눈물 없는 위상수학[1]

SIDNEY A. MORRIS

www.sidneymorris.net

2017년 12월 26일 버전[2]

이 책의 2007년 또는 이후 버전의 일부 번역본:

아랍어 (Alia Mari Al Nuaimat 박사 역),
중국어 (Fusheng Bai 박사 역),
그리스어 (Kyriakos Papadopoulos 박사 역),
한국어 (Myung Hyun Cho 박사, Junhui Kim 박사, Mi Ae Moon 박사 역),
페르시아어 (Asef Nazari Ganjehlou 박사 역),
러시아어 (Eldar Hajilarov 박사 역),
스페인어 (Guillermo Pineda-Villavicencio 박사 역),
터키어 (Soley Ersoy 박사, Mahmut Akyiğit 박사 역)

최신 버전의 책은 반드시 싸이트 www.topologywithouttears.net에서 다운 받아야 한다.

이 책에는 풀이가 있는 다양한 보기가 실려 있지만 연습문제의 해답은 제공되지 않는다. 오히려 그 편이 학습에 더 도움이 되기 때문이다.

스스로 연습문제를 풀면서 문제를 터득하기 바란다.

[2] 이 책은 지속적으로 업데이트 및 확장되고 있으며 현재는 부록을 포함해 대략 15장 정도로 구성되어 있다. 오류나 개선이 필요한 사항이 있으면 이메일 morris.sidney@gmail.com로 연락바란다.
페이스북 그룹, Topology Without Tears Readers에 참여하면 책과 연습문제에 관련하여 다른 독자들과 토론할 수 있다. 2016년 3월 기준으로 4,300명 이상이 이 그룹에 가입하였다.
https://www.facebook.com/groups/6378545442를 보기 바란다.
이 책은 YouTube 동영상을 보조 자료로 활용하고 있다. 동영상은 www.topologywithouttears.net에서 확인할 수 있으며 앞으로도 계속해서 추가될 예정이다. 동영상은 2016년 3월 기준으로 조회수가 23,000회를 넘어섰으며 YouTube에서 구독 신청을 하면 새로운 비디오가 추가될 때에 알림을 받을 수 있다.

차 례

제 0 장

소개

위상수학은 수학의 아주 중요하고 흥미로운 분야다. 위상수학 연구는 새로운 개념과 정리를 탐구할 뿐만 아니라 연속함수와 같은 오래된 개념도 다루고 있다. 하지만 이 정도로는 위상수학의 중요성이 제대로 전달되지 않는다. 위상수학은 수학의 거의 모든 분야에 영향을 끼치고 있다. 대수학, 해석학, 범주론, 혼돈이론, 연속체역학, 동역학, 기하학, 산업수학, 수리생물학, 수리경제학, 수리금융학, 수학적 모델링, 수리물리학, 통신수학, 정수론, 수치수학, 오퍼레이션 리서치, 또는 통계학에 푹 빠져있는 (또는 빠지게 될) 사람이라 하더라도 수학자가 되기를 원한다면 누구나 위상수학에 대한 기초 지식을 가지고 있어야 한다. (이 책의 마지막에 있는 참고 문헌만 보더라도 위상수학이 이 모든 분야와 연관이 있다는 사실을 알 수 있다.) 지난 세기의 수학자들에게 집합과 함수가 가장 기초가 되는 개념이었다면 현대 수학자들에게는 컴팩트성, 연결성, 조밀성과 같은 위상수학적 개념이 학문의 중요한 근간이다.

위상수학은 점집합 위상수학이라고도 불리는 일반위상수학, 대수적 위상수학, 미분 위상수학, 위상대수학 등의 갈래로 나뉜다. 이 중 일반위상수학은 다른 위상수학을 배우기 위한 입문과정이라 할 수 있다. 이 책의 목적은 일반위상수학에 대한 탄탄한 기초 지식을 전달하는 데 있다. 첫 열 장(chapter)을 성실히 공부하고 책에 있는 적어도 반 이상의 연습문제를 풀어본다면 이 기초 지식을 반드시 습득할 수 있다.

추상대수학과 같은 수학의 공리론적인 분야[1]를 공부한 적이 없는 독자는 증명하는 것을 배우는 것 자체가 고단할 것이다. 증명법을 터득하는데 도움을 주기 위해 책 초반에 증명의 일부는 아니지만 그 바탕이 된 사고과정을 메모 형태로 많이 남겼다.

[1]순수수학 입문에 도움이 되는 동영상 자료는 저자의 다음 링크에서 확인해 볼 수 있다. http://youtu.be/veSbFJFjbzU

메모는 다음과 같이 기재되어 있다:

> 이 메모는 증명에 도달하기 전에 저자가 거친 사고과정을 나타낸다. "발견" 또는 "실험 단계"라고 할 수 있겠다. 하지만 모든 독자가 알고 있듯이 이 발견 및 실험은 중요한 과정이지만 공식적인 증명을 대체할 수는 없다.

일반 문장과 수학에는 중요한 차이점이 있는데, "또는"이 다른 의미로 해석된다는 것이다. 일반 문장에서 "명제(a) 또는 명제(b)는 참"이라고 하면 "명제(a)가 참이거나 명제(b)가 참"이라는 의미가 된다. 명제(a), 명제(b) 모두가 참이라는 뜻은 아니다. 하지만 수학에서는 이 문장을 다르게 해석한다. 수학에서 "또는"은 배타적인 의미를 지니지 않다. 따라서 수학적 관점에서 이 문장을 해석하면 "명제(a)가 참이거나, 명제(b)가 참이거나, 명제(a), 명제(b) 모두가 참"이라는 의미가 된다. 예를 들어, $x \geq 2$ 또는 $x \leq 2$ 에서 $x = 2$이면 $x \leq 2$ 와 $x \geq 2$가 모두 참인 것처럼 말이다. 이러한 수학적 해석은 처음엔 혼란스러울 수 있다. 정리하자면 수학에서 "명제(a) 또는 명제(b)는 참"이라고 하면 "명제(a)가 참이거나, 명제(b)가 참이거나, 명제(a), 명제(b) 모두가 참"이 된다. **수학에서 "또는"은 배타적인 의미가 아니다**라는 것을 기억하자.

이 책은 Donald Knuth가 제작한 훌륭한 문서 작성 프로그램, TEX로 조판되었다. 이 뛰어난 소프트웨어를 활용하여, 평소 저자가 중요하게 생각하는 견지에서 가능한 한 명제와 증명이 같은 페이지에 담겨 있는 텍스트를 만들기 위해 노력했다. 이러한 구도를 이용하면 독자는 이미 알고 있는 사실과 앞으로 증명하려는 것, 그리고 전체 증명 과정 중 현재 단계 등을 쉽게 파악할 수 있다. 반 페이지를 공란으로 남겨 놓더라도 (또는 TEX조판 기능의 도움을 살짝 받는다 하더라도) 되도록 명제와 그 증명이 한 페이지 안에 들어가도록 제작하였다.

책에는 다양한 연습문제가 실려 있다. 위상수학을 마스터할 수 있는 방법은 연습문제를 많이 풀어보는 것 외에는 없다. 연습문제에 대한 답은 실려 있지 않지만 앞으로도 싣지 않을 예정이다. 본문에 이미 보기 및 증명이 충분히 실려 있기 때문에 연습문제에 대한 해답을 따로 제공할 필요는 없다고 본다. 그리고 그 편이 바람직하기도 하다. 대부분의 연습문제는 새로운 개념을 활용하도록 고안되었고 특별히 중요하다고 생각되는 개념은 보통 본문에서 다시 설명하고 있다.

어려운 연습문제에는 *표시를 해두었다.

공부하면서 어려운 점과 연습문제에 대한 해답, 책에 대한 의견 그리고 추가 참고 도서 목록을 공유하고 싶어하는 독자가 있을 수 있어 "Topology Without Tears Readers"라는 페이스북 그룹을 제작하였다. 누구나 이 그룹에 참여 가능하다. 그룹을 검색하고 바로 가입하기 바란다.

마지막으로, 수학의 진보 과정은 역사적 맥락 속에서 가장 쉽게 이해될 수 있다고 본다. 하지만 안타깝게도 이 책은 수학의 역사적 맥락은 충분히 설명하지 못하고 있다. 현재로써는 부록2에 위상수학의 특성에 대해 기록한 것으로 만족해야 한다. 그 내용은 *The MacTutor History of Mathematics Archive* [304]에서 주로 발췌되었다. *The MacTutor History of Mathematics Archive* [304] 웹사이트에서 위상수학의 다른 중요한 특성과 부록2에서 설명하고 있는 내용의 원

문을 참고하기를 바란다. 하지만 한가지 자료만 가지고 수학의 역사적 맥락을 파악하기란 쉽지 않다.

이 책에서 다루고 있는 내용 대부분은 20세기 초 수학자들에 의해 발견된 사실이다. 현재는 그 경계가 옮겨졌지만 당시 연구의 중심이 되는 곳은 폴란드였다. 제2차 세계 대전이 수학의 중심을 바꾸어 놓았다고 할 수 있다. 자세한 내용을 알고 싶다면 부록2를 참고 바란다.

0.1 감사의 말

지난 30년간 이 책의 초기 버전 일부는 La Trobe 대학교, New England 대학교, Wollongong 대학교, Queensland 대학교, South Australia 대학교, New York 시립대학교, Ballarat 대학교 등에서 교재로 사용되었다. 이전 버전에 대한 비판을 아끼지 않고, 오류를 보고해준 많은 학생들에게 감사를 표한다. 무엇보다 본문의 수많은 오류와 부족한 점을 지적해준 Deborah King과 Allison Plant에게 감사의 마음을 전하고 싶다. 다양한 개정 버전의 책을 읽고, 개선점을 제안해준 나의 동료 및 지인, Marshall Ash, Jessica Banks, Ewan Barker, Colin Benner, James Dick, Will Dickinson, Maria Gkerats, Eldar Hajilarov, Karl Heinrich Hofmann, Manisha Jain, Ralph Kopperman, Ray-Shang Lo, Sordi Massimiliano, Aidan Murphy, Rodney Nillsen, Guillermo Pineda-Villavicencio, Peter Pleasants, Kyriakos Papadopoulos, Strashimir Popvassilev, Geoffrey Prince, Carolyn MaPhail Sandison, Bevan Thompson, Juqiang Zheng에게도 감사를 전한다. 이 책의 부록을 집필하는데 참고한 저술의 저자들에게도 특별히 감사 인사를 전하고 싶다. 혼돈이론을 집필하는 데는 Rod Nillsen의 노트가 도움이 되었고, 무한집합이론에 대한 정리는 1970년대에 Jack Gray 교수가 집필한 New South Wales 대학의 강의 노트 "Set Theory and Transfinite Arithmetic"가 큰 도움이 되었다.

책의 곳곳에는, 특히 부록2에는 수학의 역사가 설명되어 있다. 이 부분은 훌륭한 자료인 Bourbaki [43]와 *The MacTutor History of Mathematics Archive* [304]를 인용하였다.

처음 이 책은 Donald Knuth가 제작한 TEX 패키지로 조판되었고, 책이 확장되고 색이 추가되면서 LATEX를 이용하여 업데이트되었다. 부록5는 저자가 1977년 집필한 "Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups" Morris [231]를 기반으로 작성되었다. 10년 전 TEX으로 이 책을 조판하는데 도움을 주신 Carolyn McPhail Sandison 박사에게도 감사를 표한다.

0.2 독자 — 지역 및 전공

이 책은 알제리, 아르헨티나, 호주, 오스트리아, 방글라데시, 볼리비아, 벨라루스, 벨기에, 벨리즈, 브라질, 불가리아, 캄보디아, 카메룬, 캐나다, 칠레, 가봉, 중국, 콜롬비아, 코스타리카, 크로아티아, 키프로스, 체코, 덴마크, 에콰도르, 이집트, 에스토니아, 에티오피아, 피지, 핀란드, 프랑스, 가자, 독일, 가나, 그리스, 그린란드, 과테말라, 가이아나, 온두라스, 헝가리, 아이슬란드, 인도, 인도네시

아, 이란, 이라크, 이스라엘, 이탈리아, 자메이카, 일본, 요르단, 케냐, 한국, 쿠웨이트, 라트비아, 라이베리아, 리투아니아, 룩셈부르크, 말레이시아, 몰타, 모리셔스, 멕시코, 뉴질랜드, 니카라과, 나이지리아, 노르웨이, 파키스탄, 파나마, 파라과이, 페루, 폴란드, 포르투갈, 푸에르토리코, 카타르, 루마니아, 러시아, 세네갈, 세르비아, 시에라리온, 싱가포르, 슬로베니아, 남아프리카공화국, 스페인, 스리랑카, 수단, 수리남, 스웨덴, 스위스, 시리아, 대만, 탄자니아, 태국, 네덜란드, 트리니다드토바고, 튀니지, 터키, 영국, 우크라이나, 아랍에미리트, 미국, 우루과이, 우즈베키스탄, 베네수엘라, 베트남 등지에서 회계사, 보험계리사, 응용 및 순수 수학자, 천문학자, 생물학자, 화학자, 컴퓨터 그래픽스 전문가, 컴퓨터 과학자, 계량경제학자, 경제학자, 항공, 데이타베이스, 전기, 기계, 소프트웨어, 우주항공, 공간, 통신공학 엔지니어, 금융 전문가, 게임이론가, 신경생리학자, 영양학자, 옵션 트레이더, 철학자, 물리학자, 정신의학자, 정신분석학자, 심리학자, 조각가, 소프트웨어 개발자, 공간정보 과학자, 통계학자로 일하고자 하는, 또는 일했거나 일을 하고 있는 교수, 대학원생, 학부생, 고등학생, 은퇴자 등이 사용하였다. "경제학 필수 과목을 대학원 수준의 교육 노트"로 정리하는 데 도움을 주는 유용한 참고 자료 사이트 http://www.econphd.net/notes.htm와 위상수학을 다루는 Topology Atlas http://at.yorku.ca/topology/educ.htm에서도 이 책을 참고하고 있다.

