метрика, индуцированная на $[a, a+1]$ эвклидовой метрикой на $\mathbb{R}$. Тогда $([a, a+1], d_a)$ изометрично $([0, 1], d_0)$, и по Предложению A4.1.13, $\dim_H[a, a+1] = \dim_H[0, 1]$.

Заметим, что $\mathbb{R} = \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} [a, a+1]$. Поэтому

$$\dim_H(\mathbb{R}) = \sup\{\dim_H[a, a+1] : a = \dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\} = \dim_H[0, 1],$$

так как каждое из $\dim_H[a, a+1] = \dim_H[0, 1]$. □

A4.1.19 Предложение. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) - сепарабельные метрические пространства, а $f : X \to Y$ - сюръективное отображение. Если существуют положительные действительные числа a и b такие, что для всех $x_1, x_2 \in X$,

$$a.d_1(x_1, x_2) \leq d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq b.d_1(x_1, x_2),$$

то $\dim_H(X, d_1) = \dim_H(Y, d_2)$.

Доказательство. Упражнение

A4.1.20 Замечание. В некоторых случаях Предложение A4.1.19 может оказаться полезным для вычисления Хаусдорфовой размерности. См. Упражнения 6.6 #7 и #8.

Другим полезным способом вычисления Хаусдорфовой размерности является, как показано в следующем Предложении, ограничение определения s-мерной внешней Хаусдорфовой меры, в котором множества из ε-покрытия являются открытыми множествами.

A4.1.21 Предложение. Пусть Y - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d), а s - положительное действительное число. Если для каждого положительного действительного $\varepsilon < 1$,

$$\mathcal{O}^s_\varepsilon(Y) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} O_i)^s : \{O_i : i \in \mathbb{N}\} \text{ является } \varepsilon\text{-покрытием Y открытыми} \right.$$

то $\mathcal{O}^s_\varepsilon(Y) = \mathcal{H}^s_\varepsilon(Y)$.

Более того, $\mathcal{H}^s(Y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \mathcal{O}^s_\varepsilon(Y), & \text{если предел существует;} \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Доказательство. Упражнение.

A4.1.22 Лемма. Пусть Y - сепарабельное связное подмножество метрического пространства (X, d). Если $\{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ - покрытие Y открытыми множествами O_i, то

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam} O_i \geq \operatorname{diam} Y$$

Доказательство. Упражнение.

A4.1.23 Пример. Покажите, что $\mathcal{H}^1[0,1] \geq 1$.

Доказательство. Для доказательства надо положить $Y = [0,1]$ в Лемме A4.1.22, $s = 1$ в Предложении A4.1.21 и заметить, что из $\operatorname{diam}[0,1] = 1$ следует $\mathcal{H}^1_\varepsilon[0,1] \geq 1$, для всех $\varepsilon > 0$. □

A4.1.24 Предложение. Пусть $[0,1]$ - замкнутый интервал с эвклидовой метрикой. Тогда $\dim_H[0,1] = 1$.

Доказательство. Согласно Предложению A4.1.11, достаточно показать, что $\mathcal{H}^1[0,1] = 1$.

Для произвольного $1 > \varepsilon > 0$ очевидно, что интервал $[0,1]$ может быть покрыт n_ε интервалами с диаметрами, меньшими ε, где $n_\varepsilon \leq 2 + 1/\varepsilon$. Поэтому $\mathcal{H}^1_\varepsilon[0,1] \leq \varepsilon(2+1/\varepsilon)$; то есть, $\mathcal{H}^1_\varepsilon[0,1] \leq 1+2\varepsilon$. Таким образом, $\mathcal{H}^1[0,1] \leq 1$. Из Примера A4.1.23 получаем $\mathcal{H}^1[0,1] = 1$, что доказывает Предложение. □

Похожими рассуждениями можно показать, что если $a, b \in \mathbb{R}$ где $a < b$, а $\mathbb{R}$ снабжено эвклидовой метрикой, то $\dim_H[a,b] = 1$. Следующее Следствие включает этот результат и легко следует из Предложения A4.1.24, Примера A4.1.18, Предложения A4.1.14, Предложения 4.3.5, и определения вполне несвязности из Упражнения 5.2 #10.

A4.1.25 Следствие. Пусть $\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел с эвклидовой метрикой.

(i) $\dim_H \mathbb{R} = 1$.

(ii) Если $S \subset \mathbb{R}$, то $\dim_H S \leq 1$.

(iii) Если S содержит нетривиальный интервал (то есть, не является вполне несвязным), то $\dim_H S = 1$.

(iv) Если S - нетривиальный интервал из $\mathbb{R}$, то $\dim_H S = 1$.

Доказательство. Упражнение $\square$

A4.1.26 Замечание. На самом деле, для $\mathbb{R}^n$ с эвклидовой метрикой, где $n \in \mathbb{N}$, верно, что $\dim_H \mathbb{R}^n = n$. Это доказывается в Упражнении A4.1. Однако, доказательство опирается на Обобщенную Теорему Гейне-Бореля (Теорема 8.3.3), которая доказывается в Главе 8.

Данное приложение по Хаусдорфовой размерности еще не завершено. По поводу обновлений следите за сайтом http://uob-community.ballarat.edu.au/~smorris/to

$\square$

Упражнения 10.5

1. Пусть Y - подмножество метрического пространства (X, d), а $\overline{Y}$ его замыкание. Докажите, что $\operatorname{diam} Y = \operatorname{diam} \overline{Y}$.

2. Докажите Предложение A4.1.14.
[Подсказка. Используйте Определения A4.1.4 и A4.1.10.]

3. Докажите Лемму A4.1.15.

4. Покажите, что если $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, $n \in \mathbb{N}$ - сепарабельное подмножество метрического пространства (X, d), то $\dim_H(Y) = \sup\{\dim_H(Y_i) : i = 1, 2 \ldots, n\}$.

5. (i) Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $a, b \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что если r и s - произвольные положительные действительные числа, то

   для открытых шаров $B_r(a)$ и $B_s(b)$ из $\mathbb{R}^n$ с эвклидовой метрикой выполняется

$$\dim_H B_r(a) = \dim_H B_s(b).$$

   (ii) Используя подход из Примера A4.1.18 покажите, что $\dim_H B_r(a) = \dim \mathbb{R}^n$.

   (ii) Докажите, что если S_1 - открытый куб $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$, то $\dim_H S_1 = \dim_H \mathbb{R}^n$.

   (iii)* Используя подход из Предложения A4.1.24 покажите, что если $n = 2$, то $\mathcal{H}^2(S_1) \leq 2$ и, поэтому, $\dim_H(S_1) \leq 2$.

   (iv) Докажите, что $\dim_H \mathbb{R}^2 \leq 2$.

   (v)* Используя похожее рассуждение, докажите, что $\dim_H \mathbb{R}^n \leq n$, для всех $n > 2$.

6. Докажите Предложение A4.1.19.
[Подсказка. Докажите, что $a^s.\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y) \leq b^s.\mathcal{H}^s(X)$.]

7. Пусть $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ - функция, определенная как $f(x) = \langle x, x^2 \rangle$. Пользуясь Предложением A4.1.19, покажите, что $\dim_H f[0, 1] = \dim_H [0, 1]$. Выведите из этого и Предложения A4.1.16, что если Y - график в $\mathbb{R}^2$ функции $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенной как $\theta(x) = x^2$, то $\dim_H(Y) = \dim_H [0, 1]$.

8. Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из Упражнения 7 вверху, покажите, что если Z график в $\mathbb{R}^2$ произвольного многочлена $\phi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$, то $\dim_H Z = \dim_H [0,1]$.

9.* Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - функция у которой существует $n^{\text{ая}}$ производная $g^{(n)}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Далее, предположим, что существует $K \in \mathbb{N}$, такое, что $|g^{(n)}(x)| < K$, для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in [0,1]$. (Такими функциями являются, например, $g = \exp$, $g = \sin$, $g = \cos$, g - произвольный многочлен.) Используя разложение g в ряд Тейлора, обобщите метод, примененный в Упражнениях 7 и 8 вверху, чтобы показать, что для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, определенной как $f(x) = \langle x, g(x) \rangle$, выполняется $\dim_H f[0,1] = \dim_H [0,1]$.

10. Докажите Предложение A4.1.21.

    [Подсказка. Сначала докажите, что если z произвольное действительное число больше 1, а U_i - произвольное множество из (X,d) диаметра, меньшего чем ε, то существует открытое множество O_i такое, что (i) $U_i \subseteq O_i$, (ii) $\operatorname{diam} O_i < \varepsilon$, и (iii) $\operatorname{diam} O_i \leq z.\operatorname{diam} U_i$. Используйте это, чтобы показать, что $\mathcal{O}^s_\varepsilon(Y) \leq z^s.\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y)$, для всех $z > 1$.]

11. Докажите Лемму A4.1.22.

    [Подсказка. Сначала докажите аналогичный результат для случая когда Y покрыто 2 открытыми множествами. Затем рассмотрите случай конечного открытого покрытия Y. Наконец, рассмотрите случай бесконечного покрытия, помня, что сумма бесконечного числа членов существует (и конечна) тогда и только тогда, когда существует предел частичных сумм.]

12. Покажите, что для множества всех иррациональных чисел $\mathbb{P}$ с эвклидовой метрикой $\dim_H \mathbb{P} = 1$

13. Проведите детальное доказательство Следствия A4.1.25.

14. Обобщенная Теорема Гейне-Бореля (Теорема 8.3.3), доказаная в главе 8, утверждает, что если $\{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ является ε-покрытие замкнутого куба S_1 из Примера 5 вверху, существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\{O_1, O_2, \ldots, O_N\}$ также

является ε-покрытием S_1. Используя это, расширьте Предложение A4.1.21 следующим образом: Для каждого положительного действительного ε,

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(S_1) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{N}(\operatorname{diam} O_i)^s : \text{ где } N \in \mathbb{N} \text{ и } O_1, \ldots, O_N \text{ - открытое } \varepsilon\text{-покрытие } S_1\right\}.$$

Warning: Note that this Exercise depends on a result not proved until Chapter 8.

15. (i) Show that if O is a subset of $\mathbb{R}^2$ with the euclidean metric, and A is its area, then

    $A \leq \frac{\pi}{4}.(\operatorname{diam} O)^2.$

    (ii) Deduce from (i) that if $O_1, O_2, \ldots, O_N$ is an ε-covering of S_1 in $\mathbb{R}^2$ of Example 5 above, then
$$\sum_{i=1}^{N} (\operatorname{diam} O_i)^2 \geq \frac{4}{\pi}\,.$$

    (iii) Deduce from (ii) and Exercise 14 above that $\mathcal{H}^2(S_1) \geq \frac{4}{\pi}$.

    (iv) Using (iii) and Exercise 5, prove that $\dim_H(S_1) = \dim_H \mathbb{R}^2 = 2$.

    (v) Using an analogous method to that above, prove that $\dim_H \mathbb{R}^n = n$, where $\mathbb{R}^n$ has the euclidean metric.

    (vi) Prove that if S is any subset of $\mathbb{R}^n$ with the euclidean metric, such that S contains a non-empty open ball in $\mathbb{R}^n$, the $\dim_H S = n$.

    Предупреждение: Заметьте, что (iii), (iv), (v) и (vi) этого упражнения опираются на результат, доказанный в Главе 8.

Приложение 5: Топологические Группы

Введение

В этом приложении мы даем введение в теорию топологических групп. Предполагается, что читатель знаком с понятием **группы** в объеме начального курса по Общей Алгебре.

A5.1 Топологические Группы

A5.1.1 Определение. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - множество G, являющееся группой, с топологией $\mathcal{T}$ на G. $(G, \mathcal{T})$ называется **топологической группой** если

1. отображение $(x, y) \to xy$ пространства произведения $(G, \mathcal{T}) \times (G, \mathcal{T})$ на $(G, \mathcal{T})$ непрерывно, и
2. отображение $x \to x^{-1}$ из $(G, \mathcal{T})$ на $(G, \mathcal{T})$ тоже непрерывно.

A5.1.2 Примеры.

1. Аддитивная группа действительных чисел с эвклидовой топологией является топологической группой, и обычно обозначается через R.
2. Мультипликативная группа положительных действительных чисел с индуцированной топологией из $\mathbb{R}$ также является топологической группой.

3. Аддитивная группа рациональных чисел с эвклидовой топологией является топологической группой и обозначается через Q.

4. Аддитивная группа целых чисел с дискретной топологией является топологической группой и обозначается через Z.

5. Произвольная группа с дискретной топологией является топологической группой.

6. Произвольная группа с антидискретной топологией является топологической группой.

7. "Круговая"группа, состоящая из комплексных чисел нормы 1 (т.е. множество чисел $e^{2\pi ix}$, $0 \leq x < 1$) с групповой операцией, унаследованной от комплексных чисел, и топологией, индуцированной эвклидовой топологией на комплексной плоскости, является топологической группой. Эта топологическая группа обозначается через $\mathbb{T}$ (или S^1).

8. **Линейные группы**. Пусть $A = (a_{jk})$ - матрица $n \times n$, с комплексными коэффициентами a_{jk}. Транспонированной матрицей ${}^tA$ для матрицы A является матрица (a_{kj}), а сопряженной $\overline{A}$ к A является матрица $(\overline{a}_{jk})$, где $\overline{a}_{jk}$ - комплексное сопряжение числа a_{jk}. Матрица A называется **ортогональной** если $A = \overline{A}$ и ${}^tA = A^{-1}$ и называется **унитарной** если $A^{-1} = {}^t(\overline{A})$.
Множество всех невырожденных $n{\times}n$ матриц (с комплексными элементами) называется **общей линейной группой** (над полем комплексных чисел) и обозначается через $GL(n, C)$. Подгруппа группы $GL(n, C)$, состоящая из матриц с детерминантом один, называется **специальной линейной группой** (над полем комплексных чисел) и обозначается через $SL(n, C)$. **Унитарная группа** $U(n)$ и **ортогональная группа** $O(n)$ состоят из всех унитарных матриц и всех ортогональных матриц, соответственно; они являются подгруппами $GL(n, C)$. Наконец, мы определим **специальную унитарную группу** и **специальную ортогональную группу** как $SU(n) = SL(n, C) \cap U(n)$ и $SO(n) = SL(n, C) \cap O(n)$, соответственно.
Группа $GL(n, C)$ и все ее подгруппы могут рассматриваться как подмножества C^{n^2}, где C обозначает комплексную плоскость, и, поэтому, C^{n^2} является $2n^2$-мерным эвклидовым пространством. В качестве таковых $GL(n, C)$ и все ее

подгруппы обладают индуцированными топологиями, и легко проверить, что они являются топологическими группами.