0.3 독자의 찬사

Hector Rosey, 멕시코: “이 책 정말 좋아요.”;
T. Lessley, 미국: “재미있는 책, 아름다운 글”;
E. Ferrer, 호주: “정말 멋진 노트에요.”;
Andreas Loss, 독일: “박사님 글 재미있게 읽고 있어요!”;
Yao Jin, 중국: “중국 저장성, 항저우에 위치한 Zhejiang 과학기술대학교에서 엔지니어링을 공부하고 있는 학생입니다. 박사님의 ‘눈물 없는 위상수학’을 읽고 푹 빠졌습니다.”;
E. Yuan, 독일: “위상수학을 처음 시작하는 사람들이 보기에 정말 좋은 책입니다.”;
Dre Johnson, 미국: “이 책 정말 좋습니다.”;
S. Kumar, 인도: “수학자가 아닌 사람도 쉽게 이해할 수 있도록 주제를 설명해주셔서 감명받았습니다.”;
Pawin Siriprapanukul, 태국: “현재 경제학 박사과정을 준비 중인데 복잡한 주제인 위상수학을 공부하는데 큰 도움을 받았습니다.”;
Hannes Reijner, 스웨덴: “훌륭합니다.”;
Manisha Jain, 인도: “현재 박사님 책을 읽고 있는데 정말 읽기 쉽게 쓰여졌다는 것을 말씀드리고 싶습니다. 다른 책들을 많이 읽어봤지만 이 책은 내용 파악이 매우 쉽습니다. 사용하고 있는 단어는 우리가 일상생활에서 자주 사용하는 용어이고 모든 내용이 물 흐르듯 잘 이어집니다. 정말 좋습니다. 위상수학이 어렵게 느껴지던 시기였는데 이 책이 도움이 될 것 같습니다. 정말 감사합니다.”;
G. Gray, 미국: “멋진 글”;
Dipak Banik, 인도: “아름다운 노트”;

Jan van Linschoten, 네덜란드: “몇 날 며칠을 위상수학 기초에 대해 명료하고 알기 쉽게 설명한 책을 찾고 있었습니다. 늦은 저녁, 한 시간 정도 박사님 책을 읽었는데 바로 박사님 책이 제가 찾던 책이라는 걸 알게 되었습니다.”;
Daniel Csaba, 헝가리: “저는 부다페스트에 위치한 Eotvos Lorand 대학교에서 경제학을 공부하고 있는 학생입니다. 지금 교수님이 쓰신 너무나도 멋진 책 ’눈물 없는 위상수학’을 읽으면서 공부하고 있습니다.”;
Andrea johnson, 미국, 롱비치: “ ‘눈물 없는 위상수학’은 제가 위상수학을 이해하기 위해 꼭 필요한 책이었습니다. 저 같은 사람을 위한 박사님의 인도주의적 노력에 감사드리고 싶습니다!”;
B. Pragoff Jr, 미국: “학부생들도 쉽게 이해할 수 있도록 위상수학을 설명하고 있습니다.”;
Tapas Kumar Bose, 인도: “훌륭한 정보 모음”;
Debanshu Ratha, 인도: “최근 교수님 웹 페이지에서 “눈물 없는 위상수학”을 읽었습니다. 그리고 교수님께 얼마나 감사했는지 모릅니다. 저는 현재 인도에 있는 대학교 3학년 학부생입니다. 지난 학기에 처음 위상수학 수업을 들었는데 박사님 책이 좋은 참고서적이 되었습니다. 현재 수학을 공부하고 있는 저의 여동생에게도 이 책을 소개해 주었습니다. 동생도 박사님 책이 정말 좋다고 합니다.”;
Bosko Damjanovic, 세르비아: “인터넷에서 눈물 없는 위상수학을 읽었습니다. 정말 좋은 책인 것 같습니다.”;
Kyriakos Papadopoulos, 그리스, 크산티: “인터넷에서 처음 박사님 책을 보게 되었습니다. 복잡한 개념을 쉽게 설명해 주시는 박사님의 방식에 반했습니다.”;
Mekonnen Yimam, 에티오피아: “교수님 책은 대학원 과정을 공부하는 저에게 가장 중요한 참고서적입니다. 이 책 없이는 위상수학을 섭렵하는 길이 매우 험난할 것입니다... 교수님 책이 제 인생에 얼마나 큰 기여를 하고 있는지 말씀드리고 싶습니다.”;
Yassine Amar: “위상수학을 커피와 도넛만큼이나 쉽게 이해시켜주는 엄청난 책”;
Muhammad Sani Abdullahi, 나이지리아: “이 감사함을 뭐라 말로 표현해야 할 지 모르겠습니다. 단순히 ‘감사합니다’로는 제 마음을 다 전할 수 없기 때문입니다. 도움을 받았다면 최소한 ‘감사합니다’라고 말하는 게 예의이기에 이렇게 감사 인사를 전하지만, 제가 이 말에 담긴 의미보다 훨씬 많은 것을 교수님께 받았다는 것을 알고 있습니다. 항상 교수님을 위해 기도하겠습니다.”;
Spyridon N. Dimoudis, 그리스: “최근 박사님의 “눈물 없는 위상수학”을 알게 되었습니다. 위상수학을 독학하려고 계획 중이었는데 “눈물 없는 위상수학”을 몇 페이지 읽어보고 이 책이 앞으로 엄청난 도움이 되겠다는 생각이 들었습니다.”;
Emelife Onochie, 나이지리아: “저는 나이지리아 아와카에 있는 Nnamdi Azikiwe 대학에서 수학 이학석사과정을 밟고 있는 학생입니다. 교수님의 “눈물 없는 위상수학”을 인터넷에서 읽었습니다. 돈에 연연하지 않고 자신이 가지고 있는 지식을 나누어주는 교수님 같은 분들께 깊은 감사를 전하고 싶습니다.”;
S. Saripalli, 미국: “홈스쿨링을 하고 있는 10학년입니다. . . 눈물 없는 위상수학, 재미있게 읽고 있습니다.”;

Roman Goncharenko, 체코: “교수님의 훌륭한 책 “눈물 없는 위상수학”을 인쇄할 수 있는 비밀번호를 알려주시면 감사하겠습니다. 저는 프라하의 CERGE-EI에서 경제학을 공부하고 있는 대학원생입니다.”;
Samuel Frade, 미국: “먼저 이런 멋진 위상수학 서적을 집필해 주셔서 감사합니다. 첫 두 장을 읽었는데 정말 재미있었습니다. 조언을 한가지 드리자면 어려운 연습문제를 더 추가하면 좋을 것 같습니다. 책에 실린 연습문제는 제가 풀기에는 조금 쉬웠습니다. 그럼 다시 본론으로 돌아가서, 저는 수학을 전공하고 있는 학생입니다. 해석학, 추상대수학 수업을 주로 들었는데 교수님 책은 더 넓은 독자층을 대상으로 하고 있는 것 같습니다. 사실 저희 학교는 심각한 재정난 때문에 수학과에서 위상수학을 가르치고 있지 않습니다. 하지만 저는 제가 공부하는 실해석학 및 복소해석학을 보다 깊이 이해하고자 혼자서 위상수학을 공부하고 있습니다.”;
Maria Amarakristi Onyido, 나이지리아: “저는 Nigeria 대학교에서 수학을 전공하고 있는 졸업반 학생입니다. . . 교수님 책은 어려운 과목인 위상수학을 더 재미있게 공부할 수 있도록 도와주는 아주 흥미로운 책인 것 같습니다. 위상수학을 설명하는 방식이 뛰어나고 저 같은 초보자도 일반위상수학의 기초를 쉽게 이해할 수 있도록 도와줍니다.”;
Andree GarcÃŋa Valdivia, 페루: “이 책의 스페인어 버전을 다운받을 수 있을까요? 개인 용도로만 사용할 예정입니다. 저는 경제학을 전공하고 있는 학생이고, 위상수학이라는 주제에 관심이 있습니다. 현재 라틴 아메리카에서 가장 오래된 대학교인 San Marcos 대학교에서 공부하고 있습니다.”;
Eszter Csernai, 헝가리: “저는 수리경제학을 공부하고 있는 학부생입니다. . . 이미 이런 이야기를 많이 들으셨겠지만, 교수님 책은 정말 대단하다는 걸 다시 한번 말씀드리고 싶습니다!”;
Mehmet Terziler 교수, 터키, Yasar 대학교: “박사님의 저서 “눈물 없는 위상수학”을 저의 강의 자료로 사용하고 싶습니다. 이 멋진 저서의 인쇄 버전을 보내주시면 정말 감사하겠습니다.”;
Christopher Roe, 호주: “먼저 ‘눈물 없는 위상수학’이라는 책을 써 주셔서 감사합니다. 박사님께는 아주 기본적인 지식일지 모르겠으나, 저에게는 이 책을 읽는 것 자체가 매우 대단한 경험이었습니다.”;
Jeanine Dorminey, 미국: “이번 학기 위상수학 강의를 듣는데 많은 어려움을 느끼고 있었습니다. 교수님 책이 큰 도움이 되어 인터넷으로 계속 읽고 있습니다.”;
Anwar Fawakhreh 박사, 사우디아라비아, Qassim 대학교: “ “눈물 없는 위상수학”이라는 멋진 책을 쓰신 것을 축하드립니다. 정말 대단한 책입니다. 이 책은 학생들이 이해하기 쉽게 쓰여져 강의 교재로 사용하기에 아주 적합한 것 같습니다. 저는 현재 학부생들에게 위상수학을 가르치고 있습니다. 박사님 책이 위상수학을 이해하는데 도움을 주는 아주 쉽고 좋은 책이라는 생각이 들어 “눈물 없는 위상수학”을 학생들을 위한 강의 교재로 사용할까 합니다. 학생들 교재와 도서관 비치용으로 아랍어판 책을 주문하고 싶은데, 어떻게 구입할 수 있는지 알 수 있을까요?”;
Michael Ng, 마카오: “다른 수학책과 달리 박사님의 책은 아주 친근한 설명 방식을 사용하고 있습니다. 책 앞 장에 나오는 거의 모든 정리의 증명 과정에 박사님만의 힌트와 분석 방법을 남겨두신 것을 예로 들 수 있습니다. 이러한 설명 방법을 사용하면 특히 저 같은 초보자들도 증명 과정을 더

쉽게 이해할 수 있는 것 같습니다. 각 정의를 설명한 후에는 다양한 보기 및 반례를 들어 독자가 명확하고 제대로 된 개념을 습득할 수 있도록 돕고 있습니다.";
Elise Delagnes, 영국: "Oxford 대학교에서 위상수학을 공부하고 있는 학생입니다. 최근 공부하고 있던 책이 예상보다 어렵게 느껴지던 찰나에 지도 교수님께서 "눈물 없는 위상수학"을 추천해주셨습니다.";
Tarek Fouda, 미국: "Stevens 공과대학에서 금융공학 이학석사를 취득하기 위해 고등미적분을 공부하고 있습니다. 위상수학이라는 주제는 이번에 처음 접했습니다. 관련 서적을 몇 권 구입해서 읽어보았는데 박사님 책처럼 이 주제를 재미있게 설명하고 있는 책은 없었습니다. 기차 안이나 학교, 어디에서든지 박사님 책을 가지고 다니며 읽고 싶습니다.";
Ahmad Al-Omari, 말레이시아: "저는 말레이시아의 UKM에서 일반위상수학을 연구하고 있는 박사과정 학생입니다. 교수님 책은 정말 흥미로운 것 같습니다.";
Jose Vieitez, 우루과이: "Facultad de Ciencias of Universidad de la Republica에서 이번 학기에 위상수학을 가르치고 있습니다. 박사님의 아주 훌륭한 저서의 인쇄 버전을 받고 싶습니다.";
Muhammad Y. Bello, 나이지리아, Bayero 대학교, 수학 교수: "박사님의 온라인 서적 '눈물 없는 위상수학'은 위상수학적 지식을 얻고자 하는 모든 이들에게 아주 훌륭한 참고서적입니다. 저는 위상수학의 기본 배경이 되는 해석학을 가르치고 있습니다. 하지만 안타깝게도 몇몇 제자들은 이런 배경지식을 잊어버렸거나 아예 가지고 있지 않습니다. 온라인 책을 읽어본 결과, 박사님의 책이 학생들에게 해석학적 배경지식을 상기 또는 학습시키는 데 좋은 참고서적이 되겠다고 생각했습니다.";
Ljubomir R. Savic 교수, 세르비아, Belgrade 대학교, 역학 및 구조 역학 연구소: "최근 위상수학을 공부하기 시작했고, 박사님의 훌륭한 책을 읽게 되었습니다. 제 전공 분야는 연속체 역학 및 구조 역학입니다.";
Pascal Lehmann, 독일: "박사님 책을 인쇄해서 그 한 모퉁이에 메모를 남기며 공부해보고 싶습니다.";
Luis J. Alias 교수, 스페인, Murcia 대학교, 수학과: "박사님의 책 "눈물 없는 위상수학"을 최근에 발견했습니다. 저는 이번 학기에 일반위상수학을 가르칠 예정입니다. (당장 내일 오전부터네요.) 위상수학은 작년부터 가르치기 시작했는데 작년에는 Munkres 박사의 책 (위상수학, 2판) 2, 3, 4, 5, 9장을 위주로 학생들을 가르쳤습니다. 박사님 책을 읽는 동안 정말 즐거웠습니다. 특히 새로운 개념을 설명하는 박사님의 방식이 재미있었고, 책 곳곳에 학생들에게 던져주는 힌트와 중요 노트들이 마음에 들었습니다.";
Daniel Nkemzi, 카메룬, Buea 대학교, 물리학과, 강사: "지난 몇 년간 위상수학의 기초를 이해하기 위해 애썼지만 어떤 성과도 거두지 못하고 그만두었습니다. 그리고 최근에 인터넷을 검색하다가 박사님의 책을 찾게 되었습니다. 이건 마치 신의 계시 같았습니다. 온라인 책을 훑어보며 저는 이 책으로 위상수학을 이해할 수 없다면 아마 그 어떤 책으로도 이 주제를 배울 수 없을 것이라고 확신했습니다.";
Tirthankar Chakravarty, 영국, Oxford 대학교: "저는 Cambridge 대학교의 계량경제학자입니다. 박사님의 노트는 정말 잘 쓰여진 것 같습니다.";

Thomas Evelbauer, 독일: “콘텐츠와 스타일에 강렬하게 매료되었습니다. 특히 기초를 설명하고 예제와 증명 유도 과정에 그 기초를 적용하는 방법이 아주 마음에 들었습니다.”;
Gabriele. E.M. Biella 의학박사, 이탈리아, 국립연구원, 분자 바이오이미징 및 생리학 연구소, 연구 소장: “저는 신경생리학자입니다. 현재 위상수학적 접근 방식으로 감각 프로세스의 새로운 신경역동학적 설명을 도출하기 위해 연구하고 있습니다. 이 연구를 위해 박사님의 훌륭한 책을 읽기 시작했습니다.”;
Fazal Haq, 파키스탄: “파키스탄 스와비 토피에 있는 Ghlam Ishaq Khan 과학기술대학교에서 공학박사과정을 밟고 있는 학생입니다. 교수님의 눈물 없는 위상수학을 읽고 깜짝 놀랐습니다. 사실 이렇게까지 위상수학을 아름답게 설명해 놓은 책을 본 적이 없습니다.”;
K. Orr, 미국: “훌륭한 책”;
Ahmed Ould, 콜럼비아: “주제를 간결, 명료하게 전달하는 박사님의 설명 방식에 축의를 표합니다.”;
Paul Unstead, 미국: “구체적인 보기를 많이 제공하고 수학 전공자로 독자를 한정 짓지 않아 교수님의 책이 정말 좋습니다.”;
Alberto Garcï£¡a Raboso, 스페인: “정말 좋습니다.”;
Guiseppe Curci, 피사, 국립이론물리학연구원, 이론물리학 연구소장: “위상수학에 대해 잘 설명하고 있는 좋은 책, 빛나는 책”;
M. Rinaldi, 미국: “이 책은 지금껏 제가 본 책 중에서 위상수학의 기초를 명료하게 그리고 가장 잘 설명하고 있습니다... 박사님의 노트를 공부하면서 위상수학의 개념을 분명하게 배울 수 있었습니다. 책에 실린 보기 또한 정말 훌륭했습니다.”;
Joaquin Poblete, 칠레 Catholic 대학교, 경제학과 학부 지도교수: “방금 교수님 책을 다 읽었습니다. 정말 좋았습니다. 주제가 명확했고, 제시하고 있는 보기도 그 주제를 잘 드러내고 있었습니다.”;
Alexander Liden, 스웨덴: “인터넷으로 박사님 책을 잘 읽었습니다. 인쇄판도 가지고 싶습니다.”;
Francois Neville, 미국: “저는 미국에 있는 Maine 대학교에서 공간 엔지니어링을 공부하고 있는 학부생입니다. 저희 교수님께서 위상수학을 공부하는 데 박사님 책을 적극 추천하셨습니다.”;
Hsin-Han Shen, 미국: “버팔로 뉴욕주립대학교에서 금융학 박사를 하고 있는 학생입니다. 박사님 웹사이트에 있는 위상수학 자료는 자세하고 읽기 쉽게 쓰여져 있어 저 같은 타전공 박사과정 학생들에게 이상적인 첫 위상수학 교재입니다.”;
Degin Cai, 미국: “박사님 책은 정말 훌륭합니다.”;
Eric Yuan, 독일, 다름슈타트: “Darmstadt 공과대학에서 수학을 전공하고 있는 학생입니다. 위상수학을 공부하는데 K.H. Hofmann 교수님께서 교수님의 저서 ‘눈물 없는 위상수학’을 적극 추천해 주셨습니다.”;
Martin Vu, Oxford 대학교: “Oxford 대학교 응용수학 이학석사과정을 이수 중인 학생입니다. 최근 수학의 추상적 개념에 점점 친숙해지고 있어 눈물 없는 위상수학이라는 제목에 자연스럽게 끌리게 되었습니다.”;
Ahmet Erdem, 터키: “정말 좋았습니다.”;