A5.1.3 Замечание. Конечно же, не всякая топология на группе превращает ее в топологическую группу; т.е. групповая структура должна быть согласована с топологической структурой. Если топология $\mathcal{T}$ на группе G превращает $(G, \mathcal{T})$ в топологическую группу, то $\mathcal{T}$ называется **групповой топологией**.

A5.1.4 Пример. Пусть G - аддитивная группа целых чисел. Определим топологию $\mathcal{T}$ на G следующим образом: подмножество U множества G открыто если либо

(a) $0 \notin U$, либо

(b) $G \backslash U$ конечно.

Очевидно, что это (компактная Хаусдорфова) топология, но Предложение A5.1.5 внизу показывает, что $(G, \mathcal{T})$ - не топологическая группа.

A5.1.5 Предложение. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - топологическая группа. Для каждого $a \in G$, левые и правые произведения на a являются гомеоморфизмами $(G, \mathcal{T})$. Взятие обратного элемента также является гомеоморфизмом.

Доказательство. Отображение $L_a : (G, \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T})$, заданное как $g \mapsto ag$ является суперпозицией двух непрерывных отображений

$(G, \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T}) \times (G, \mathcal{T})$, определенного как $g \mapsto (a, g)$, где $g \in G$, a фиксированно, и

$(G, \mathcal{T}) \times (G, \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T})$, определенного как $(x, y) \mapsto xy$, $x, y \in G$,

и, поэтому, само непрерывно. Итак, умножение слева на произвольный элемент $a \in G$ непрерывно. Далее, у L_a имеется непрерывное обратное, а именно, $L_{a^{-1}}$, так как $L_a\left[L_{a^{-1}}(g)\right] = L_a\left[a^{-1}g\right] = a(a^{-1}g) = g$ и $L_{a^{-1}}\left[L_a(g)\right] = L_{a^{-1}}[ag] = a^{-1}(ag) = g$. Поэтому, умножение слева на произвольный элемент является гомеоморфизмом. Аналогично, умножение справа на произвольный элемент тоже является гомеоморфизмом.

Отображение $I : (G, \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T})$, определенное как $g \mapsto g^{-1}$, непрерывно по определению. I также имеет непрерывное обратное, а именно само I, так как $I[I(g)] = I[g^{-1}] = [g^{-1}]^{-1} = g$. Поэтому, I также является гомеоморфизмом. $\square$

Теперь понятно, что $(G, \mathcal{T})$ из Примера A5.1.4 вверху не является топологической группой так как левое умножение на 1 переводит множество $\{-1\}$ на $\{0\}$, но $\{0\}$ не является открытым. На самом деле мы сказали, что произвольная топологическая группа является однородным пространством , в то время как группа из примера - нет. Сейчас мы определим однородные пространства.

A5.1.6 Определение. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется **однородным** если для любых двух точек x, y из X существует гомеоморфизм $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ такой, что $f(x) = y$.

В то время как каждая топологическая группа является однородным топологическим пространством, мы вскоре увидим, что не всякое однородное пространство может быть превращено в топологическую группу.

A5.1.7 Определение. Топологическое пространство называется **T_1-пространством** если каждая точка пространства является замкнутым множеством.

Легко видеть, что любое Хаусдорфово пространство является T_1-пространством, но обратное неверно. См. Упражнение 4.1 #13.

Мы увидим, однако, что любая топологическая группа, являющаяся T_1-пространством, Хаусдорфова. Между прочим, это, вообще говоря, неверно для однородных пространств - так как любое бесконечное множество с ко-конечной топологией гомеоморфно T_1-пространству, но не является Хаусдорфовым. В качестве следствия, мы получим, что не каждое однородное пространство может быть превращено в топологическую группу.

A5.1.8 Предложение. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - произвольная топологическая группа, а e - ее единичный элемент. Для произвольной окрестности U точки e, существует открытая окрестность V точки e такая, что

(i) $V = V^{-1}$ (то есть, V является **симметричной окрестностью единицы** e)

(ii) $V^2 \subseteq U$.

(Здесь $V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}$ и $V^2 = \{v_1 v_2 : v_1 \in V, v_2 \in V\}$, а $\boxed{\text{не}}$ множество $\{v^2 : v \in V\}$.)

Доказательство. Упражнение. □

A5.1.9 Предложение. Произвольная топологическая группа $(G, \mathcal{T})$, являющаяся T_1-пространством, является также и Хаусдорфовым пространством.

Доказательство. Пусть x и y - различные точки из G. Тогда $x^{-1}y \neq e$. Множество $G \setminus \{x^{-1}y\}$ является открытой окрестностью e и, поэтому по Предложению A5.1.8, существует открытая симметричная окрестность V единицы e такая, что $V^2 \subseteq G \setminus \{x^{-1}y\}$. То есть, $x^{-1}y \notin V^2$.

Итак, xV и yV - открытые окрестности точек x и y, соответственно. Предположим, что $xV \cap yV \neq \emptyset$. Тогда $xv_1 = yv_2$, где v_1 и v_2 из V; то есть, $x^{-1}y = v_1 v_2^{-1} \in V.V^{-1} = V^2$, что является противоречием. Следовательно, $xV \cap yV = \emptyset$ и, поэтому, $(G, \mathcal{T})$ Хаусдорфово. □

A5.1.10 Замечание. Итак, чтобы проверить Хаусдорфовость топологической группы , достаточно проверить, что каждая точка является замкнутым множеством. На самом деле, согласно Предложению A51.5 достаточно показать, что $\{e\}$ - замкнутое множество.

Предупреждение. Многие авторы включают “Хаусдорфовость"в определение топологической группы.

A5.1.11 Замечание. Большая часть работ по топологическим группам посвящена только Хаусдорфовым топологическим группам. Вскоре мы увидим, почему это происходит. Было бы естественным спросить: Для каждой ли группы существует Хаусдорфова топология, превращающая ее в топологическую группу? Ответ, очевидно, “да дискретная топология удовлетворяет требованию. Поэтому слегка изменим вопрос.

Вопрос. Для каждой ли группы существует недискретная Хаусдорфова топология, превращающая ее в топологическую группу?

Shelah [28] доказал , что это не так, при допущении континуум гипотезы. Однако, в частном случае абелевых групп (коммутативных групп) ответ на этот вопрос положительный, что мы вскоре докажем. □

Упражнения A5.1

1. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - топологическая группа, e - ее единичный элемент, а k - произвольный элемент G. Покажите, что если U - произвольная окрестность e, то существует открытая окрестность V единицы e такая, что

   (i) $V = V^{-1}$,

   (ii) $V^2 \subseteq U$, и

   (iii) $kVk^{-1} \subseteq U$. (На самом деле, приложив чуть больше усилий, можно доказать, что если K произвольное компактное подмножество $(G, \mathcal{T})$, то V можно выбрать удовлетворяющим следующему условию: (iv) для любого $k \in K$, $kVk^{-1} \subseteq U$.)

2. (i) Пусть G - произвольная группа и пусть $\mathcal{N} = \{N\}$ - семейство нормальных подгрупп G. Покажите,

   семейство всех множеств вида gN, где g принимает значения из G, а N принимает произвольные значения из $\mathcal{N}$, является открытой подбазой топологической группы G. Эта топология называется **топологией подгрупп**.

(ii) Докажите, что $\boxed{\text{каждая}}$ групповая топология на $\boxed{\text{конечной}}$ группе является топологией подгрупп $\mathcal{N}$, состоящей из одной нормальной подгруппы.

3. Покажите, что

(ii) если $(G, \mathcal{T})$ - топологическая группа, то $(G, \mathcal{T})$ - регулярное пространство;

(iii) произвольное регулярное T_0-пространство является Хаусдорфовым, и, поэтому, произвольная топологическая группа, являющаяся T_0-пространством Хаусдорфова.

4. Пусть $(G, \mathcal{T})$ - топологическая группа, A и B - подмножества G, а g - произвольный элемент из G. Покажите, что

(i) Если A открыто, то и gA открыто.

(ii) Если A открыто, а B произвольно, то AB открыто.

(iii) Если A и B компактны, то AB тоже компактно.

(iv) Если A компактно, а B замкнуто, то AB замкнуто.

(v)* Если A и B замкнуты, то AB необязательно должно быть замкнутым.

5. Пусть S - компактное подмножество метризуемой топологической группы G такое, что $xy \in S$ если x и y принадлежат S. Покажите, что для каждого $x \in S$, $xS = S$. (Пусть y - точка сходимости последовательности $x, x^2, x^3, \ldots$ из S покажите, что $yS = \bigcap_{n=1}^{\infty} x^n S$; выведите, что $yxS = yS$.) Покажите, что S - подгруппа группы G. (Cf. Hewitt and Ross [15], Теорема 9.16.)

A5.2 Подгруппы и Факторгруппы Топологических Групп

A5.2.1 Определение. Пусть G_1 и G_2 - топологические группы. Отображение $f : G_1 \to G_2$ называется **непрерывным гомоморфизмом** если он одновременно является гомоморфизмом групп и непрерывным отображением. Если f к тому же и гомеоморфизм, то оно называется **изоморфизмом топологических групп** или **топологическим изоморфизмом**, а G_1 и G_2 называются **топологически изоморфными**.

A5.2.2 Пример. Пусть $\mathbb{R}$ - аддитивная группа действительных чисел с обычной топологией, а $\mathbb{R}^\times$ - мультипликативная группа положительных действительных чисел с обычной топологией. Тогда $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^\times$ - топологически изоморфны, где топологическим изоморфизмом $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ является $x \mapsto e^x$. (Следовательно, нам не нужно больше упоминать группу $\mathbb{R}^\times$, так как, как топологические группы, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^\times$ одинаковы.) $\square$

A5.2.3 Предложение. Пусть G - топологическая группа, а H - подгруппа G. Снабженная топологией подпространства, H является топологической группой.

Доказательство. Отображение $(x, y) \mapsto xy$ из $H \times H$ на H и отображение $x \mapsto x^{-1}$ из H на H являются непрерывными как ограничения соответствующих отображений из $G \times G$ и G. $\square$

A5.2.4 Примеры. (i) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$; (ii) $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$. $\square$

A5.2.5 Предложение. Пусть H - подгруппа топологической группы G. Тогда

(i) замыкание $\overline{H}$ подгруппы H является подгруппой G;

(ii) если H - нормальная подгруппа G, то $\overline{H}$ - тоже нормальная подгруппа G;

(iii) если G Хаусдорфова, а H абелева, то $\overline{H}$ тоже абелева.

Доказательство. Упражнение □

A5.2.6 Следствие. Пусть G - топологическая группа. То

(i) $\overline{\{e\}}$ - замкнутая нормальная подгруппа G; на самом деле, это наименьшая замкнутая подгруппа G;

(ii) если $g \in G$, то $\overline{\{g\}}$ - смежный класс $g\overline{\{e\}} = \overline{\{e\}}g$;

(iii) Если G Хаусдорфова, то $\overline{\{e\}} = \{e\}$.

Доказательство. Немедленно следует из Предложения A5.2.5 (ii) если заметить, что $\{e\}$ - нормальная подгруппа G. □

A5.2.7 Предложение. Произвольная открытая подгруппа H топологической группы G замкнута.

Доказательство. Пусть x_i, $i \in I$ - множество всех представителей правых смежных классов H в G. Поэтому $G = \bigcup_{i \in I} Hx_i$, где $Hx_i \cap Hx_j = \emptyset$, для любых различных i и j из множества индексов I.

Так как H открыто, то все Hx_i тоже открыты, $i \in I$.

Для некоторого $i_0 \in I$, $Hx_{i_0} = H$, то есть, мы имеем $G = H \cup \left(\bigcup_{i \in J} Hx_i\right)$, where $J = I \backslash \{i_0\}$.

Эти два члена не пересекаются, а второй член к тому же открыт, как объединение открытых множеств. Поэтому H замкнуто в G как дополнение открытого множества. □

Заметим, что обращение Предложения A5.2.7 неверно. Например, $\mathbb{Z}$ - замкнутая подгруппа $\mathbb{R}$, не являющаяся открытой подгруппой $\mathbb{R}$.

A5.2.8 Предложение. Пусть H - подгруппа Хаусдорфовой группы G. Если H - локально компактна, то H замкнута в G. В частности, это верно когда H дискретна.

Доказательство. Пусть K - компактная окрестность единицы e в H. Тогда существует окрестность U из G точки e такая, что $U \cap H = K$. В частности, $U \cap H$ замкнуто G. Пусть V - окрестность в G единицы e такая, что $V^2 \subseteq U$.

Если $x \in \overline{H}$, то так как $\overline{H}$ - группа (Предложение A5.2.5), $x^{-1} \in \overline{H}$. Поэтому существует элемент $y \in Vx^{-1} \cap H$. Мы покажем, что $yx \in H$. Так как $y \in H$, отсюда следует, что $x \in H$ и, поэтому, H замкнуто, как и требовалось.

Чтобы показать, что $yx \in H$, проверим, что yx является предельной точкой для $U \cap H$. Так как $U \cap H$ замкнуто, отсюда будет следовать, что $yx \in U \cap H$ и, в частности, $yx \in H$.

Пусть O - произвольная окрестность yx. Тогда $y^{-1}O$ является окрестностью x и, поэтому, $y^{-1}O \cap xV$ является окрестностью x. Так как $x \in \overline{H}$, существует элемент $h \in (y^{-1}O \cap xV) \cap H$. Поэтому $yh \in O$. Также, $yh \in (Vx^{-1}(xV) = V^2 \subseteq U$ и $yh \in H$; то есть, $yh \in O \cap (U \cap H)$. Так как O произвольна, заключаем, что yx - предельная точка $U \cap H$, как и требовалось. □

A5.2.9 Предложение. Пусть U - симметричная окрестность единицы e в топологической группе G. Тогда $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$ - открытая (и замкнутая) подгруппа G.

Доказательство. Очевидно, что H - подгруппа G.

Пусть $h \in H$. Тогда $h \in U^n$, для некоторого n.

Поэтому $h \in hU \subseteq U^{n+1} \subseteq H$; то есть, H содержит окрестность hU точки h.

Так как h - произвольный элемент H, то H открыта в G. Она также замкнута в G, согласно Предложению A5.2.7. □

A5.2.10 Следствие. Пусть U - произвольная окрестность e в связной топологической группе G. Тогда $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$; то есть, любая связная группа порождается произвольной окрестностью e.