Kartika Bhatia, 인도: “Delhi 대학교에서 경제학 석사과정을 이수하고 있습니다. 교수님 책은 아주 유용하고 이해하기 쉬운 것 같습니다. 교수님 책을 읽으면서 그동안 가졌던 의문들이 많이 풀렸습니다.”;
Wolfgang Moens, 벨기에: “Katholieke Universiteit Leuven의 학부생입니다. “눈물 없는 위상수학”의 첫 번째 장 절반 이상을 시간 가는 줄 모르고 읽었습니다. 이 책을 계속해서 더 읽기 전에 명료한 문체와 훌륭한 구성에 대해 먼저 칭찬해야 할 것 같습니다. (읽자마자 확실히 눈에 띄었습니다!)”;
Duncan Chen, 미국: “이미 이런 이메일을 많이 받아보셨겠지만 박사님의 ‘눈물 없는 위상수학’에 대한 감사를 표하고 싶습니다. 저는 수학 관련 서적을 즐겨 읽는 전문 소프트웨어 개발자입니다.”;
Maghaisvarei Sellakumaran, 싱가포르: “경제학 박사 학위를 따기 위해 곧 미국으로 떠납니다. 위상수학에 대한 교수님의 책은 정말 대단한 것 같습니다.”;
Tom Hunt, 미국: “이런 좋은 책을 인터넷에서 볼 수 있게 해주셔서 감사합니다.”;
Fausto Saporito, 이탈리아: “지금 박사님의 책을 읽고 있는데 그 동안 제가 읽어본 위상수학 책 중에서 단연 최고입니다.”;
Takayuki Osogami, 미국: “인터넷에서 교수님의 “눈물 없는 위상수학”을 읽기 시작했습니다. 위상수학과 수학의 일반적 개념을 공부하는데 좋은 교재인 것 같습니다.”;
Roman Knöll, 독일: “이런 훌륭한 책을 읽게 해주셔서 감사합니다. 저는 ‘눈물 없는 위상수학’ 도움을 정말 많이 받았습니다. 이 책을 읽으면서 체계적이지 않은 강의와 원치 않는 학습으로 잠시 잊어버렸던 수학에 대한 관심을 다시 찾게 되었습니다.”;
Yuval Yatskan, 미국: “교수님의 책을 훑어보았습니다. 정말 대단한 저서라는 생각이 들더군요.”;
N.S. Mavrogiannis, 그리스: “아주 훌륭한 책입니다.”;
Semih Tumen, 터키: “경제학 박사과정은 수학적 지식을 많이 요구합니다. 관련 주제를 훑어보는 데 교수님 책이 많은 도움이 되었습니다.”;
Pyung Ho Kim, 미국: “박사과정을 이수 중입니다... 현재 경제지리를 공부하고 있습니다. 교수님 책은 위상수학의 기본 개념을 공부하는 데 매우 좋은 것 같습니다.”;
Javier Hernandez, 터키: “탁자 아래 초를 숨겨두고 빛을 보여주는 대가로 돈을 얻으려는 편익을 생각하지 않고, 다른 사람과 지식을 공유하기 위해 노력하는 교수님 같은 모든 분들께 감사를 드립니다.”;
Martin D. Siyaranamual, 인도네시아, 반둥, Padjadjaran 대학교, 경제 개발 연구 센터: “9월부터 Stockholm School of Economics에서 다시 공부를 시작하는 저에게 이 책은 정말 유용한 것 같습니다. 대학원에 가기 전 프레젠테이션을 준비하는 데 교수님의 저서가 많은 도움이 되고 있습니다. 정말 감사합니다.”;
J. Chand, 호주: “눈물 없는 위상수학을 집필해 주셔서 감사합니다. 교수님의 책은 정말 환상적입니다.”;
Richard Vande Velde, 미국: “2년 전 “눈물 없는 위상수학”을 개인 용도로 다운받기 위해 교수님께 연락을 드린 적이 있습니다. 당시에 저는 위상수학 학석사 통합과정을 가르치고 있었습니다.

학생들에게는 온라인상으로 책을 읽을 수 있는 URL만 전달했습니다. 책에 있는 주제와 심화 과정의 순서를 그대로 따르지는 않았습니다. 그러나 당시에 수업을 들었던 한 우수한 학생이 이 책을 해당 과정의 유일한 교재로 선택하는 게 좋을 것 같다고 제안했습니다. 저도 이에 동의했습니다. 2년의 시간이 흘러 저는 다시 학석사 통합과정의 학생들에게 위상수학을 가르치게 되었습니다. 이번에는 교수님 책의 최종 버전을 다운로드 받고 싶습니다.";
Sha Xin Wei 교수, 캐나다, Concordia 대학교, 미술 및 컴퓨터과학: "위상수학에 대한 교수님의 아주 세심하고 인도적인 글에 찬사를 보냅니다! 야망있는 학구파 동료들과 예술가를 위한 "생활" 수학 입문과정을 개설하는 데 교수님 책을 참고할까 합니다. 교수님의 저서같이 동료들의 이견이 없는 책을 찾는 일은 항상 즐겁습니다.";
Rehana Bari 부교수, 방글라데시: "방글라데시 Dhaka 대학교 수학과에서 위상수학 석사과정을 지도하고 있는 교수입니다. 박사님의 훌륭한 책 "눈물 없는 위상수학" 인쇄본을 받을 수 있을까요?";
Emrah Akyar, 터키, Anadolu 대학교, 수학과: "교수님의 멋진 책 "눈물 없는 위상수학"을 방금 읽어 보았습니다. 이번 여름학기 동안 이 책을 쭉 읽어볼 예정입니다.";
Rahul Nilakantan, 미국, Southern California 대학교, 경제학과, 박사과정: "로스앤젤레스의 Southern California 대학교에서 경제학 박사과정을 공부하고 있는 학생입니다. 불완전한 금융시장을 가진 일반균형영역 연구를 꿈꾸고 있습니다. 이 분야를 연구하기 위해서는 위상수학적 개념을 제대로 이해하고 있어야 합니다. Kansas 대학교에 있는 동료(Ramu Gopalan)가 추천을 해줘서 교수님의 훌륭한 책을 접하게 되었습니다. PDF 파일로 몇 페이지를 읽어보았는데, 이 책이 제가 위상수학을 공부할 때 반드시 필요한 책이라는 걸 알았습니다.";
Long Nguyen, 미국: "위상수학이라는 어려운 주제를 이렇게 명료하게 설명해 놓은 책은 본 적이 없습니다.";
Renato Orellana, 칠레: "이런 대단한 책을 쓰신 것을 축하드립니다. 첫 번째 장을 아주 잘 읽었습니다. 위상수학은 언제나 닿을 수 없는 곳에 있다고 생각했는데, 이제 저는 이 분야의 낙관론자가 되었습니다.";
Sisay Regasa Senbeta, 에티오피아, Addis Ababa 대학교, 경영학과, 부학장: "저는 경제학 박사과정을 공부하고자 하는 학생입니다. 현재는 동아프리카 에티오피아에 위치한 Addis Ababa 대학교 경영학과에서 강의를 하고 있습니다. 교수님의 책 인쇄판을 보내주실 수 있을까요?";
Nicanor M. Tuan, 필리핀, Davao Oriental State 과학기술대학교: "안녕하세요! 귀중한 교육자료를 대가 없이 나누어 주시는 박사님의 박애적인 업적에 감사를 표합니다. 박사님의 책은 저와 제 학생들이 위상수학을 심도있게 이해하는데 도움이 되었습니다. 진심으로 감사드립니다.";
Nikola Matejic, 세르비아: "교수님 책은 넓은 독자층이 읽을 수 있는 아주 독창적이고 귀중한 책입니다. 이 책은 세계의 여러 독자들에게 사랑받는 소중한 선물입니다. 위상수학 지식이 필요한 거의 모든 사람들은 분명 교수님 책을 통해 큰 혜택을 누릴 것입니다.";
Iraj Davoodabadi, 이란: "(갑작스레 편지를 드려서 죄송합니다.) 저는 기계 공학자이지만 수학(특히 분석학)에 관심이 많습니다. 현재 선생님 없이 독학으로 공부하고 있습니다. 아직 순수 수학을 거의 공부해본 적이 없어서 (위상수학, 추상대수학 같은) 어렵게 느껴지는 분야가 몇 있습니다. 지

금은 교수님 책 (눈물 없는 위상수학)으로 공부를 하고 있습니다. 이 책은 같은 주제를 다루고 있는 다른 책들과는 많이 다릅니다. 제게는 조금 추상적이었던 개념들을 아주 잘 설명해 주고 있습니다. [감사합니다.]";

Abdul Iguda 박사, 나이지리아, 카노, Bayero 대학교: "저는 ABDUL IGUDA (일반위상수학 박사)입니다. 지난 18년간 Bayero 대학교에서 일반위상수학을 가르쳤고, 현재는 타 대학 (Gwambe State 대학교, Umaru Musa Yar'Adua 대학교)에도 초청 강사로 강의를 나가고 있습니다. 박사님의 책 (무료) 인쇄판 (눈물 없는 위상수학)을 소장하고 싶습니다. 감사합니다.";

Mahdi Jafari, 이란, 테헤란, KNToosi 대학교: "공간 엔지니어링을 공부하고 있는 Mahdi Jafari 입니다.";

Jayakrishnan M, 인도, 케랄라: "올해부터 위상수학을 공부하기 시작한 수학과 학부생입니다. 제가 가지고 있는 모든 위상수학적 지식은 '눈물 없는 위상수학'으로부터 왔다고 할 수 있습니다. (이 책을 찾기 전까지) 위상수학은 제게 가장 어려운 학문이었습니다. 몇몇 정리를 단순히 암기해서 넘길 수는 있었습니다. 하지만 이렇게 공부하면 곳곳에서 문제가 생기곤 했습니다. 주제에 대한 정확한 이해와 문제를 풀 수 있는 실력을 갖추지 못한다면 정리를 수십 개 외우고 있다 하더라도 아무런 소용이 없는 것 같습니다. 위상수학을 공부하는데 어려움을 겪으면서, 학습에 도움이 될만한 참고자료를 인터넷에서 찾아보기 시작했습니다. 제가 찾은 대부분의 책은 그 동안 공부했던 도서 및 노트와 거의 흡사했습니다. 하지만 눈물 없는 위상수학은 달랐습니다. 이런 훌륭한 책을 찾게 되어 정말 기뻤습니다. 눈물 없는 위상수학은 핵심을 아름답게 설명하고 있고, 다양한 보기를 통해 정의를 정확하게 이해할 수 있도록 도와줍니다. 제가 위상수학에 흥미를 느낄 수 있도록 해주신 박사님께 진심으로 감사드리고 싶습니다.";

0.4 참고할 만한 하이퍼링크

이 책의 인쇄본이 아닌 컴퓨터 또는 태블릿으로 PDF 파일을 읽고 있는 독자라면 책 곳곳에 실려 있는 유용한 하이퍼링크를 반드시 참고하기 바란다. 이미 공부한 정리 및 정의와 관련된 하이퍼링크를 확인하면 분명 해당 페이지를 다시 펼쳐보고 싶을 것이다. 한가지 팁을 주자면, Adobe 및 대부분의 PDF 리더에서는 <ALT> 키와 왼쪽 화살표 키를 동시에 누르면 하이퍼링크가 열린다.

0.5 저자

저자 Sidney (Shmuel) Allen Morris는 현재 호주 Federation 대학교의 명예교수이자, 호주 La Trobe 대학교 부교수, 호주 애들레이드 William Light 연구소 학술위원회 위원장이다. 2010년 4월까지 Ballarat 대학교 정보학 교수로 재직하였으며 정보기술 및 수리학과 대학원장을 지냈다. South Australia 대학교, Wollongong 대학교, New England 대학교에서는 수학과 종신교수로 임명 받았다. New South Wales 대학교, La Trobe 대학교, Adelaide 대학교, Tel Aviv 대학교, Tulane 대학교, 뱅고어의 North Wales 대학교에서 근무한 바 있으며 미국수학협회와

호주컴퓨터협회에서 Lester R. Ford Award와 Outstanding Service Award를 각각 수상하기도 하였다. 현재 호주수학협회에서 발간하는 Gazette의 공동 편집자를 역임하고 있으며, Journal of Research and Practice in Information Technology 편집장, 호주수학협회 발간 Bulletin 편집자, Journal of Group Theory 편집자, 그리고 Cambridge University Press에서 출판된 책 시리즈 Australian Mathematical Lecture Series의 창립 편집장을 지냈다. 그는 지금까지 4권의 저서를 집필했다.

(1) Karl Heinrich Hofmann 공동 집필, "The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups", European Mathematical Society Publishing House, xv + 678pp, 2007, ISBN 978-3-03719-032-6;

(2) Karl Heinrich Hofmann 공동 집필, "The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student — A Handbook for the Expert", Third Edition, xxii + 924pp., de Gruyter 2013. ISBN 978-3-11-029655-6;

(3) "Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups", Cambridge University Press, 1977, 136pp. (러시아어 번역판, 출판: Mir);

(4) Arthur Jones, Kenneth R. Pearson 공동 집필, "Abstract Algebra and Famous Impossibilities", Springer-Verlag Publishers, 1st ed. 1991, ISBN 0-387-976612, Corr. 2nd printing 1993, ISBN 3-540-97661-2

이 외에도 국제 저널의 심사를 통과한 140여편의 연구 논문이 있다.

최근에는 저명한 국제 오픈 소스인 Axioms의 특별호를 편집하였다. (http://www.mdpi.com/journal/axioms) 특별호는 "Topological Groups: Yesterday, Today and Tomorrow"라는 제목으로, 책으로도 발간될 예정이다.

그는 호주 수학회의 명예 종신회원이고, 부회장을 역임하였으며, 20년이 넘는 세월 동안 이 사회의 일원으로 꾸준히 활동해왔다. 1947년 브리즈번에서 태어나 Queensland 대학교를 우수한 성적으로 졸업하고, 후에 Flinders 대학교에서 박사 학위를 받았다. 또한 각 기관에서 행정 수석, 부서 책임자 관리 및 지휘 직위, 학교장, 학술위원회 부의장, 대학평의원회 부의장, 부학장, 학장, 부총장, 부회장, 최고연구관리자(CAO), 최고경영자(CEO) 등을 지냈다.

2016년에는 정통 랍비로 임명 받았다.

홈페이지는 http:\www.sidneymorris.net이다.

제 1 장

위상공간

소개

테니스, 축구, 야구, 하키와 같은 시합은 매우 재미있는 경기이지만 처음 그 경기를 하고자 할 때에는 우선 경기의 규칙들을 배워야 한다. 수학도 역시 마찬가지이다. 우리는 위상에 필요한 규칙들로 시작할 것이다.

이 장에서는 위상의 정의와 유한위상공간, 이산공간, 비이산공간, 그리고 여유한위상공간과 같은 몇 가지 보기들을 중심으로 다루겠다.

군론과 같은 순수수학의 다른 분야들처럼 위상은 공리적인 학문으로, 우리는 공리들을 먼저 공부하고 그 공리들을 사용하여 명제와 정리들을 증명할 것이다. 증명을 서술하는 데 있어서 여러분들의 기술을 발전시키는 것도 분명 중요할 것이다.

왜 증명이란 중요한 것일까? 우리의 일이 건축물을 짓는 것이라 가정하자. 그러면 우리는 기초공사부터 시작할 것이다. 수학의 경우는 공리 혹은 정의들이 기초공사인 것이다 – 그 밖의 모든 것들은 기초 위에 지어진다. 각각의 정리나 명제들은 지식의 새로운 단계를 나타내고 이전 단계에 확고하게 기반을 두고 있는 것이다. 우리는 증명을 사용함으로써 이전 단계로부터 새로운 단계에 도달하는 것이다. 그래서 정리와 명제들은 우리가 도달해야 할 새로운 지식의 고지이며, 증명은 아래 단계에 위 단계를 붙일 수 있도록 해주는 회반죽과 같은 것이다. 증명이 없는 구조물은 붕괴되는 것이다.

그럼 수학적 증명이란 무엇인가?

수학적 증명이란 여러분에게 주어진 정보로부터 시작하여 논리적 주장에 의해 진행되며 여러분에게 필요한 것을 증명함으로써 마무리되는 빈틈없는 논증인 것이다.

여러분에게 주어진 정보를 적으면서 증명을 시작해야 하고 여러분이 증명하고자 하는 것을 서술해야만 한다. 만약 여러분에게 주어진 정보나 증명하고자 하는 것이 기술적인 용어들을 포함한다면, 그 기술적인 용어들의 정의를 적어야만 한다.