Доказательство. Пусть V симметричная окрестность e такая, что $V \subseteq U$. Согласно Предложению A5.2.9, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ - открытая и замкнутая подгруппа G.

Так как G связна, $H = G$; то есть $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$.

Так как $V \subseteq U$, $V^n \subseteq U^n$, для всех n, поэтому $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, как и требовалось. □

A5.2.11 Определение. Топологическая группа G называется **компактно порожденной** если существует компактное подмножество X группы G такое, что G - наименьшая подгруппа (группы G), содержащая X.

A5.2.12 Примеры.

(i) $\mathbb{R}$ компактно порождена $[0,1]$ (или любым другим нетривиальным компактным интервалом).

(ii) Конечно же, любая компактная группа компактно порождена.

A5.2.13 Следствие. Произвольная связная локально компактная группа компактно порождена.

Доказательство. Пусть K - произвольная компактная окрестность e. тогда, по Следствию A5.2.10, $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K^n$; то есть, G компактно порождена. $\square$

A5.2.14 Замечание. В надлежащее время мы опишем структуру компактно порожденной локально компактной хаусдорфовой абелевой группы. Мы сейчас увидим, что этот класс содержит все связные локально компактные хаусдорфовы абелевы группы.

Обозначение. Под **LCA-группой** мы будем понимать локально компактную хаусдорфову абелеву топологическую группу.

A5.2.15 Предложение. Компонента связности единицы (то есть, наибольшее связное подмножество, содержащее e) топологической группы является замкнутой нормальной подгруппой.

Доказательство. Пусть C - компонента связности единицы в топологической группе G. Очевидно, что C замкнута.

Пусть $a \in C$. Тогда $a^{-1}C \subseteq C$, так как $a^{-1}C$ связно (как гомеоморфный образ C) и содержит e.

Поэтому $\bigcup\limits_{a\in C} a^{-1}C = C^{-1}C \subseteq C$, что означает, что C - подгруппа.

Чтобы убедиться, что C нормальная подгруппа, заметим, что для каждого x из G, $x^{-1}Cx$ - связное множество, содержащее e, поэтому $x^{-1}Cx \subseteq C$. $\square$

A5.2.16 Предложение. Пусть N - нормальная подгруппа топологической группы G. Если фактор-группа G/N снабжена фактор-топологией при каноническом гомоморфизме $p : G \to G/N$ (то есть, U открыто в G/N тогда и только тогда, когда $p^{-1}(U)$ открыто в G), то G/N становится топологической группой. Более того, отображение p не только непрерывно, но и открыто. (Отображение называется **открытым** если образ каждого открытого множества открыт.)

Доказательство. Проверка того, что G/N, снабженная фактор-топологией, является топологической группой, рутинна. То, что отображение p непрерывно является очевидным (это верно для всех фактор-отображений топологических пространств).

Чтобы убедиться в том, что p открытое отображение, возьмем произвольное открытое множество O из G. Тогда $p^{-1}(p(O)) = NO \subseteq G$.

Так как O открыто, NO тоже открыто. (См. Упражнение A5.2 #4.) Поэтому, по определению фактор-топологии на G/N, $p(O)$ открыто в G/N; то есть, p - открытое множество. □

5.2.17 Замечания.

(i) Заметим, что фактор-отображения топологических пространств не обязательно открыты.

(ii) Фактор-отображения топологических не обязательно замкнуты. Например, если $\mathbb{R}^2$ прямое произведение групп $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с обычной топологией, а p проекция из $\mathbb{R}^2$ на первую компоненту $\mathbb{R}$, то множество $S = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^2$, а p является фактор-отображением таким, что $p(S)$ не замкнуто в $\mathbb{R}$. □

5.2.18 Предложение. Если G - топологическая группа, а N - компактная нормальная подгруппа G, то канонический гомоморфизм $p : G \to G/N$ является замкнутым отображением. Гомоморфизм p также является открытым отображением.

Доказательство. Если S - замкнутое подмножество G, то $p^{-1}(p(S)) = NS$ является произведением в G компактного и замкнутого множеств. Согласно Упражнению 5.1 #4, это замкнутое множество. Поэтому $p(S)$ замкнуто в G/N, и p - замкнутое отображение. Так как p - фактор-отображение, согласно Предложению 5.2.16 оно также открыто. □

5.2.19 Определение. Топологическое пространство называется **тотально несвязным** если связная компонента всякой точки совпадает с этой точкой.

5.2.20 Предложение. Если G - произвольная топологическая группа, а C - компонента связности единицы, то G/C - тотально несвязная топологическая группа.

Доказательство. Заметьте, что C - нормальная подгруппа G, и поэтому G/C - топологическая группа.

Доказательство того, что G/C тотально несвязна оставляется в качестве упражнения. □

5.2.21 Предложение. Если G/N фактор-группа локально компактной группы G, то G/N тоже локально компактна.

Доказательство. Заметим, что образ локально компактного пространства при открытом непрерывном отображении локально компактен. □

5.2.22 Предложение. Пусть G - топологическая группа, а N - ее нормальная подгруппа. Тогда G/N - дискретна тогда и только тогда, когда N открыта. Также, G/N хаусдорфова тогда и только тогда, N замкнута.

Доказательство. Это очевидно если заметить, что T_1-группы хаусдорфовы). □

Урпажнения A5.2

1. Пусть G и H - топологические группы, а $f : G \to H$ - гомоморфизм. Покажите, что f непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в единице; то есть, тогда и только тогда, когда для каждой окрестности единицы U из H, существует окрестность единицы V из Gтакая, что $f(V) \subseteq U$.

2. Покажите, что круговая группа $\mathbb{T}$ топологически изоморфна фактор-группе $\mathbb{R}/Z$.

3. Пусть B_1 и B_2 - (действительные) Банаховы пространства. Проверьте, что
   (i) B_1 и B_2 с топологиями, определенными их нормами, являются топологическими группами.
   (ii) Если $T : B_1 \to B_2$ - непрерывный гомоморфизм (топологических групп), то T является непрерывным линейным преобразованием. (То есть, если B_1 и B_2 “изоморфны как топологические группы то они “изоморфны как топологические векторные пространства но не обязательно “изоморфны как Банаховы пространства".)

4. Пусть H - подгруппа топологической группы G. Покажите, что H открыта в G тогда и только тогда, когда H обладает непустой внутренностью (то есть, тогда и только тогда, когда H содержит непустое открытое подмножество G).

5. Пусть H - подгруппа топологической группы G. Покажите, что
   (i) $\overline{H}$ - подгруппа G.
   (ii) Если H - нормальная подгруппа группы G, то $\overline{H}$ тоже нормальная подгруппа группы G.
   (iii) Если G - хаусдорфова, а H - абелева, то $\overline{H}$ тоже абелева.

6. Пусть Y - плотное подпространство хаусдорфова пространства X. Покажите, что если Y - локально компактно, то Y открыто в X. То есть, локально компактная подгруппа хаусдорфовой группы замкнута.

7. Пусть C - компонента связности единицы в топологической группе G. Покажите, что G/C тотально несвязная хаусдорфова топологическая группа. Более того, покажите, что если f - произвольный непрерывный гомоморфизм G в некоторую тотально несвязную топологическую группу H, то существует непрерывный гомоморфизм $g : G/C \to H$ такой, что $gp = f$, где p является прекцией $p : G \to G/C$.

8. Покажите, что коммутатор $[G, G]$ связной топологической группы G связен. ($[G, G]$ порождается $\{g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 : g_1, g_2 \in G\}$.)

9. Покажите, что если H - тотально несвязная нормальная подгруппа связной хаусдорфовой группы G, то H лежит в центре, $Z(G)$, группы G (то есть, $gh = hg$, для всех $g \in G$ и $h \in H$).

   (Подсказка: Зафиксируйте $h \in H$ и заметьте, что отображение $g \mapsto ghg^{-1}$ переводит G в H.)

10. (i) Пусть G - произвольная топологическая группа. Покажите, что $G/\overline{\{e\}}$ - хаусдорфова топологическая группа. Покажите, что если H - произвольная хаусдорфова группа, а $f : G \to H$ - непрерывный гомоморфизм, то существует непрерывный гомоморфизм $g : G/\overline{\{e\}} \to H$ такой, что $gp = f$, где p - каноническое отображение $p : G \to G/\overline{\{e\}}$.

    (Этот результат является стандартным доводом, для изучения только хаусдорфовых топологических групп. Однако, следующий результат, который утверждает, что вся топология топологической группы лежит в ее ‘‘хаусдорфизации т.е. в $G/\overline{\{e\}}$, является, по-видимому, более убедительным доводом.)

    (ii) Пусть G_i обозначает группу G с антидискретной топологией, а $i : G \to G_i$ - тождественное отображение. Проверьте, что отображение $p \times i : G \to G/\overline{\{e\}} \times G_i$, определенное как $p \times i(g) = (p(g), i(g))$, является изоморфизмом топологической группы G на ее образ $p \times i(G)$.

11. Покажите, что каждая хаусдорфова группа, H, топологически изоморфна замкнутой подгруппе некоторой линейно связной, локально линейно связной хаусдорфовой подгруппы G. (Рассмотрите множество G всех функций

$f : [0,1) \to H$ таких, что существует последовательность $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 1$, а f - константа на каждом $[a_k, a_{k-1})$. Определите групповую структуру на G посредством $fg(t) = f(t)g(t)$ и $f^{-1}(t) = (f(t))^{-1}$, где f и $g \in G$, а $t \in [0,1)$. Единицей G является функция, тождественно равная e в H. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и произвольной окрестности V единицы e в H определим $U(V,\varepsilon)$ как множество всех f таких, что $\lambda(\{t \in [0,1) : f(t) \notin V\}) < \varepsilon$, где λ мера лебега на $[0,1)$. Множество всех $U(V,\varepsilon)$ является открытой базой групповой топологии на G. Постоянные функции образуют замкнутую подгруппу G, топологически изоморфную H.)

A5.3 Вложение в Делимые Группы

A5.3.1 Замечание. Произведения топологических пространств были детально обсуждены в Главах 8, 9 и 10. Наиболее важным результатом о произведениях является, несомненно, Теорема Тихонова (Теорема 10.3.4), которая утверждает, что произвольное (конечное или бесконечное) произведение (с топологией произведения) компактных топологических пространств компактно. Более того, Теорема 10.3.4 утверждает, что произведение топологических пространств $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ компактно только если каждое из пространств $(X_i, \mathcal{T}_i)$ компактно.

Если каждое из G_i - группа, то $\prod_{i \in I} G_i$ обладает очевидной групповой структурой $(\prod_{i \in I} g_i \cdot \prod_{i \in I} h_i = \prod_{i \in I}(g_i h_i)$, где g_i и $h_i \in G_i)$.

Если $\{G_i : i \in I\}$ - семейство групп, то **прямое произведение** , обозначаемое как $\prod_{i \in I}^r G_i$, является подгруппой $\prod_{i \in I} G_i$, состоящей из элементов $\prod_{i \in I} g_i$, с $g_i = e$, для всех, кроме конечного числа $i \in I$.

В дальнейшем, если $\{G_i : i \in I\}$ - семейство топологических групп, то $\prod_{i \in I} G_i$ будет означать декартово произведение с топологией произведения. А $\prod_{i \in I}^r G_i$ будет означать прямое произведение с топологией, индуцированной топологией пространства $\prod_{i \in I} G_i$. □

A5.3.2 Предложение. Если каждое из G_i, $i \in I$ является топологической группой, то $\prod_{i \in I} G_i$ тоже топологическая группа. Более того, $\prod_{i \in I}^r G_i$ - плотная подгруппа группы $\prod_{i \in I} G_i$.

Доказательство. Упражнение. □

A5.3.3 Предложение. Пусть $\{G_i : i \in I\}$ - семейство топологических групп. Тогда

(i) $\prod_{i\in I} G_i$ локально компактно тогда и только тогда, когда каждое из G_i локально компактно, и все, кроме конечного числа, G_i компактны.

(ii) $\prod_{i\in I}^{r} G_i$ локально компактно и хаусдорфово тогда и только тогда, когда каждое G_i iлокально компактно и хаусдорфово, и $G_i = \{e\}$ для всех, кроме конечного числа, G_i.

Доказательство. Упражнение. □

Чтобы доказать анонсированный ранее результат: *каждая бесконечная абелева группа допускает недискретную хаусдорфову групповую топологию* нам нужны некоторые базовые факты из теории групп.

A5.3.4 Определение. Группа D называется **делимой** если для каждого $n \in \mathbb{N}$, $\{x^n : x \in D\} = D$; то есть, каждый элемент из D обладает корнем $n^{\text{ой}}$ степени.

A5.3.5 Примеры. Легко видеть, что группы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$ делимые, а группа $\mathbb{Z}$ - нет. □

A5.3.6 Предложение. Пусть H - подгруппа абелевой группы G. Если ϕ - гомоморфизм из H в некоторую делимую абелеву группу D, то ϕ может быть продолжен до гомоморфизма Φ из G в D.

Доказательство. По Лемме Цорна, достаточно показать, что если $x \notin H$, то ϕ может быть продолжен на группу $H_0 = \{x^n h : h \in H, n \in \mathbb{Z}\}$.

Случай (i). Предположим, что $x^n \notin H$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\Phi(x^n h) = \phi(h)$, для всех $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что Φ - корректно определенный гомоморфизм и продолжает ϕ до H_0.

Случай (ii). Пусть $k \geq 2$ - *наименьшее* натуральное число n такое, что $x^n \in H$. Поэтому, $\phi(x^k) = d \in D$. Так как D делима, существует элемент $z \in D$ такой, что $z^k = d$. Определим $\Phi(x^n h) = \phi(h) z^n$, для всех $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что Φ - корректно определенный гомоморфизм и продолжает ϕ до H_0. □

A5.3.7 Следствие. Если G - абелева группа, то для любых g и h из G, где $g \neq h$, существует гомоморфизм $\phi : G \to \mathbb{T}$ такой, что $\phi(g) \neq \phi(h)$; то есть, ϕ разделяет точки из G.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что для каждого $g \neq e$ из G, существует гомоморфизм $\phi : G \to \mathbb{T}$ такой, что $\phi(g) \neq e$.

Случай (i). Предположим, что $g^n = e$, и $g^k \neq e$ для $0 < k < n$. Пусть $H = \{g^m : m \in \mathbb{Z}\}$. Определим $\phi : H \to \mathbb{T}$ как $\phi(g) =$ корень n степени из единицы $= r$, то есть, $(r \neq e)$, и $\phi(g^m) = r^m$, для каждого m. Теперь продолжим ϕ на G по Предложению A5.3.6.