모든 증명은 완벽한 문장으로 구성되어야 한다. 각각의 문장들은 (i) 앞에서 서술되어진 것이거나 (ii) 이미 증명된 정리, 명제, 또는 보조정리의 결과이어야만 한다.

이 책에서는 많은 증명들을 보게 될 것이지만 수학은 관중들을 위한 스포츠가 아니다. 수학은 참가자들을 위한 경기이므로 증명을 서술하는 방법을 배우는 유일한 길은 그것들을 여러분 스스로 쓰려고 노력하는 것 밖에 없다.

1.1 위상

1.1.1 정의. 공집합이 아닌 집합 X에 대하여 X의 부분집합들의 모임 $\mathcal{T}$가 다음 조건을 만족할 때, $\mathcal{T}$를 X 위의 **위상(topology)**이라 부른다:

(i) X와 공집합 $\emptyset$는 $\mathcal{T}$에 속한다,

(ii) $\mathcal{T}$에 있는 집합들의 임의의 (유한 또는 무한) 개수의 합집합은 $\mathcal{T}$에 속한다,

(iii) $\mathcal{T}$에 있는 임의의 두 집합의 교집합은 $\mathcal{T}$에 속한다.

이때, 순서쌍 $(X, \mathcal{T})$를 **위상공간(topological space)**이라 부른다.

1.1.2 보기. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$이고

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

이라 하자. 그러면 정의 1.1.1의 조건 (i), (ii) 그리고 (iii)을 만족하기 때문에 $\mathcal{T}_1$은 X 위의 위상이다. □

1.1.3 보기. $X = \{a, b, c, d, e\}$이고

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$$

이라 하자. 그러면 $\mathcal{T}_2$는 X 위의 위상이 $\boxed{\text{아니다}}$. 왜냐하면 $\mathcal{T}_2$의 두 원소의 합집합

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

은 $\mathcal{T}_2$에 속하지 않기 때문이다. 즉, $\mathcal{T}_2$는 정의 1.1.1의 조건 (ii)를 만족하지 않는다. □

1.1.4 보기. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$이고

$$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

이라 하자. 그러면 $\mathcal{T}_3$는 X 위의 위상이 $\boxed{\text{아니다}}$. 왜냐하면 $\mathcal{T}_3$의 두 원소의 교집합

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$$

은 $\mathcal{T}_3$에 속하지 않기 때문이다. 즉, $\mathcal{T}_3$는 정의 1.1.1의 조건 (iii)을 만족하지 않는다. □

1.1.5 보기. $\mathbb{N}$을 모든 자연수들의 집합 (즉, 모든 양의 정수들의 집합)이라 하고 $\mathcal{T}_4$가 $\mathbb{N}$, $\emptyset$, 그리고 $\mathbb{N}$의 모든 유한 부분집합들로 이루어져 있다고 하자. 그러면 $\mathcal{T}_4$는 $\mathbb{N}$ 위의 위상이 $\boxed{\text{아니다}}$. 왜냐하면 $\mathcal{T}_4$의 원소들의 무한 합집합

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

은 $\mathcal{T}_4$에 속하지 않기 때문이다. 즉, $\mathcal{T}_4$는 정의 1.1.1의 조건 (ii)를 만족하지 않는다. □

1.1.6 정의. 공집합이 아닌 집합 X에 대하여 $\mathcal{T}$를 X의 모든 부분집합들의 모임이라 하자. 그러면 $\mathcal{T}$를 집합 X 위의 **이산위상(discrete topology)**이라 부르고, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **이산공간(discrete space)**이라 부른다.

정의 1.1.6의 $\mathcal{T}$는 정의 1.1.1의 조건들을 만족하므로 위상이다.

정의 1.1.6의 X는 $\boxed{\text{임의의}}$ 공집합이 아닌 집합이 될 수 있음을 관찰하자. 따라서 무한개의 이산공간 – 각 집합 X에 대하여 한 개 – 이 존재한다.

1.1.7 정의. 공집합이 아닌 집합 X에 대하여 $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$이라 하자. 그러면 $\mathcal{T}$를 **비이산 위상(indiscrete topology)**이라 부르고, $(X, \mathcal{T})$를 **비이산공간(indiscrete space)**이라 부른다.

정의 1.1.7의 $\mathcal{T}$는 정의 1.1.1의 조건들을 만족하므로 위상이다.

정의 1.1.7의 X는 $\boxed{\text{임의의}}$ 공집합이 아닌 집합이 될 수 있음을 관찰하자. 따라서 무한개의 비이산공간 – 각 집합 X에 대하여 한 개 – 이 존재한다.

이 장의 소개에서 우리는 증명의 중요성과 증명을 적을 때 포함되는 것들에 대하여 생각해 보았다. 증명과 함께 하는 우리의 첫 경험은 보기 1.1.8과 명제 1.1.9에 있다. 여러분은 이 증명들을 주의깊게 공부해야만 한다.

YouTube에서 증명에 관한 첫 번째 비디오
"Topology Without Tears – Video 4 – Writing Proofs in Mathematics"
를 시청해 보기 바란다. 이 비디오는 YouTube의
http://youtu.be/T1snRQEQuEk
또는 중국의 Youku 사이트
http://tinyurl.com/mwpmlqs
또는 다음 링크
http://www.topologywithouttears.net
에서 찾을 수 있다.

1.1.8 보기. $X = \{a, b, c\}$이고 $\mathcal{T}$가 X 위의 위상으로 $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, $\{c\} \in \mathcal{T}$을 만족한다고 하자. $\mathcal{T}$가 이산위상임을 증명하시오.

증명.

$\mathcal{T}$가 위상이라는 것과 $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, $\{c\} \in \mathcal{T}$이 주어져 있다. $\mathcal{T}$가 이산위상 즉, (정의 1.1.6에 의해) $\mathcal{T}$가 X의 $\boxed{\text{모든}}$ 부분집합들을 포함한다는 것을 증명해야 한다. $\mathcal{T}$가 위상이므로 정의 1.1.1의 조건 (i), (ii), (iii)을 만족한다는 것을 기억해라.

따라서 X의 모든 부분집합들을 적음으로써 증명을 시작할 것이다.

X는 3개의 원소를 가지고 있으므로 2^3개의 서로 다른 부분집합들을 가지고 있다. 그것들은 다음과 같다: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$, $S_8 = \{a, b, c\} = X$.

이러한 부분집합들이 각각 $\mathcal{T}$의 원소임을 증명해야 한다. $\mathcal{T}$는 위상이기 때문에, 정의 1.1.1 (i)로부터 X와 $\emptyset$은 $\mathcal{T}$에 속한다. 즉, $S_1 \in \mathcal{T}$이고 $S_8 \in \mathcal{T}$이다.

$\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, $\{c\} \in \mathcal{T}$ 이 주어져 있다. 즉, $S_2 \in \mathcal{T}$, $S_3 \in \mathcal{T}$, $S_4 \in \mathcal{T}$이다.

증명을 마치기 위해서는 $S_5 \in \mathcal{T}$, $S_6 \in \mathcal{T}$, $S_7 \in \mathcal{T}$임을 보여야 한다. 그런데 $S_5 = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$이고 $\{a\}$와 $\{b\}$는 $\mathcal{T}$에 속하므로 정의 1.1.1 (ii)에 의해 그것들의 합집합 또한 $\mathcal{T}$에 속한다. 즉, $S_5 = \{a, b\} \in \mathcal{T}$이다.

비슷하게 $S_6 = \{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$ 와 $S_7 = \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$ 을 얻는다. □

우리는 이 장의 소개에서 수학이 관중들을 위한 스포츠가 아니라는 것을 알았다. 여러분은 활동적인 참가자가 되어야 한다. 물론 여러분의 참가는 몇몇 연습문제를 푸는 것도 포함한다. 하지만 여러분에게 기대되는 그 이상으로 여러분 앞에 있는 자료들에 대해 $\boxed{\text{생각}}$을 해야만 한다.

여러분의 과제들 중 하나는 우리가 증명할 결과들을 자세히 살펴보는 것이고 적절한 질문을 하는 것이다. 예를 들어, 우리는 각각의 단집합 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$가 $\mathcal{T}$에 속하고 $X = \{a, b, c\}$이면 $\mathcal{T}$가 이산위상임을 방금 증명하였다. 그러나 이것이 더 일반적인 현상의 한 보기라면 즉, $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고 $\mathcal{T}$가 모든 단집합을 포함한다면, $\mathcal{T}$는 반드시 이산위상일까? 대답은 "예"이고 이것은 명제 1.1.9에서 증명된다.

1.1.9 명제. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고 모든 $x \in X$에 대하여 단집합 $\{x\}$가 $\mathcal{T}$에 속하면, $\mathcal{T}$는 이산위상이다.

증명.

이 결과는 보기 1.1.8의 일반화이기 때문에 그 증명이 비슷할 것이라고 기대할 수도 있지만, 보기 1.1.8에서 했던 것처럼 무한집합 X의 모든 부분집합들을 나열할 수는 없다. 그럼에도 불구하고 우리는 X의 $\boxed{\text{모든}}$ 부분집합들이 $\mathcal{T}$에 속하는 것을 증명해야 한다.

이제 여러분은 어떤 특별한 경우, 예를 들어 X를 4, 5, 혹은 100개의 원소들로 이루어진 집합으로 취해 증명을 시도할 지도 모른다. 하지만 이 접근 방법은 실패하게 되어 있다. 이 장의 서두에서 수학적 증명을 빈틈없는 논증으로 묘사했음을 상기하자. 우리는 몇 개의 특별한 경우 또는 수많은 특별한 경우를 생각함으로써 빈틈없는 논증을 만들어낼 수는 없다. 빈틈없는 논증은 $\boxed{\text{모든}}$ 경우를 포함해야만 하는 것이다. 따라서 우리는 임의의 공집합이 아닌 집합 X의 일반적인 경우를 생각해야 하고, 어떻게든 X의 모든 부분집합이 $\mathcal{T}$에 속하는 것을 증명해야 한다.

보기 1.1.8의 증명을 다시 보면, X의 모든 부분집합은 X의 원소로 이루어진 단집합들의 합집합임을 알 수 있고, 모든 단집합들이 $\mathcal{T}$에 속하는 것을 이미 알고 있다. 이것은 일반적인 경우에도 역시 성립한다.

이제 모든 집합은 그것의 원소로 이루어진 단집합들의 합집합이 된다는 사실을 기록함으로써 그 증명을 시작할 것이다. S가 X의 임의의 부분집합이라 하자. 그러면

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$$

이다. 각 단집합 $\{x\}$는 $\mathcal{T}$에 속하기 때문에, 정의 1.1.1 (ii)와 위 등식에 의해 $S \in \mathcal{T}$이 성립한다. S는 X의 임의의 부분집합이기 때문에, $\mathcal{T}$가 이산위상이라는 것을 증명하였다. $\square$

모든 집합 S가 그것의 원소로 이루어진 단집합들의 합집합이라는 것은 이 책의 여러 문맥들에서 가끔 사용될 것이다. $S = \emptyset$인 경우에도 우리는 **비어있는 합집합(empty union)**이라고 부르는 것을 만들어 내고 그 결과로서 $\emptyset$을 얻는다.

연습문제 1.1

1. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$라 하자. X의 부분집합들의 다음 모임이 각각 X 위의 위상인지 결정하시오:

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$.

2. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$라 하자. X의 부분집합들의 다음 모임 중 어떤 것이 X 위의 위상인가? (그 이유를 설명하시오.)

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$;

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$.

3. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$이고 $\mathcal{T}$가 X 위의 이산위상이라 하자. 다음 명제 중 참인 것은?

   (a) $X \in \mathcal{T}$; (b) $\{X\} \in \mathcal{T}$; (c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$; (d) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

   (e) $\emptyset \in X$; (f) $\{\emptyset\} \in X$; (g) $\{a\} \in \mathcal{T}$; (h) $a \in \mathcal{T}$;

   (i) $\emptyset \subseteq X$; (j) $\{a\} \in X$; (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$; (l) $a \in X$;

   (m) $X \subseteq \mathcal{T}$; (n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$; (o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$; (p) $a \subseteq \mathcal{T}$.

   [힌트. 정확히 6개가 참이다.]

4. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이라 하자. **$\mathcal{T}$의 유한개의 원소들의 교집합은 $\mathcal{T}$의 원소**임을 증명하시오. [힌트. "수학적 귀납법"을 이용하여 증명하시오.]

5. $\mathbb{R}$이 모든 실수들의 집합이라 하자. $\mathbb{R}$의 부분집합들의 다음 모임이 위상임을 증명하시오. (단, $(-n, n)$, $[-n, n]$, $[n, \infty)$는 구간들이다.)

   (i) $\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-n, n) : n$은 양의 정수$\}$;

   (ii) $\mathcal{T}_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[-n, n] : n$은 양의 정수$\}$;

   (iii) $\mathcal{T}_3 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[n, \infty) : n$은 양의 정수$\}$.

6. $\mathbb{N}$이 모든 양의 정수들의 집합이라 하자. $\mathbb{N}$의 부분집합들의 다음 모임이 위상임을 증명하시오.

   (i) $\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{N}, \emptyset\} \cup \{\{1, 2, \dots, n\} : n$은 양의 정수$\}$. (이 위상을 **첫조각위상(initial segment topology)**이라고 부른다.)

   (ii) $\mathcal{T}_2 = \{\mathbb{N}, \emptyset\} \cup \{\{n, n+1, \dots\} : n$은 양의 정수$\}$. (이 위상을 **끝조각위상(final segment topology)**이라고 부른다.)

7. 다음 집합 위의 모든 위상들을 열거하시오:

   (a) $X = \{a, b\}$;

   (b) $Y = \{a, b, c\}$.

8. X는 무한집합이고 $\mathcal{T}$는 X 위의 위상이라 하자. X의 모든 무한 부분집합들이 $\mathcal{T}$에 속하면, $\mathcal{T}$가 이산위상임을 증명하시오.

9.* $\mathbb{R}$이 모든 실수들의 집합이라 하자. $\mathbb{R}$의 부분집합들의 다음 10개의 모임 중 정확히 3개가 위상인가? 이것을 확인하고 그 이유를 설명하시오.

   (i) $\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(a, b) : a$와 b는 $a < b$인 모든 실수$\}$;

   (ii) $\mathcal{T}_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-r, r) : r$은 양의 실수$\}$;

   (iii) $\mathcal{T}_3 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-r, r) : r$은 양의 유리수$\}$;

   (iv) $\mathcal{T}_4 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[-r, r] : r$은 양의 유리수$\}$;

   (v) $\mathcal{T}_5 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-r, r) : r$은 양의 무리수$\}$;

   (vi) $\mathcal{T}_6 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[-r, r] : r$은 양의 무리수$\}$;

   (vii) $\mathcal{T}_7 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[-r, r) : r$은 양의 실수$\}$;

   (viii) $\mathcal{T}_8 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-r, r] : r$은 양의 실수$\}$;

   (ix) $\mathcal{T}_9 = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[-r, r], (-r, r) : r$은 양의 실수$\}$;

   (x) $\mathcal{T}_{10} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{[-n, n], (-r, r) : n$은 양의 정수, r은 양의 실수$\}$.

1.2 열린집합, 닫힌집합, 열린닫힌집합

"$\mathcal{T}$의 원소"를 계속 언급하는 것보다 그러한 집합들에 이름을 주는 것이 더 편리하다. 우리는 그것들을 "열린집합"이라 부르고, 열린집합의 여집합을 "닫힌집합"이라 부른다. 이러한 명명법은 이상적인 것이 아니라 실직선 위의 "열린구간"과 "닫힌구간"이라 불리는 것에서 비롯된다. 이것에 대해서는 2장에서 좀 더 이야기할 것이다..

1.2.1 정의. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이라 하자. 이때 $\mathcal{T}$의 원소들을 **열린집합(open sets)**이라 부른다.

1.2.2 명제. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이면 다음이 성립한다:

(i) X와 $\emptyset$는 열린집합이다,

(ii) 열린집합들의 임의의 (유한 또는 무한) 합집합은 열린집합이다,

(iii) 열린집합들의 임의의 유한 교집합은 열린집합이다.