Случай (ii). Предположим, что $g^n \neq e$, для всех $n > 0$. Положим $\phi(g) = z$, для всех $z \neq e$ из $\mathbb{T}$. Продолжим ϕ до H, а затем, по Предложению A5.3.6, до G. □

В дальнейшем нам понадобится следующее следствие из Предложения A5.3.6.

A5.3.8 Предложение. Пусть H - открытая делимая подгруппа абелевой топологической группы G. Тогда G топологически изоморфна $H \times G/H$. (Очевидно, что G/H дискретная группа.)

Доказательство. Упражнение. □

A5.3.9 Теорема. Если G - произвольная бесконечная абелева группа, то G допускает недискретную хаусдорфову групповую топологию.

Доказательство. Пусть $\{\phi_i : i \in I\}$ - семейство различных гомоморфизмов из G в $\mathbb{T}$. Положим $H = \prod_{i \in I} T_i$, где каждое из $T_i = \mathbb{T}$. Определим отображение $f : G \to H = \prod_{i \in I} T_i$, положив $f(g) = \prod_{i \in I} \phi_i(g)$. Так как каждое из ϕ_i является гомоморфизмом, f - тоже гомоморфизм. Согласно следствию A5.3.7, f инъективен; то есть, G изоморфна подгруппе $f(G)$ группы H.

Так как H - хаусдорфова топологическая группа, $f(G)$, с топологией, индуцированной H, также хаусдорфова топологическая группа. Теперь остается показать, что $f(G)$ не дискретна.

Предположим, что $f(G)$ дискретна. Тогда, по Предложению A5.2.8, $f(G)$ была бы замкнутой подгруппой H. Но по Теореме Тихонова, H компактна, поэтому группа $f(G)$ тоже должна быть компактной; итак, группа $f(G)$ должна быть бесконечным дискретным компактным пространством - противоречие. То есть $f(G)$ не дискретна. □

A5.3.10 Замечание. Следствие A5.3.7 является существенным в доказательстве Теоремы A5.3.9. Это следствие является частным случаем более общей теоремы, которую мы обсудим позже. Вот ее формулировка.

A5.3.11 Теорема. Если G - произвольная LCA-группа, тогда для любых g и h из G, с $g \neq h$, существует непрерывный гомоморфизм $\phi : G \to \mathbb{T}$ такой, что $\phi(g) \neq \phi(h)$.

Упражнения A5.3

1. Покажите, что если $\{G_i : i \in I\}$ - семейство топологических групп, то

   (i) $\prod\limits_{i\in I} G_i$ - топологическая группа;

   (ii) $\prod\limits_{i\in I}^{r} G_i$ - плотная подгруппа $\prod\limits_{i\in I} G_i$;

   (iii) $\prod\limits_{i\in I} G_i$ локально компактна тогда и только тогда, когда каждая группа G_i локально компактна и все, за исключением конечного числа, G_i компактны;

   (iv) $\prod\limits_{i\in I}^{r} G_i$ локально компактна и хаусдорфова тогда и только тогда, когда каждая группа G_i локально компактна и хаусдорфова и $G_i = \{e\}$ для всех, за исключением конечного числа, G_i.

2. Покажите, что если G - абелева топологическая группа с открытой делимой подгруппой H, то G топологически изоморфна $H \times G/H$.

3. Пусть G абелева группа без кручения (то есть, $g^n \neq e$ для всех $g \neq e$ из G, и всех $n \in \mathbb{N}$). Покажите, что если g и h из G и $g \neq h$, то существует гомоморфизм ϕ из G в $\mathbb{R}$ такой, что $\phi(g) \neq \phi(h)$.

4. Пусть G - локально компактная тотально несвязная топологическая группа.

   (i) Покажите, что существует база окрестностей единицы , состоящая из компактных открытых подгрупп.
   (Подсказка: Вы можете предположить, что любое локально компактное хаусдорфово тотально несвязное топологическое пространство имеет базу, состоящую из открытых компактных множеств.)

   (ii) Покажите, что если G компактна, то “подгруппы"в (i) можно выбрать нормальными.

   (iii) Таким образом покажите, что любая компактная тотально несвязная топологическая группа топологически изоморфна замкнутой подгруппе произведения конечных дискретных групп.

(Подсказка: Пусть $\{A_i : i \in I\}$ - база окрестностей единицы, состоящая из открытых нормальных подгрупп. Пусть $\phi_i : G \to G/A_i$, $i \in I$, - канонические гомоморфизмы, определите $\Phi : G \to \prod_{i \in I}(G/A_i)$, положив $\Phi(g) = \prod_{i \in I} \phi_i(g_i)$.)

5. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ - каноническое отображение, а θ - произвольное иррациональное число. На топологическом пространстве $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ определим операцию.

$$(x_1, x_2, t_1, t_2) \cdot (x'_1, x'_2, t'_1, t'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, t_1 + t'_1 + f(x_2 x'_1), t_2 + t'_2 + f(\theta x_2 x'_1)).$$

Покажите, что G с этой операцией является топологической группой, а ее коммутатор не замкнут в G.

6. Пусть I - множество, упорядоченное частичным порядком $\geq$. Пусть для каждого $i \in I$ задана хаусдорфова топологическая группа G_i. Предположим, что для всех i и j из I , $i < j$, существует открытый непрерывный гомоморфизм f_{ji} из G_j в G_i. Также предположим, что если $i < j < k$, то $f_{ki} = f_{ji} f_{kj}$. Объект, состоящий из I, групп G_i и отображений f_{ji}, называется **обратной системой отображений** или **проективной системой отображений**. Подгруппа H группы $G = \prod_{i \in I} G_i$, состоящая из всех $\prod_{i \in I}(x_i)$ таких, что если $i < j$, то $x_i = f_{ji}(x_j)$ называется **проективным пределом** обратной системы отображений. Покажите, что H - замкнутая подгруппа G.

A5.4 Категория Бэра и Теоремы об Открытом Отображении

A5.4.1 Теорема. (Теорема Бэра для Локально Компактных Пространств) Если X - локально компактное регулярное пространство, то X нельзя представить в виде объединения счетного семейства замкнутых множеств с пустыми внутренностями.

Доказательство. Предположим, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где каждое из A_n замкнуто и $\mathrm{Int}(A_n) = \phi$, для всех n. Рассмотрим $D_n = X \backslash A_n$. Тогда каждое из D_n открыто и плотно в X. Мы намереваемся показать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$, что противоречит равенству $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Пусть U_0 - непустое открытое подмножество X такое, что $\overline{U_0}$ - компактно. Так как D_1 плотно в X, $U_0 \cap D_1$ является непустым открытым подмножеством X. Используя регулярность X, мы можем выбрать непустое открытое множество U_1 такое, что $\overline{U_1} \subseteq U_0 \cap D_1$. Определим U_n по индукции так, что каждое из U_n является непустым открытым множеством и $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \cap D_n$. Так как $\overline{U_0}$ компактно, а каждое из $\overline{U_n}$ непусто, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Следовательно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

A5.4.2 Замечание. Ранее, Теорема Бэра была нами доказана для полных метрических пространств (Теорема 6.5.1.) Вышеприведенная Теорема остается верной если заменить “регулярное локально компактное"на “локально компактное хаусдорфово".

A5.4.3 Следствие. Пусть G - счетная локально компактная хаусдорфова топологическая группа. Тогда G - дискретная группа.