증명. 명백히 (i)과 (ii)는 정의 1.2.1과 정의 1.1.1 (i), (ii)의 결과이고, 조건 (iii)은 정의 1.2.1과 연습문제 1.1 #4로부터 얻어진다.. □

명제 1.2.2를 읽는 순간, 한 가지 질문이 여러분의 마음 속에 떠올라야만 한다: 열린집합들의 임의의 유한 또는 무한 합집합은 열린집합인 반면에, 우리는 단지 열린집합들의 $\boxed{\text{유한}}$ 교집합은 열린집합이라고 서술한다. 열린집합들의 무한 교집합은 항상 열린집합인가? 다음 보기는 그 대답이 "아니오"라는 것을 보여준다.

1.2.3 보기. $\mathbb{N}$이 모든 양의 정수들의 집합이고 $\mathcal{T}$가 $\emptyset$과 다음 조건을 만족하는 $\mathbb{N}$의 부분집합으로 구성되어 있다고 하자: $\mathbb{N}$에서 S의 여집합 $\mathbb{N} \setminus S$는 유한집합이다. $\mathcal{T}$가 정의 1.1.1을 만족하는 것은 쉽게 증명할 수 있다. 따라서 $\mathcal{T}$는 $\mathbb{N}$ 위의 위상이다. (우리는 다음 절에서 이 위상에 대해 좀 더 알아볼 것이다. 이것을 여유한위상(finite-closed topology)이라고 부른다.) 각 자연수 n에 대하여, 집합 S_n을 다음과 같이 정의하자:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

각 S_n의 여집합은 유한집합이기 때문에 명백히 S_n은 위상 $\mathcal{T}$에서 열린집합이다. 그러나

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\} \tag{1}$$

이다. $\{1\}$의 여집합은 $\mathbb{N}$도 유한집합도 아니기 때문에, $\{1\}$은 열린집합이 아니다. 따라서 (1)은 열린집합 S_n들의 교집합이 열린집합이 아님을 보여준다. □

"보기 1.2.3에 나타난 예제를 어떻게 찾았지?"라고 물어보는 것도 무리가 아니다. 하지만 그 대답은 매력적이지 못하다! 그것은 시행착오에 의한 것이다.

예를 들어 이산위상을 시도했다면, 열린집합들의 교집합은 열린집합이라는 것을 알 것이다. 비이산위상의 경우도 마찬가지이다. 따라서 여러분이 해야할 필요가 있는 것은 어떤 현명한 추측인 것이다.

"열린집합들의 교집합이 반드시 열린집합이지는 않다"를 증명하기 위해서 단지 하나의 반례만 찾으면 된다는 것을 기억하라.

1.2.4 정의. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이라 하자. X의 부분집합 S의 여집합 $X \setminus S$가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합일 때, S를 $(X, \mathcal{T})$에서 **닫힌집합(closed set)**이라 부른다.

보기 1.1.2에서 닫힌집합들은

$$\emptyset, X, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,e,f\}, \{b,e,f\} \text{ 그리고 } \{a\}$$

이다. $(X, \mathcal{T})$가 이산공간이면, 명백히 X의 모든 부분집합은 닫힌집합이다. 그러나 비이산공간 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합은 X와 $\emptyset$ 뿐이다.

1.2.5 명제. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이면

(i) $\emptyset$과 X는 닫힌집합이다,

(ii) 임의의 (유한 또는 무한) 개의 닫힌집합들의 교집합은 닫힌집합이다,

(iii) 임의의 유한개의 닫힌집합들의 합집합은 닫힌집합이다.

증명. (i)은 명제 1.2.2 (i)와 정의 1.2.4로부터 바로 얻어진다. 왜냐하면 X의 여집합은 $\emptyset$이고 $\emptyset$의 여집합은 X이기 때문이다.

(iii)을 증명하기 위하여, $S_1, S_2, \ldots, S_n$이 닫힌집합들이라 하자. $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$이 닫힌집합임을 보여야 한다. 정의 1.2.4에 의해 $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$이 열린집합임을 증명하는 것으로 충분하다. $S_1, S_2, \ldots, S_n$은 닫힌집합들이므로 그 여집합 $X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$, $\ldots$, $X \setminus S_n$은 열린집합이다. 그리고

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n) \tag{1}$$

이다. (1)의 우변은 열린집합들의 유한 교집합이기 때문에 열린집합이다. 따라서 (1)의 좌변은 열린집합이다. 그러므로 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$은 닫힌집합이 되어 (iii)이 성립한다.

(ii)의 증명은 (iii)과 비슷하다. [그러나 여러분은 보기 1.3.9의 증명에 있는 주의를 읽어야만 한다.] □

주의. 이름 "열린" 과 "닫힌"은 종종 위상의 세계로 입문한 사람들이 실수를 하게 만든다. 이름에도 불구하고, 어떤 열린집합들은 또한 닫힌집합들이다. 더욱이, 어떤 집합들은 열린집합도 닫힌집합도 아니다. 실제로, 보기 1.1.2를 고려하면 다음을 알 수 있다:

(i) 집합 $\{a\}$는 열린집합이고 닫힌집합이다;

(ii) 집합 $\{b, c\}$는 열린집합도 닫힌집합도 아니다;

(iii) 집합 $\{c, d\}$는 열린집합이지만 닫힌집합이 아니다;

(iv) 집합 $\{a, b, e, f\}$는 닫힌집합이지만 열린집합이 아니다.

이산공간에서 모든 집합은 열린집합이고 닫힌집합이고, 반면에 비이산공간 $(X, \mathcal{T})$에서 X와 $\emptyset$을 제외한 X의 모든 부분집합들은 열린집합도 닫힌집합도 아니다. □

집합들이 열린집합과 닫힌집합 모두 될 수 있음을 상기시키기 위해 우리는 다음 정의를 소개한다.

1.2.6 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 S가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합이고 닫힌집합일 때, S를 **열린닫힌집합(clopen set)**이라 부른다.

모든 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에서 X와 $\emptyset$은 열린닫힌집합이다[1].

이산공간에서 X의 모든 부분집합들은 열린닫힌집합이다.

비이산공간에서 열린닫힌집합은 X와 $\emptyset$ 뿐이다.

연습문제 1.2

1. 보기 1.1.2에 주어진 집합 X의 64개의 부분집합들을 모두 나열하시오. 각각의 집합 옆쪽에 다음 중 어느 것인지를 적으시오: (i) 열린닫힌집합이다; (ii) 열린집합도 닫힌집합도 아니다; (iii) 열린집합이고 닫힌집합이 아니다; (iv) 닫힌집합이고 열린집합이 아니다.

2. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 부분집합이 닫힌집합이라고 하자. $(X, \mathcal{T})$가 이산공간임을 증명하시오.

3. $(X, \mathcal{T})$가 이산위상이거나 비이산위상이면 모든 열린집합은 열린닫힌집합임을 관찰하시오. 이산공간도 비이산공간도 아니면서 모든 열린집합이 열린닫힌집합인 성질을 만족하는 집합 $X = \{a, b, c, d\}$ 위의 위상 $\mathcal{T}$를 찾으시오.

4. X가 무한집합이라 하자. X의 모든 무한 부분집합이 닫힌집합인 X 위의 위상을 $\mathcal{T}$라 하면, $\mathcal{T}$가 이산위상임을 증명하시오.

5. X가 무한집합이고 X의 열린집합이면서 무한 부분집합인 것은 오직 X만 있음을 만족하는 위상을 $\mathcal{T}$라 하자. $(X, \mathcal{T})$는 이산공간이어야만 하는가?

[1] "열린닫힌(clopen)"이 보기 싫은 것은 인정하지만 현재 널리 사용되고 있는 단어이다.

6. (i) $\mathcal{T}$가 집합 X 위의 위상으로 정확히 네 개의 집합으로 구성되어 있다고 하자; 즉, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$이라 하자. 여기서 A와 B는 공집합이 아닌 X의 (서로 다른) 진부분집합이다. [A가 X의 **진부분집합(proper subset)**이라 함은 $A \subseteq X$와 $A \neq X$를 의미한다. 그리고 $A \subset X$로 나타낸다.] A와 B가 다음 조건들 중 정확히 하나를 만족해야 함을 증명하시오:

$$(a)\ B = X \setminus A; \qquad (b)\ A \subset B; \qquad (c)\ B \subset A.$$

[힌트. 먼저 A와 B가 적어도 하나의 조건을 만족해야 함을 증명하고, 그것들이 두 개 이상의 조건들을 만족할 수 없음을 보이시오.]

(ii) (i)을 이용하여 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 위의 위상들 중 정확히 네 개의 원소로 구성되어 있는 위상을 모두 나열하시오.

7. (i) http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space을 보면, $n \in \mathbb{N}$이 아무리 작더라도 n개의 점들을 가지고 있는 집합 위의 서로 다른 위상들의 개수는 매우 많을 수 있다; 즉 $n = 2$일 때는 4개의 위상이 존재하고, $n = 3$일 때는 29개의 위상이 존재한다: $n = 4$일 때는 355개의 위상이 존재하고, $n = 5$일 때는 6942개의 위상이 존재한다. 수학적 귀납법을 이용하여 n이 증가함에 따라 위상의 개수가 증가함을 증명하시오.

[힌트. n개의 점을 가지고 있는 집합이 M개의 서로 다른 위상을 갖는다면 $n+1$개의 점들을 가지고 있는 집합은 적어도 $M+1$개의 위상을 가짐을 증명하는 것으로 충분하다.]

(ii) 수학적 귀납법을 이용하여 유한집합 X가 $n \in \mathbb{N}$개의 점을 가지고 있다면, 적어도 $(n-1)!$개의 서로 다른 위상을 가짐을 증명하시오.

[힌트. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$이고 $Y = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$이라 하자. 만약 $\mathcal{T}$가 X 위의 위상이면, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$를 고정시키고 Y 위의 위상 $\mathcal{T}_i$를 다음과 같이 정의하여라: 각 열린집합 $U \in \mathcal{T}$에 대하여 x_i가 U에 속할 때, x_i를 x_{n+1}로 교체함으로써 U_i를 정의하자; 그러면 $\mathcal{T}_i$는 그러한 집합들 U_i와 $Y \setminus \{x_i\}$ 그리고 Y로 구성된다. $\mathcal{T}_i$가 Y 위의 위상임을 검증하시오.]

(iii) 무한집합 X의 기수가 $\aleph$일 때, X 위에 적어도 $2^{\aleph}$개의 서로 다른 위상이 존재함을 증명하시오. 모든 무한집합은 서로 다른 비가산개의 위상을 가짐을 도출하시오.

[힌트. 정확히 3개의 열린집합을 갖는 서로 다른 위상이 적어도 $2^{\aleph}$개 존재함을 증명하시오. 기수에 대해서는 부록 1을 보시오.]

1.3 여유한위상

한 집합 위의 위상을 정의할 때 어떤 집합들이 열린집합인지 서술하는 것이 보통이다. 그러나 때때로 어떤 집합들이 닫힌집합인지 말함으로써 위상을 나타내는 것이 더 자연스러울 때가 있다. 다음 정의는 그러한 한 예를 보여준다.

1.3.1 정의. X가 공집합이 아닌 집합이라 하자. X 위의 위상 τ가 **여유한위상(cofinite topology** or **finite-closed topology)**이라는 것은 X의 닫힌 부분집합들이 X 자기자신과 X의 모든 유한 부분집합일 때를 말한다; 즉, 열린집합들은 $\emptyset$과 여집합이 유한인 X의 모든 부분집합들이다.

다시 한 번, 정의 1.3.1에 있는 τ가 위상인지, 즉, 정의 1.1.1의 각 조건들을 만족하는지 확인할 필요가 있다.

정의 1.3.1이 "X와 X의 유한 부분집합들이 닫힌집합인 모든 위상이 여유한위상이다"를 말하는 것은 아니다. 이것들은 $\boxed{\text{단지}}$ 닫힌집합인 것이다. [물론, 임의의 집합 X 위의 이산위상에서는 X와 X의 모든 유한 부분집합들이 닫힌집합이다. 하지만 X의 모든 다른 부분집합들도 역시 닫힌집합이다.]

여유한위상에서 모든 유한집합들은 닫힌집합이다. 하지만 다음 보기는 무한집합들이 열린집합일 필요가 없다는 것을 보여준다.

1.3.2 보기. $\mathbb{N}$이 모든 양의 정수들의 집합이라 하자. $\{1\}$, $\{5,6,7\}$, $\{2,4,6,8\}$들은 유한집합이므로 여유한위상에서 닫힌집합이다. 그러므로 그 여집합들

$$\{2,3,4,5,\ldots\},\ \{1,2,3,4,8,9,10,\ldots\},\ \{1,3,5,7,9,10,11,\ldots\}$$

은 여유한위상에서 열린집합이다. 한편, 짝수인 양의 정수들의 집합은 유한집합이 아니기 때문에 닫힌 집합이 아니다. 따라서 그것의 여집합, 즉, 홀수인 양의 정수들의 집합은 여유한위상에서 열린집합이 아니다.

따라서 모든 유한집합들은 닫힌집합이지만, 모든 무한집합들이 열린집합인 것은 아니다. □

1.3.3 보기. $\mathcal{T}$가 집합 X 위의 여유한위상이라 하자. X가 적어도 3개의 서로 다른 열린닫힌 부분집합을 갖는다면, X가 유한집합임을 증명하시오.

증명.

우리에게 주어진 것은 $\mathcal{T}$가 여유한위상이라는 것과, 적어도 3개의 서로 다른 열린닫힌 부분집합이 존재한다는 것이다.

우리는 X가 유한집합이라는 것을 증명해야 한다.

$\mathcal{T}$가 여유한위상이라는 것은 "모든 닫힌집합들의 모임이 X와 X의 모든 유한 부분집합들로 구성되어 있다"는 것을 의미함을 상기하고, 또한 임의의 집합이 열린닫힌집합일 필요충분조건은 그것이 열린집합이고 닫힌집합임을 상기하자.

모든 위상공간에는 적어도 2개의 열린닫힌집합, 즉, X와 $\emptyset$이 존재함을 기억하자. (정의 1.2.6의 아래에 언급된 내용을 보시오.) 그러나, 우리에게 주어진 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에는 적어도 3개의 열린닫힌 부분집합이 존재한다. 이것은 $\emptyset$, X와는 다른 열린닫힌 부분집합이 존재한다는 것을 뜻한다. 따라서 우리는 다른 열린닫힌 부분집합을 주의깊게 관찰해야만 한다!

우리의 공간 $(X, \mathcal{T})$는 3개의 서로 다른 열린닫힌 부분집합을 갖기 때문에, $S \neq X$이고 $S \neq \emptyset$인 X의 열린닫힌 부분집합 S가 존재한다. S가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린 부분집합이기 때문에, 정의 1.2.4에 의해 그것의 여집합 $X \setminus S$는 닫힌집합이다.

즉, S와 $X \setminus S$는 여유한위상에서 닫힌집합이다. 또한 S와 $X \setminus S$는 모두 유한집합이다. ($X \setminus S$는 X와 같지 않기 때문에) 하지만, $X = S \cup (X \setminus S)$이므로 X는 두 유한집합의 합집합이다. 그러므로 X는 유한집합이다. □

이제 우리는 무한집합 위에 줄 수 있는 서로 다른 3개의 위상을 알고 있다 – 그리고 더 많은 위상이 존재한다. 우리가 알고 있는 3개는 이산위상, 비이산위상, 그리고 여유한위상이다. 따라서 한 집합 위의 위상을 구체적으로 나타낼 때는 항상 조심해야 한다.

예를 들면, 집합 $\{n : n \geq 10\}$은 자연수들의 집합 위의 여유한위상에서 열린집합이지만, 비이산위상에서는 열린집합이 아니다. 홀수인 자연수들의 집합은 자연수들의 집합 위의 이산위상에서 열린집합이지만, 여유한위상에서는 열린집합이 아니다.

이제 여러분이 이미 보았을지도 모르는 몇 가지 정의들을 소개하겠다.

1.3.4 정의. f가 집합 X로부터 집합 Y로의 함수라 하자.

(i) 함수 f가 다음 조건을 만족할 때 **일대일(one-to-one)** 또는 **단사(injective)**라고 말한다: $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$이다;

(ii) 함수 f가 다음 조건을 만족할 때 **위로의(onto)** 또는 **전사(surjective)**라고 말한다: 각 $y \in Y$에 대하여 $f(x) = y$인 $x \in X$가 존재한다;

(iii) 함수 f가 전사이고 단사일 때, f를 **전단사(bijective)**라고 말한다.