Доказательство. Упражнение. □

A5.4.4 Теорема. (Теорема об Открытом отображении для Локально Компактных Групп) Пусть G - локально компактная группа, являющаяся σ-компактной; то есть, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где каждое из A_n компактно. И пусть f - произвольный непрерывный гомоморфизм группы G на локально компактную хаусдорфову группу H. Тогда f - открытое отображение.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ - семейство всех симметричных окрестностей единицы e в G, а $\mathcal{U}'$ семейство всех окрестностей единицы e в H. Достаточно показать, что для каждой окрестности $U \in \mathcal{U}$ существует окрестность $U' \in \mathcal{U}'$ такая, что $U' \subseteq f(U)$.

Пусть $U \in \mathcal{U}$. Тогда существует окрестность $V \in \mathcal{U}$ такая, что $\overline{V}$ - компактно, и $(\overline{V})^{-1}\overline{V} \subseteq U$. Семейство множеств $\{xV : x \in G\}$ является открытым покрытием G и, поэтому, покрытием каждого из компактных множеств A_n. Таким образом, конечное число этих множеств покрывает любое фиксированное A_n. То есть, существует счетное семейство $\{x_nV : n \in \mathbb{N}\}$, покрывающее G.

Поэтому, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_nV) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n\overline{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n)f(\overline{V})$. Это позволяет представить H как счетное объединение замкнутых множеств, и по Теореме Бэра (Теорема 5.4.1), одно из них должно иметь непустую внутренность; то есть, $f(x_m)f(\overline{V})$ содержит открытое множество. Тогда $f(\overline{V})$ содержит открытое подмножество V' группы H.

Для завершения доказательства выберем произвольную точку x' из V' и положим $U' = (x')^{-1}V'$. Получим

$$U' = (x')^{-1}V' \subseteq (V')^{-1}V' \subseteq (f(\overline{V}))^{-1}f(\overline{V}) = f((\overline{V})^{-1}\overline{V}) \subseteq f(U),$$

как и требовалось. □

A5.4.5 Замечание. Ранее, мы доказывали Теорему об Открытом Отображении для Банаховых Пространств (Theorem 6.5.5)

Упражнения A5.4

1. Покажите, что любая счетная локально компактная хаусдорфова группа дискретна.

2. Покажите, что Теорема A5.4.4 неверна, если убрать любое из условий "σ-компактность" или отображение "на".

3. Покажите, что произвольный непрерывный гомоморфизм компактной группы на хаусдорфову группу является открытым.

4. Покажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$, компактная топологическая группа $\mathbb{T}^n$ топологически изоморфна фактор-группе $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

5. (i) Пусть ϕ - гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу H. Покажите, что если X - непустое подмножество G такое, что ограничение $\phi : X \to H$ - открытое отображение, то $\phi : G \to H$ тоже открытое отображение.

   (Подсказка: Для любого подмножества U из G, $\phi(U) = \bigcup\limits_{g \in G} \phi(U \cap gX)$.)

   (ii) Таким образом, покажите, что если G и H - локально компактные хаусдорфовы группы, а ϕ - непрерывный гомоморфизм $: G \to H$ такой, что для некоторого компактного подмножества K из G, $\phi(K)$ алгебраически порождает H, то ϕ - открытое отображение.

   (Подсказка: Покажите, что существует компактная окрестность U единицы e такая, что $K \subseteq U$. Определите $X =$ подгруппа, алгебраически порожденная U.)

6. Пусть G и H - топологические5 группы, и пусть η - гомоморфизм группы H в группу автоморфизмов G. Определите групповую структуру на множестве $G \times H$, положив

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \eta(h_1)(g_2), h_1 h_2).$$

   Далее, пусть $(g, h) \mapsto \eta(h)(g)$ - непрерывное отображение из $G \times H$ на G. Покажите, что

   (i) Каждое из $\eta(h)$ является гомеоморфизмом G на себя; и

   (ii) $G \times H$ с этой групповой структурой и топологией произведения является топологической группой. (Эта группа называется **полупрямым произведением** группы G на H, определенным η, и обозначается через $G \rtimes_\eta H$.)

7. (i) Пусть G - σ-компактная локально компактная хаусдорфова топологическая группа с замкнутой нормальной подгруппой N и замкнутой подгруппой H такими, что $G = NH$ и $N \cap H = \{e\}$. Покажите, что G топологически изоморфна полупрямому произведению $N \rtimes_\eta H$, определенному надлежащим образом.

(Подсказка: Рассмотрите $\eta(h)(n) = h^{-1}nh$, $h \in H$ и $n \in N$.)

(ii) Покажите, что если H тоже нормальна, то G топологически изоморфна $N \times H$.

(iii) Покажите, что если A и B - замкнутые, компактно порожденные подгруппы локально компактной хаусдорфовой абелевой топологической группы G такие, что $A \cap B = \{e\}$ и $G = AB$, то G топологически изоморфна $A \times B$.

8. Пусть G и H - хаусдорфовы топологические группы, а f - непрерывный гомоморфизм из G в H. Покажите, что если G имеет окрестность U единицы e такую, что $\overline{U}$ компактно, а $f(U)$ - окрестность единицы e в H, то f - открытое отображение.

Литература

[1] J. Banks, G. Davis, P. Stacey, J. Brooks, and G. Cairns. On devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:332–334, 1992.

[2] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. *Chaos: A Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[3] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. *Additive subgroups of topological vector spaces*. Imperial College Press, London, 2003.

[4] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. *Selected topics in infinite-dimensional topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

[5] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. *Jour. Math (Liouville)*, (9) 7:345–379, 1928.

[6] Nicolas Bourbaki. *General topology v.1 & v.2*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[7] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.

[8] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[9] Alan Dunn. *Sarkovskii's Theorem–Part 1*, http://ocw.mit.edu/nr/rdonlyres/mathematics/18-091spring–2005/a335fb2e-7381–49d4–b60c–7cbd2f349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.

[10] Ryszard Engelking. *General topology*. PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[11] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. *Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[12] Norman J. Girardot. *Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun)*. University of California Press, Berkeley, California, 1983.

[13] Paul Halmos. *Naive set theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.

[14] Felix Hausdorff. *Set Theory (translated from the original German)*. Chelsea, New York, 1962.

[15] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[16] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications*. W. de Gruyter, New York, 1998.

[17] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:865, 1992.

[18] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. *Abstract algebra and famous impossibilities*. Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

[19] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[20] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to set theory and topology*. Pergamonn Press, New York, 1961.

[21] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Springer, New York, 2000.

[22] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York, 2002.

[23] Saunders Maclane. *Categories for the working mathematician, second edition*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[24] R.D. Mauldin, editor. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*. Birkhäuser, Boston, 1981.

[25] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645–647, 1974.

[26] Henri Poincarè. *Science and method; translated and republished*. Dover Press, New York, 2003.

[27] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukranian Mat. Z.*, 16:61–71, 1964.

[28] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. *Word problems II, Stud. Logic Found. Math.*, 995:373–394, 1980.

[29] George E. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis*. McGraw Hill, New York, 1963.

[30] *The MacTutor History of Mathematics Archive*. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/, 2001–.

[31] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. *Amer. Math. Monthly*, 101:353–355, 1994.

[32] Russell C. Walker. *The Stone-Cech compactification*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[33] R.L. Wilder. *Topology of manifolds*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.

[34] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82:985–992, 1975.

Предметный указатель