1.3.5 정의. f가 집합 X로부터 집합 Y로의 함수라 하자. 함수 f가 다음 조건을 만족할 때 **역을 갖는다(have an inverse)**고 말한다:
모든 $x \in X$에 대하여 $g(f(x)) = x$이고 모든 $y \in Y$에 대하여 $f(g(y)) = y$인 Y에서 X로의 함수 g가 존재한다.
이 함수 g를 f의 **역함수(inverse function)**라고 말한다.

다음 명제의 증명은 연습문제로 남겨두겠다.

1.3.6 명제. f가 집합 X로부터 집합 Y로의 함수라 하자.

(i) 함수 f가 역을 가질 필요충분조건은 f가 전단사이다.

(ii) g_1과 g_2가 Y로부터 X로의 함수라 하자. g_1과 g_2가 둘 다 f의 역함수이면, $g_1 = g_2$이다; 즉, 모든 $y \in Y$에 대하여 $g_1(y) = g_2(y)$이다.

(iii) g가 Y로부터 X로의 함수라 하자. 그러면 g가 f의 역함수일 필요충분조건은 f가 g의 역함수이다.

주의. 학생들이 "함수가 한 점을 한 점으로 대응"시킬 때, 그 함수를 일대일로 생각하는 것은 매우 흔한 오류이다.

모든 함수들은 한 점을 한 점으로 대응시킨다. 왜냐하면 이것은 함수의 정의의 일부이다.

일대일 함수는 다른 점들을 다른 점들로 보내는 함수이다. □

이제 여러분들이 아직 못 보았을 것 같은 매우 중요한 개념을 소개하겠다.

1.3.7 정의. f가 집합 X로부터 집합 Y로의 함수라 하자. S가 Y의 임의의 부분집합일 때, 집합 $\boldsymbol{f^{-1}(S)}$은 다음과 같이 정의된다:

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ 그리고 } f(x) \in S\}.$$

X의 부분집합인 $f^{-1}(S)$를 S의 **역상(inverse image)**이라고 말한다.

$f\colon X \to Y$의 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건이 f가 전단사라는 것에 주목하자. 그러나 f가 일대일이 아니고 전사가 아니어도 Y의 임의의 부분집합의 역상은 존재한다. 다음 보기가 이것을 설명해 준다.

1.3.8 보기. 정수들의 집합을 $\mathbb{Z}$라 할 때, $\mathbb{Z}$로부터 $\mathbb{Z}$로의 함수 f가 다음가 같이 주어져 있다고 하자: 각 $z \in \mathbb{Z}$에 대하여, $f(z) = |z|$.

$f(1) = f(-1)$이기 때문에, 함수 f는 일대일이 아니다.

또한 $f(z) = -1$을 만족하는 $z \in \mathbb{Z}$가 존재하지 않기 때문에, f는 전사가 아니다. 즉, f는 분명히 전단사가 아니다. 따라서 명제 1.3.6 (i)에 의하여 f는 역함수를 갖지 않는다. 그러나 분명히 역상들은 존재한다. 예를 들면,

$$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1,-2,-3,1,2,3\}$$
$$f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\}) = \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}$$

이다. □

마지막으로 흥미로운 보기를 제시하면서 이 절을 마무리하겠다.

1.3.9 보기. $(Y, \mathcal{T})$가 위상공간이고 X가 공집합이 아닌 집합이라 하자. 또한, f가 X로부터 Y로의 함수라 하자. $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$라 놓을 때, $\mathcal{T}_1$이 X 위의 위상임을 증명하시오.

증명.

우리의 과제는 집합들의 모임 $\mathcal{T}_1$이 X 위의 위상임을 보이는 것이다. 즉, $\mathcal{T}_1$이 정의 1.1.1의 조건 (i), (ii) 그리고 (iii)을 만족한다는 것을 보여야 한다.

$$X = f^{-1}(Y) \quad \text{이고} \quad Y \in \mathcal{T}\text{이기 때문에,} \quad X \in \mathcal{T}_1.$$
$$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \quad \text{이고} \quad \emptyset \in \mathcal{T}\text{이기 때문에,} \quad \emptyset \in \mathcal{T}_1.$$

그러므로 $\mathcal{T}_1$은 정의 1.1.1의 조건 (i)을 만족한다.

정의 1.1.1의 조건 (ii)를 검증하기 위해, 어떤 첨수집합 J에 대하여 $\{A_j : j \in J\}$을 $\mathcal{T}_1$의 원소들의 모임이라 하자. 우리는 $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$을 보여야 한다.

$A_j \in \mathcal{T}_1$이므로, $\mathcal{T}_1$의 정의에 의해 $A_j = f^{-1}(B_j)$인 $B_j \in \mathcal{T}$가 존재한다. 또한 $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$이다. [연습문제 1.3 #1을 보시오.]

이제 모든 $j \in J$에 대하여 $B_j \in \mathcal{T}$이고 $\mathcal{T}$는 Y 위의 위상이기 때문에 $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$이다. 그러므로, $\mathcal{T}_1$의 정의에 의하여 $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \in \mathcal{T}_1$; 즉, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$이다.

따라서 $\mathcal{T}_1$은 정의 1.1.1의 조건 (ii)를 만족한다.

[**주의.** 모든 집합이 가산인 것은 아님을 상기하자. (가산집합들을 언급한 부록을 보시오.) 따라서 위 논증에서 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$이 $\mathcal{T}_1$에 속한다고 가정하고 그것들의 합집합 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$이 $\mathcal{T}_1$에 속한다는 것을 증명하는 것은 충분하지가 않다. 이것은 단지 $\mathcal{T}_1$에 속하는 $\boxed{\text{가산}}$개의 원소들의 합집합이 $\mathcal{T}_1$에 속하는 것을 증명한 것이고, $\mathcal{T}_1$이 정의 1.1.1의 조건 (ii)를 만족한다는 것을 증명한 것은 아니다 - 이 조건은 $\mathcal{T}_1$에 속하는 가산개일지 비가산개일지 모르는 원소들의 $\boxed{\text{모든}}$ 합집합이 $\mathcal{T}_1$에 속하는 것을 요구한다.]

마지막으로, A_1과 A_2가 $\mathcal{T}_1$에 속한다고 하자. 우리는 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$을 증명해야 한다.

어떤 $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$에 대하여 $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1,\ A_1 = f^{-1}(B_1)$이고 $A_2 = f^{-1}(B_2)$이기 때문에

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) \qquad \text{[연습문제 1.3 #1을 보시오.]}$$

이 성립한다.

$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$이므로, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$이다. 따라서 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$이고, 우리는 $\mathcal{T}_1$이 정의 1.1.1의 조건 (iii)을 만족함을 증명하였다.

그러므로 $\mathcal{T}_1$은 X 위의 위상이다. $\square$

연습문제 1.3

1. f가 집합 X로부터 집합 Y로의 함수라 하자. 이때, 보기 1.3.9에서 다음을 서술하였다: 임의의 첨수집합 J와 Y의 임의의 부분집합들 B_j에 대하여

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \tag{1}$$

이고

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \tag{2}$$

   (a) (1)이 성립함을 증명하시오.
   [힌트. 먼저 x를 좌변에 주어진 집합의 원소라 놓고 그것이 우변에 주어진 집합에 속함을 증명하고, 다음으로 그 역을 증명하시오.]

   (b) (2)가 성립함을 증명하시오.

   (c) 다음 조건을 만족하는 (구체적인) 집합들 A_1, A_2, X, Y와 함수 $f\colon X \to Y$를 찾으시오: $A_1 \subseteq X$과 $A_2 \subseteq X$에 대하여 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

2. 연습문제 1.1 #6 (ii)에 주어진 위상 $\mathcal{T}$는 여유한위상인가? (그 이유를 설명하시오.)

3. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 단집합 $\{x\}$가 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합일 때, $(X, \mathcal{T})$를 **T_1-공간(T_1-space)**이라 말한다. 다음 9개의 위상들 중 정확히 2개가 T_1-공간임을 증명하시오. (그 이유를 설명하시오.)

   (i) 이산공간;
   (ii) 적어도 두 점을 갖는 비이산공간;
   (iii) 여유한위상을 가지고 있는 무한집합;
   (iv) 보기 1.1.2;
   (v) 연습문제 1.1 #5 (i);
   (vi) 연습문제 1.1 #5 (ii);
   (vii) 연습문제 1.1 #5 (iii);
   (viii) 연습문제 1.1 #6 (i);
   (ix) 연습문제 1.1 #6 (ii).

4. $\mathcal{T}$가 집합 X 위의 여유한위상이라 하자. $\mathcal{T}$가 또한 이산위상이라면, 집합 X가 유한집합임을 증명하시오.

5. 만약 임의의 서로 다른 두 점 $a, b \in X$에 대하여, a를 포함하지만 b를 포함하지 않는 어떤 열린집합이 존재하거나[2] b를 포함하지만 a를 포함하지 않는 열린집합이 존재할 때, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **T_0-공간(T_0-space)**이라 말한다.
   (i) 모든 T_1-공간은 T_0-공간임을 보이시오.
   (ii) 위의 연습문제 3에 있는 (i)–(vi) 중 어느 것이 T_0-공간인가? (그 이유를 설명하시오.)
   (iii) 집합 $X = \{0, 1\}$ 위에 $(X, \mathcal{T})$가 T_0-공간이지만 T_1-공간이 아닌 위상 $\mathcal{T}$를 정의하시오. [이 공간을 **Sierpiński 공간**이라 부른다.]
   (iv) 연습문제 1.1 #6에 서술된 각각의 위상공간은 T_0-공간임을 증명하시오. (위의 연습문제 3에 있는 어느 것도 T_1-공간이 아님을 보였던 것을 주목하시오.)

6. X를 임의의 무한집합이라 하자. **가산닫힌위상(countable-closed topology)** 또는 **여가산위상**은 닫힌집합이 X와 X의 모든 가산부분집합만으로 이루어진 위상으로 정의한다. 실제로 이것은 X 위의 위상임을 증명하시오.

7. $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$를 집합 X 위의 두 위상이라 하자. 다음 각각의 명제를 증명하시오.
   (i) 만약 $\mathcal{T}_3$가 $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$로 정의된다면, $\mathcal{T}_3$는 반드시 X 위의 위상은 아니다. (구체적인 보기를 찾아 이유를 설명하시오.)
   (ii) 만약 $\mathcal{T}_4$ 가 $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$로 정의된다면, $\mathcal{T}_4$는 X 위의 위상이다. (위상 $\mathcal{T}_4$를 $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$의 **교집합위상**이라 부른다.)
   (iii) 만약 $(X, \mathcal{T}_1)$과 $(X, \mathcal{T}_2)$가 T_1-공간이면, $(X, \mathcal{T}_4)$도 역시 T_1-공간이다.
   (iv) 만약 $(X, \mathcal{T}_1)$과 $(X, \mathcal{T}_2)$가 T_0-공간이면, $(X, \mathcal{T}_4)$는 반드시 T_0-공간은 아니다. (구체적인 보기를 찾아 이유를 설명하시오.)
   (v) 만약 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$ 가 집합 X 위의 위상이면, $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$는 X 위의 위상이다.
   (vi) 만약 각각의 $i \in I$에 대하여,여기서 I는 첨자집합, $\mathcal{T}_i$가 집합 X 위의 위상이면, $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$는 X 위의 위상이다.

[2] **독자는 수학에서 "또는"의 사용은 일상 영어에서 사용하는 것과는 다르다는 것을 기억하기 바란다. 수학에서 "또는"은 배타적이 아니다.** 이것에 대해서는 0장에 있는 논평을 보기 바란다.

8. 연습문제 1.2 #7에서 주목했던 것처럼 Wikipedia `http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space`에서 $n \in \mathbb{N}$이 아무리 적더라도 n개의 점을 갖는 유한집합 상의 위상의 개수는 매우 많을 수 있다. 이것은 연습문제 1.3 #5에 정의된 T_0-공간에 대해서도 사실이다. 실제로 같은 Wikipedia 자료에 의하면, 만약 $n = 3$이면, 19개의 서로 다른 T_0-공간이 존재하고; $n = 4$에 대해서는, 219개의 서로 다른 T_0-공간; $n = 5$에 대하여, 4231개의 서로 다른 T_0-공간이 존재한다. 수학적 귀납법을 이용하여 n이 증가할 수록 T_0-공간의 수가 증가함을 증명하시오.

   [힌트. 만약 n개의 점을 갖는 M개의 T_0-공간이 존재한다면, $n+1$개의 점을 갖는 적어도 $M+1$개의 T_0-공간이 존재한다는 것을 보이면 된다.]

9. X의 모든 부분집합이 열린집합이거나 닫힌집합일 때 (또는 둘 다), 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **문공간 (door space)**이라 부른다.

   (i) 이산공간은 문공간인가?

   (ii) 비이산공간은 문공간인가?

   (iii) 만약 X가 무한집합이고 $\mathcal{T}$가 여유한위상이면, $(X, \mathcal{T})$는 문공간인가?

   (iv) $X = \{a, b, c, d\}$라 하자. X 위에 정의된 위상 $\mathcal{T}$ 중 문공간을 확인하시오.

10. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 S가 $(X, \mathcal{T})$의 열린부분집합들의 교집합일 때 S를 **포화(saturated) 집합**이라 말한다.

   (i) 모든 열린집합은 포화집합임을 입증하시오.

   (ii) T_1-공간에서 모든 집합은 포화집합임을 입증하시오.

   (iii) 적어도 하나는 포화집합이 아닌 부분집합을 갖는 위상공간의 보기를 드시오.

   (iv) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 부분집합이 포화부분집합이면 $(X, \mathcal{T})$는 T_1-공간인가?

1.4 후기

이 장에서 우리는 위상공간의 기본개념을 소개했다. 예를 들어 이산공간, 비이산공간 그리고 여유한 위상공간과 같은 다양한 유한위상공간[3]을 공부했다. 위의 어느 위상도 응용에 관한한 특별히 중요한 것은 아니다. 그러나 연습문제 4.3 #8에서, 모든 무한위상공간은 다섯가지 위상 (비이산위상, 이산위상, 여유한위상, 연습문제 1.1 #6의 첫조각위상과 끝조각위상) 중의 하나를 갖는 무한위상공간을 "포함한다". 다음 장에서는 아주 중요한 유클리드 위상을 서술한다.

도중에 "열린집합"과 "닫힌집합"이란 용어를 접하게 되었고, 이런 명칭를 잘못 이해할 수도 있음을 경고했다. 어떤 집합은 열린집합임과 동시에 닫힌집합일 수 있고, 어떤 것은 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아닌 것이 있으며, 어떤 것은 열린집합이지만 닫힌집합은 아닌 집합도 있고, 또는 닫힌집합이지만 열린집합은 아닌 집합도 있다. 하나의 집합이 닫힌집합이 아니라는 것을 증명함으로써 그 집합이 열린집합이다 라고 증명할 수 없음을 기억하는 것은 중요하다.

위상, 위상공간, 열린집합, 그리고 닫힌집합의 정의 외에 우리가 다룬 가장 중요한 주제는 정리의 증명이었다.

이 장의 서문에서 증명의 서술을 배우는 것의 중요성을 지적했다. 보기 1.1.8, 명제 1.1.9, 그리고 보기 1.3.3에서 증명을 어떻게 "생각하는지"를 보았다. 여러분 스스로 증명방법의 기술을 발전시키는 것이 필수적이다. 이 목적을 위하여 시도할 좋은 연습문제가 연습문제 1.1 #8, 연습문제 1.2 #2,4, 그리고 연습문제 1.3 #1,4이다.

[3]**유한위상공간**이란 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 의미한다. 여기서, X는 유한집합이다.

만약 여러분 스스로가 이미 그렇게 하지 않았다면, 증명에 대한 처음 두개의 YouTube 비디오를 보아야 한다. 이것을
"Topology Without Tears – Video 4a – Writing Proofs in Mathematics" 그리고 "Topology Without Tears – Video 4b – Writing Proofs in Mathematics"라고 부르는데
http://youtu.be/T1snRQEQuEk 그리고
http://youtu.be/VrAwuszhzTw에서 찾아 볼 수 있거나
또는 중국 Youku 사이트
http://tinyurl.com/mwpmlqs와 http://tinyurl.com/n3jjmsm
또는 다음의 관련 링크
http://www.topologywithouttears.net에서 찾아 볼 수 있다.
네번째 증명작성 비디오를 보는 것도 많은 도움이 된다. 그것은 수학적 귀납법을 사용하는 증명작성법에 관한 것이다. 이것을
"Topology Without Tears - Video 4d - Writing Proofs in Mathematics"라고 부르고
http://youtu.be/gu0Z029ebo0에서 찾아 볼 수 있다.

어떤 학생들은 위상의 개념을 "집합의 집합"을 수반하는 것으로 혼동한다. 여러분이 이것을 이해하고 있는지를 확인하기 위해서는 연습문제 1.1 #3을 풀어 보기 바란다.

T_0-공간과 T_1-공간의 개념을 포함하는 연습문제는 나중에 공식적으로 소개할 것이다. 이러한 것을 **분리공리(separation properties)**라고 한다.

마지막으로 역상의 중요성을 강조한다. 이것에 관련된 것을 보기 1.3.9와 연습문제 1.3 #1에서 다루었다. 우리의 연속함수의 정의는 역상에 의존하게 될 것이다.

제 2 장

유클리드 위상

소개

영화나 소설에서는 흔히 줄거리를 엮어가는 소수의 중심인물이 있다. 위상수학 이야기에는 실수 위의 유클리드 위상이 중심인물 중의 하나이다. 실제로 유클리드 위상은 수학적 영감과 더 거슬러 올라가 검토하기 위해서 자주 되돌아 봐야 할 풍부한 예제이다.

$\mathbb{R}$을 실수집합이라 하자. 1장에서 우리는 임의의 집합 위에 세 개의 위상, 즉, 이산위상, 비이산위상, 그리고 여유한위상을 정의했다. 따라서 우리는 $\mathbb{R}$ 위에 세 개의 같은 위상을 정의할 수 있다. $\mathbb{R}$ 위에 정의된 여섯 개의 다른 위상은 연습문제 1.1 #5 그리고 #9에 있다. 이 장에서 우리는 실수 $\mathbb{R}$ 위의 더욱 중요하고 흥미있는 하나의 위상을 서술할 것이다. 이 위상이 유클리드 위상 (또는 보통위상)으로 알려져 있다.

유클리드 위상을 분석해 보면 "위상에 대한 기저"의 개념에 연결된다. 선형대수학에서 모든 벡터공간은 기저를 가지고 있고 모든 벡터는 기저의 원소들의 일차결합으로 나타낼 수 있다고 배웠다. 비슷하게, 위상공간에서 모든 열린집합은 기저의 원소들의 합집합으로 표현할 수 있다. 실제로, 하나의 집합이 열린집합일 필요충분조건은 그 집합이 기저의 원소들의 합집합이다.

이 장을 이해하기 위하여, 여러분은 부록 1의 첫 번째 절 즉, A1.1의 내용에 스스로가 익숙해 있어야 한다. 이것에 대해서는 YouTube 상의 "Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory" http://youtu.be/9h83ZJeiecg & http://youtu.be/QPSRB4Fhzko; 중국사이트 Youku http://tinyurl.com/m4dlzhh & http://tinyurl.com/kf9lp8e; 그리고 링크 http://www.topologywithouttears.net 상의 비디오로 보충되어 있다.

2.1 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상

2.1.1 정의. $\mathbb{R}$의 부분집합 S가 다음 성질 $(*)$을 만족하면 $\mathbb{R}$ **위의 유클리드 위상**에서 열린집합이라고 불린다.

$(*)$ 각각의 $x \in S$에 대하여 어떤 실수 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$가 존재하여 $x \in (a, b) \subseteq S$가 성립한다.

표기. 특별한 말이 없이 위상공간 $\mathbb{R}$을 언급할 때마다, $\mathbb{R}$은 유클리드 위상을 갖는 것을 의미한다.

2.1.2 주목. (i) "유클리드 위상" $\mathcal{T}$는 하나의 위상이다.

증명.

$\mathcal{T}$가 정의 1.1.1의 조건 (i), (ii), 그리고 (iii)을 만족함을 보여야 한다.

우리에게 주어진 것은 하나의 집합이 $\mathcal{T}$에 속할 필요충분조건은 그 집합이 성질 $(*)$를 만족하는 것이다.

첫째, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$임을 보이자. $x \in \mathbb{R}$라 하자. $a = x-1$ 그리고 $b = x+1$이라 놓으면, $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$; 즉, $\mathbb{R}$이 성질 $(*)$를 만족한다. 따라서 $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$이다. 둘째, $\emptyset \in \mathcal{T}$이다. 왜냐하면 자명한 논리에 의하여 $\emptyset$이 $(*)$를 만족하기 때문이다.

이제 $\{A_j : j \in J\}$를 $\mathcal{T}$의 원소들의 집합족이라 하자, 여기서 J는 첨자집합이다. 우리는 $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$임을 보여야 한다. 즉, $\bigcup_{j \in J} A_j$가 성질 $(*)$를 만족함을 보여야 한다. $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$라 하자. 그러면 어떤 $k \in J$ 에 대하여 $x \in A_k$ 이다. $A_k \in \mathcal{T}$이므로, 적당한 $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$가 존재하여 $x \in (a, b) \subseteq A_k$이 성립한다. $k \in J$이기 때문에, $A_k \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$이다. 그러므로 $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$이다. 따라서 $\bigcup_{j \in J} A_j$는 성질 $(*)$를 만족한다. 그러므로 우리가 원했던 $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$를 얻는다.

마지막으로, A_1과 A_2가 $\mathcal{T}$에 속한다고 하자. $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$임을 보여야 한다. $y \in A_1 \cap A_2$라 하면 $y \in A_1$이다. $A_1 \in \mathcal{T}$이므로 어떤 실수 $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$가 존재하여 $y \in (a, b) \subseteq A_1$이다. 또한 $y \in A_2 \in \mathcal{T}$이다. 따라서 어떤 실수 $c, d \in \mathbb{R}$ $(c < d)$가 존재하여 $y \in (c, d) \subseteq A_2$이다. e를 a와 c의 최댓값, 그리고 f를 b 와 d의 최솟값이라 하자. 그러면 $e < y < f$ 이고 $y \in (e, f)$임은 쉽게 확인할 수 있다. $(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_1$이고 $(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_2$이기 때문에, $y \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$이다. 그러므로 $A_1 \cap A_2$가 성질 $(*)$를 만족한다는 것을 추론할 수 있다. 그러므로 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$이다.

따라서 $\mathcal{T}$는 실제로 $\mathbb{R}$ 위의 위상이다. $\square$

우리는 이제 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 관하여 열린집합과 닫힌집합을 계속해서 서술해 보자. 특히, 이 위상에 관하여 모든 열린구간은 실제로 열린집합이고 모든 닫힌구간은 닫힌집합임을 보게 될 것이다.

(ii) $r, s \in \mathbb{R}$이고 $r < s$이라 하자. $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상 $\mathcal{T}$에서 열린구간 (r, s)는 실제로 $\mathcal{T}$에 속한다. 그러므로 열린구간 (r, s)는 열린집합이다.

증명.

주어진 열린구간 (r, s)에 대하여, (r, s)는 유클리드 위상에서 열린집합이다; 즉, (r, s)는 정의 2.1.1의 성질 (*)를 만족함을 보여야 한다.

그러기 위해서 $x \in (r, s)$라 놓고 시작하여 $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$를 만족하는 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$를 찾기를 원한다.

$x \in (r, s)$라 하자. $a = r$ 그리고 $b = s$를 선택하자. 그러면 분명히

$$x \in (a, b) \subseteq (r, s)$$

이다. 따라서 (r, s)는 유클리드 위상에서 열린집합이다. □

(iii) 모든 실수 r에 대하여 열린구간 (r, ∞)과 $(-\infty, r)$은 $\mathbb{R}$에서 열린집합이다.

증명.

먼저, (r, ∞)가 열린집합임을 보이자; 즉, (r, ∞)가 성질 (*)를 만족한다는 것을 보이자.

이것을 위해서 $x \in (r, \infty)$라 놓고 다음을 만족하는 $a, b \in \mathbb{R}$를 찾자:

$$x \in (a, b) \subseteq (r, \infty).$$

$x \in (r, \infty)$라 하고, $a = r$ 그리고 $b = x + 1$라고 놓자. 그러면 $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$이다. 그러므로 $(r, \infty) \in \mathcal{T}$이다.

비슷한 방법으로 $(-\infty, r)$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합임을 보일 수 있다. □

(iv) 모든 열린구간은 $\mathbb{R}$에서 열린집합인 반면에 그 역은 성립하지 않는다는 것을 주목하는 것이 중요하다. $\mathbb{R}$에서 열린집합이라고 해서 열린구간은 아니다. 예를 들어, 집합 $(1,3) \cup (5,6)$은 $\mathbb{R}$에서 열린집합이지만 열린구간은 아니다. 집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$도 $\mathbb{R}$에서 열린집합이다. $\square$

(v) 각각의 $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$에 대하여 닫힌구간 $[c, d]$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합이 아니다.[1]

증명.

우리는 $[c, d]$가 성질 $(*)$를 만족하지 못한다는 것을 보일 것이다.

이것을 위해서는 특별한 x를 찾아 성질 $(*)$를 만족하는 어느 a, b도 존재하지 않음을 보이면 충분하다.

분명히 c와 d는 구간 $[c, d]$에서 특별한 점들이다. 그러므로 우리는 $x = c$로 택하고 요구된 성질을 만족하는 a, b는 존재하지 않음을 보인다.

우리는 소위 모순에 의한 증명법이라 불리는 **모순법**을 사용한다. $\boxed{\text{가정}}$: 요구된 성질을 만족하는 실수 a와 b가 존재한다고 가정하고, 이것은 모순을 야기하다는 것, 즉 무엇인가에 오류가 있다는 것을 보이자.

결론적으로 $\boxed{\text{가정이 오류다}}$! 따라서 그러한 a와 b는 존재하지 않는다. 그러므로 $[c, d]$는 성질 $(*)$를 만족하지 못한다. 그러기에 $[c, d]$는 열린집합이 아니다.

$c \in [c, d]$임을 주목하자. $\boxed{\text{가정}}$: 실수 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$가 존재하여 $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$이라고 가정하자. 그러면 $c \in (a, b)$이면 $a < c < b$이다. 그러므로 $a < \frac{c+a}{2} < c < b$이다. 따라서 $\frac{c+a}{2} \in (a, b)$ 그리고 $\frac{c+a}{2} \notin [c, d]$이다. 따라서 $(a, b) \not\subseteq [c, d]$이다. 이것은 모순이다. 그러므로 $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$를 만족하는 a와 b는 존재하지 않는다. 따라서 $[c, d]$는 성질 $(*)$를 만족하지 않는다. 그래서 $[c, d] \notin \mathcal{T}$이다. $\square$

(vi) 각각의 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대하여 닫힌집합이다.

증명. $[a, b]$이 닫힌집합임을 보이기 위해서는 단지 그것의 여집합 $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$이 두 열린집합의 합집합으로서 열린집합이라는 것을 관찰해야 한다. $\square$

[1]YouTube 비디오 "Topology Without Tears - Video 4c - Writing Proofs in Mathematics"를 시청하기 바란다. 거기서 모순법에 의한 증명을 논의한다. http://youtu.be/T4384JAS3L4를 보시오.

(vii) 모든 단집합 $\{a\}$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이다.

증명. $\{a\}$의 여집합은 두 열린집합 $(-\infty, a)$와 (a, ∞)의 합집합으로서 열린집합이다. 따라서 우리가 원했던 것으로, $\{a\}$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이다.

[연습문제 1.3 #3의 용어에 의하면, 이 결과는 $\mathbb{R}$이 T_1-공간임을 뜻한다.] □

(viii) 단순히 "$a < b$"를 "$a \le b$"으로 대치하여 우리는 (vii)를 (vi) 안에 포함시킬 수 있었음을 주목하자. 단집합 $\{a\}$는 단지 닫힌집합 $[a, b]$의 퇴화된 경우이다. □

(ix) 정수집합 $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이다.

증명. $\mathbb{Z}$의 여집합은 $\mathbb{R}$의 열린집합들 $(n, n+1)$의 합집합 $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$이다. 따라서 $\mathbb{Z}$의 여집합은 $\mathbb{R}$에서 열린집합이다. 그러므로 $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이다. □

(x) 유리수 집합 $\mathbb{Q}$ 는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합도 아니고 열린 부분집합도 아니다.

증명.

우리는 $\mathbb{Q}$가 성질 $(*)$를 만족하지 않음을 증명함으로서 열린집합이 아니다 라는 것을 보이겠다.

이것을 위해서 $\mathbb{Q}$는 <u>어느</u> 구간 (a, b), $a < b$도 포함하지 않는다는 것을 보이면 된다.

$\boxed{\text{가정}}$: $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$라 가정하자. 여기서 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$이다. 서로 다른 두 실수 사이에는 무리수가 존재한다. (이것을 증명할 수 있는가?) 따라서 어떤 $c \in (a, b)$가 존재하여 $c \notin \mathbb{Q}$이다. 이것은 $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{Q}$는 어느 구간 (a, b)도 포함하지 않기 때문에 열린집합이 아니다.

$\mathbb{Q}$가 닫힌집합이 아님을 보이기 위해서는 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$가 열린집합이 아님을 보이면 충분하다. 서로 다른 두 실수 사이에는 유리수가 존재한다는 사실을 이용하여 우리는 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$는 어느 구간 (a, b), $a < b$도 포함하지 않는다는 것을 안다. 그래서 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합이 아니다. 그러므로 $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이 아니다. □

(xi) 3장에서 우리는 $\mathbb{R}$의 유일한 열린닫힌 부분집합은 자명한 집합, 즉, $\mathbb{R}$과 $\emptyset$뿐임을 보일 것이다. □

연습문제 2.1

1. 만약 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$이면, $[a, b)$와 $(a, b]$는 $\mathbb{R}$의 열린 부분집합이 아님을 증명하시오. 또한 $[a, b)$와 $(a, b]$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이 아님을 증명하시오.

2. 집합 $[a, \infty)$와 $(-\infty, a]$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합임을 증명하시오.

3. $\mathbb{R}$의 무한개의 닫힌 부분집합들의 합집합은 반드시 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합은 아님을 예를 들어 보이시오.

4. 다음 각각의 명제를 증명하시오.

   (i) 정수집합 $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{R}$의 열린 부분집합이 아니다.

   (ii) 소수집합 S는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이지만 $\mathbb{R}$의 열린 부분집합은 아니다.

   (iii) 무리수집합 $\mathbb{P}$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합도 아니고 열린 부분집합도 아니다.

5. 만약 F가 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 유한부분집합이면, F는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이지만 F는 $\mathbb{R}$의 열린 부분집합은 아님을 보이시오.

6. 만약 F가 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 가산부분집합이면, F는 열린집합은 아니지만, F의 선택에 따라 닫힌집합이 될 수도 있고 아닐 수도 있음을 증명하시오.

7. (i) $S = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots\}$라 하자. 집합 S는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 관하여 닫힌집합임을 증명하시오.

   (ii) 집합 $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots\}$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합인가?

   (iii) 집합 $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots, n\sqrt{2}, \dots\}$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합인가?

8. (i) $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. X의 부분집합 S가 가산개의 닫힌집합들의 합집합이면 S를 ***F_σ*-집합**이라고 부른다. 모든 열린구간 (a, b)와 모든 닫힌구간 $[a, b]$는 $\mathbb{R}$에서 F_σ-집합임을 증명하시오.

   (ii) $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. X의 부분집합 T가 가산개의 열린집합들의 교집합이면 T를 ***G_δ*-집합**이라고 부른다. 모든 열린구간 (a, b)와 모든 닫힌구간 $[a, b]$는 $\mathbb{R}$에서 G_δ-집합임을 증명하시오.

   (iii) 유리수집합 $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$에서 F_σ-집합임을 증명하시오. (연습문제 6.5 #3에서 $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$에서 G_δ-집합이 $\boxed{\text{아니다}}$라는 것을 증명한다.)

   (iv) F_σ-집합의 여집합은 G_δ-집합이고 G_δ-집합의 여집합은 F_σ-집합임을 입증하시오.

2.2 위상에 대한 기저

주목 2.1.2은 우리에게 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상을 훨신 더 편리한 방법으로 서술하도록 유도한다. 이것을 위해서, 우리는 위상에 대한 기저를 소개한다.

2.2.1 명제. $\mathbb{R}$의 부분집합 S가 열린 부분집합일 필요충분조건은 S가 열린구간들의 합집합이다.

증명.

우리가 증명해야 할 것은 S가 열린집합일 필요충분조건은 열린구간들의 합집합이다; 즉, 우리는 다음을 보여야 한다,

(i) 만약 S가 열린구간들의 합집합이면, 그것은 열린집합이다, 그리고

(ii) 만약 S가 열린집합이면, 그것은 열린구간들의 합집합이다.

S가 열린구간들의 합집합이라 가정하자; 즉, 어떤 열린구간 (a_j, b_j)가 존재하여 $S = \bigcup_{j \in J}(a_j, b_j)$이다. 여기서 j는 첨자집합 J에 속한다. 주목 2.1.2 (ii)에 의하여 각각의 열린구간 (a_j, b_j)는 열린집합이다. 그러므로 S는 열린집합들의 합집합이다. 따라서 S는 열린집합이다.

역으로, S는 $\mathbb{R}$에서 열린집합이라 가정하자. 그러면 각각의 $x \in S$에 대하여, 어떤 구간 $I_x = (a, b)$가 존재하여 $x \in I_x \subseteq S$이다. 이제 $S = \bigcup_{x \in S} I_x$임을 주장하자.

우리는 집합 S와 $\bigcup_{x \in S} I_x$가 같다는 것을 보이는 것이 요구된다.

두 집합이 같다는 것을 보이기 위해서는 다음을 증명함으로써 얻어진다:

(i) 만약 $y \in S$이면, $y \in \bigcup_{x \in S} I_x$, 그리고

(ii) 만약 $z \in \bigcup_{x \in S} I_x$이면, $z \in S$이다.

[주목: (i)은 명제 $S \subseteq \bigcup_{x \in S} I_x$과 동치이고, 반면에 (ii)는 $\bigcup_{x \in S} I_x \subseteq S$에 동치이다.]

첫째, $y \in S$라 하자. 그러면 $y \in I_y$이다. 따라서 $y \in \bigcup_{x \in S} I_x$이다. 둘째, $z \in \bigcup_{x \in S} I_x$라 하자. 그러면 어떤 $t \in S$에 대하여, $z \in I_t$이다. 각각의 $I_x \subseteq S$이므로, 우리는 $I_t \subseteq S$임을 안다. 그러므로 $z \in S$이다. 따라서 $S = \bigcup_{x \in S} I_x$, 그리고 우리가 원했던 대로 S는 열린구간들의 합집합임을 얻는다. □

위의 명제가 말하는 것은 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 서술하기 위해서는 모든 구간 (a, b)가 열린집합임을 보이면 충분하다는 것이다. 다른 모든 열린집합은 이러한 열린집합의 합집합이다. 이 사실로부터 다음의 정의가 유도된다.

2.2.2 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. X의 열린 부분집합들의 집합족 $\mathcal{B}$가 다음을 만족하면 $\mathcal{B}$를 위상 $\mathcal{T}$에 대한 **기저(basis)**라고 부른다:

X의 모든 열린집합은 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다.

만약 $\mathcal{B}$가 집합 X 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저이면, X의 부분집합 U가 $\mathcal{T}$에 속할 필요충분조건은 U가 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다. 따라서 $\mathcal{B}$가 위상 $\mathcal{T}$를 "생성한다"는 것은 다음을 의미한다: $\mathcal{B}$의 원소가 무엇인지를 알면 $\mathcal{T}$의 원소를 결정할 수 있다 – 그것은 단지 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합인 하나의 집합이다.

2.2.3 보기. $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$라 하면, 명제 2.2.1에 의하여 $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저이다. □

2.2.4 보기. $(X, \mathcal{T})$를 이산위상공간, $\mathcal{B}$를 X의 모든 단집합들의 집합족이라 하자; 즉, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$이다. 그러면 명제 1.1.9에 의하여, $\mathcal{B}$는 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다. □

2.2.5 보기. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ 그리고

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

라 하자. 그러면 $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$는 $\mathcal{T}_1$에 대한 기저이다. 왜냐하면 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$이고 $\mathcal{T}_1$의 모든 원소가 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합으로 표현되기 때문이다. ($\emptyset$은 $\mathcal{B}$의 원소들을 아무 것도 합하지 않은 것임에 주시하자.)

$\mathcal{T}_1$ 자체가 또한 $\mathcal{T}_1$에 대한 기저임을 주목하자. □

2.2.6 주목. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이면, $\mathcal{B} = \mathcal{T}$는 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저임을 주시하자. 그러므로 예를 들어, X의 모든 부분집합들의 집합은 X 위의 이산위상에 대한 기저이다.

그러므로 우리는 같은 위상에 대한 서로 다른 많은 기저가 존재할 수 있다는 것을 알게 된다. 사실상 만약 $\mathcal{B}$가 X 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저이고 $\mathcal{B}_1$이 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$를 만족하는 X의 부분집합들의 집합족이면, $\mathcal{B}_1$도 역시 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다. [이것을 입증하시오.] □

위에서 언급한 것처럼 "위상에 대한 기저"의 개념에 의하여 위상을 정의한다. 그러나 다음의 보기는 주의해야 할 것이 있음을 보여준다.

2.2.7 보기. $X = \{a, b, c\}$ 그리고 $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$라 하자. 이때 $\mathcal{B}$는 X 위의 어느 위상에 대해서도 기저가 아니다. 이것을 알아보기 위하여, $\mathcal{B}$는 하나의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저라고 가정하자. 그러면 $\mathcal{T}$의 원소는 $\mathcal{B}$ 안에 있는 집합들의 합집합으로 이루어져 있다; 즉,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

(다시 한번 $\emptyset$은 $\mathcal{B}$의 원소들을 아무 것도 합하지 않았다는 사실을 이용했다. 그러므로 $\emptyset \in \mathcal{T}$이다.)

그러나, $\mathcal{T}$는 위상이 아니다. 왜냐하면 집합 $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$는 $\mathcal{T}$에 속하지 않는다. 그러므로 $\mathcal{T}$는 정의 1.1.1의 성질 (iii)을 만족하지 않는다. 이것은 모순이다. 따라서 우리의 가정이 잘못이다. 그러므로 $\mathcal{B}$는 X 위의 어느 위상에 대해서도 기저가 아니다. □

그러므로 우리는 다음과 같은 질문을 받게 된다: 만약 $\mathcal{B}$가 X의 부분집합들의 집합족이면, 어떤 조건하에서 $\mathcal{B}$가 위상에 대한 기저인가? 이 대답은 아래 명제 2.2.8에 주어져 있다.

2.2.8 명제. X를 공집합이 아닌 집합 그리고 $\mathcal{B}$를 X의 부분집합들의 집합족이라 하자. 그러면 $\mathcal{B}$가 X 위의 하나의 위상에 대한 기저일 필요충분조건은 $\mathcal{B}$가 다음 성질을 만족하는 것이다:

(a) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, 그리고

(b) 임의의 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$에 대하여, 집합 $B_1 \cap B_2$는 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다.

증명. 만약 $\mathcal{B}$가 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저이면 $\mathcal{T}$는 정의 1.1.1의 성질 (i), (ii), 그리고 (iii)을 만족해야 한다. 특히 X는 열린집합이고 어느 두 열린집합의 교집합도 열린집합이어야 한다. 이것은 위의 (a)와 (b)가 성립함을 말한다. (열린집합은 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이기 때문이다.)

역으로, $\mathcal{B}$가 성질 (a)와 (b)를 만족한다고 가정하고 $\mathcal{T}$를 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합으로 이루어진 X의 부분집합들의 집합족이라 하자. 우리는 $\mathcal{T}$가 X 위의 위상임을 보인다. (그것을 보이면 $\mathcal{B}$는 분명히 이 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다. 그래서 명제는 참이다.)

(a)에 의하여, $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$이다. 따라서 $X \in \mathcal{T}$이다. $\emptyset$은 $\mathcal{B}$의 원소의 아무 것도 합하지 않은 집합이다. 따라서 $\emptyset \in \mathcal{T}$이다. 그러므로 $\mathcal{T}$는 정의 1.1.1의 성질 (i)을 만족한다.

이제 $\{T_j\}$를 $\mathcal{T}$의 원소들의 집합족이라 하자. 그러면 각각의 T_j는 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다. 따라서 T_j의 모든 합집합은 역시 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다. 그래서 T_j의 모든 합집합은 $\mathcal{T}$에 속한다. 그러므로 $\mathcal{T}$가 정의 1.1.1의 조건 (ii)를 만족한다.

마지막으로 C와 D가 $\mathcal{T}$에 속한다고 하자. $C \cap D \in \mathcal{T}$임을 입증하는 것이 필요하다. 그러나 $C = \bigcup_{k \in K} B_k$, 여기서 K는 첨자집합, 그리고 $B_k \in \mathcal{B}$이다. 또한 $D = \bigcup_{j \in J} B_j$, 여기서 J는 첨자집합, 그리고 $B_j \in \mathcal{B}$이다. 그러므로

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{k \in K, j \in J} (B_k \cap B_j)$$

이다.

$C \cap D$에 대한 두 가지 표현이 실제로 같다는 사실을 입증해야 한다!

유한개인 경우에 이것은 다음의 등호에 관련되어 있다.

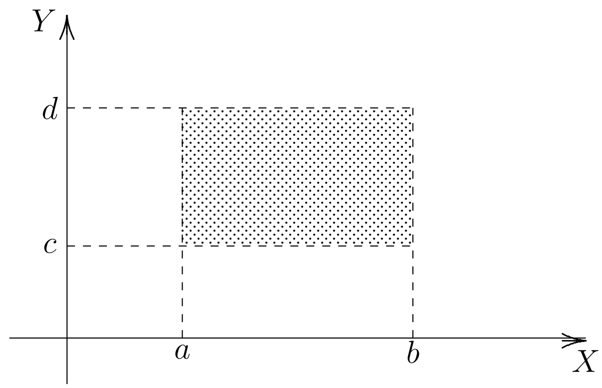
$$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4).$$

가정 (b)에 의하여, 각각의 $B_k \cap B_j$는 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다. 그러므로 $C \cap D$는 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다. 따라서 $C \cap D \in \mathcal{T}$이다. 그래서 $\mathcal{T}$는 정의 1.1.1의 성질 (iii)을 만족한다. 따라서 $\mathcal{T}$는 실제로 하나의 위상이다. 그러므로 우리가 원했던 대로, $\mathcal{B}$는 이 위상에 대한 기저이다. $\square$

명제 2.2.8은 아주 유용한 결과이다. 이것은 단순히 기저를 적어 놓음으로써 위상을 정의하도록 허용한다. 이것은 모든 열린집합을 서술하는 것보다 쉽다.

이제 이 명제를 평면 위의 한 위상을 정의하는 데 적용해 보자. 이 위상을 "유클리드" 위상이라 부른다.

2.2.9 보기. $\mathcal{B}$를 평면 위의 모든 "열린 사각형"
$\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b,\ c < y < d\}$의 집합족이라 하자. 여기서, 각 변은 X-축 또는 Y-축에 평행이다.



이때 $\mathcal{B}$는 평면 위의 위상에 대한 기저이다. 이 위상을 유클리드 위상이라고 부른다.

기호 $\mathbb{R}^2$를 쓸 때마다 평면을 의미하고, 무슨 위상인지에 대한 특별한 말이 없이 $\mathbb{R}^2$를 위상공간으로 언급하면 위상은 평면 위의 유클리드 위상을 의미한다.

$\mathcal{B}$가 실제로 위상에 대한 기저가 된다는 것을 보이기 위하여 다음을 주시하자. (i) 평면은 모든 열린 사각형들의 합집합이고, (ii) 두 사각형의 교집합은 하나의 사각형이다. ["사각형"이란 각 변이 각각의 축에 평행인 사각형을 의미한다.] 그러므로 명제 2.2.8의 조건이 만족된다. 따라서 $\mathcal{B}$는 위상에 대한 기저이다. □

2.2.10 주목. 보기 2.2.9를 일반화하여, 각각의 정수 $n > 2$에 대하여, $\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots,\ n\}$ 위에 위상을 어떻게 정의하는지를 알 수 있다. $\mathcal{B}$를 각각의 축에 평행인 변을 갖는 $\mathbb{R}^n$의 모든 부분집합 $\{\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$의 집합족이라 하자. 이 집합족 $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}^n$ 위의 **유클리드 위상(euclidean topology on $\mathbb{R}^n$)**에 대한 기저이다. □

연습문제 2.2

1. 이 연습문제에서 원판 $\{\langle x, y\rangle : x^2+y^2<1\}$는 $\mathbb{R}^2$의 열린 부분집합임을 증명하고 그 다음에 평면에 있는 모든 열린 원판은 열린집합임을 증명하게 된다.

   (i) $\langle a, b\rangle$를 원판 $D = \{\langle x, y\rangle : x^2+y^2<1\}$ 안에 있는 임의의 점이라 하자. $r = \sqrt{a^2+b^2}$라 놓고, $R_{\langle a,b\rangle}$를 꼭짓점 $\langle a \pm \frac{1-r}{8}, b \pm \frac{1-r}{8}\rangle$을 갖는 열린 사각형이라 할 때, $R_{\langle a,b\rangle} \subset D$임을 입증하시오.

   (ii) (i)을 이용하여
   $$D = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D} R_{\langle a,b\rangle}$$
   임을 보이시오.

   (iii) (ii)로부터 D는 $\mathbb{R}^2$에서 열린집합임을 유도하시오.

   (iv) 모든 열린 원판 $\{\langle x, y\rangle : (x-a)^2+(y-b)^2 < c^2, a, b, c \in \mathbb{R}\}$은 $\mathbb{R}^2$에서 열린집합임을 보이시오.

2. 이 연습문제에서 $\mathbb{R}^2$의 모든 열린 원판들의 집합족은 $\mathbb{R}^2$ 위의 하나의 위상에 대한 기저임을 보이게 된다. [나중에 이 위상이 유클리드 위상과 같다는 것을 알게 된다.]

   (i) D_1과 D_2를 $\mathbb{R}^2$의 임의의 열린 원판이라 하고 $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$이라 하자. 만약 $\langle a, b\rangle$가 $D_1 \cap D_2$에 있는 임의의 점일때 중심이 $\langle a, b\rangle$인 열린 원판 $D_{\langle a,b\rangle}$가 존재하여 $D_{\langle a,b\rangle} \subset D_1 \cap D_2$을 만족함을 보이시오.
   [힌트: 그림을 그리고 연습문제 1 (i)에서 사용한 방법과 비슷한 방법을 사용하시오.]

   (ii)
   $$D_1 \cap D_2 = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D_1 \cap D_2} D_{\langle a,b\rangle}$$
   를 보이시오.

   (iii) (ii)와 명제 2.2.8을 이용하여, $\mathbb{R}^2$ 안에 있는 모든 열린 원판들의 집합족은 $\mathbb{R}^2$ 위의 한 위상에 대한 기저임을 증명하시오.

3. $\mathcal{B}$를 $\mathbb{R}$에 있는 모든 열린구간 (a,b)들의 집합족이라 하자. 여기서, $a < b$ 그리고 a, b는 유리수이다. $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저임을 증명하시오. [이것을 명제 2.2.1 그리고 보기 2.2.3과 비교하시오. 거기서, a와 b는 반드시 유리수는 아니었다.]

   [힌트: 명제 2.2.8을 이용하지 마시오. 이것은 단지 $\mathcal{B}$가 어떤 위상에 대한 기저임을 보이는 것이지 반드시 유클리드 위상에 대한 기저임을 보이는 것은 아니다.]

4. $(X,\mathcal{T})$를 위상공간이라 할 때 $\mathcal{T}$에 대한 가산개로 이루어진 기저 $\mathcal{B}$가 존재할 때 $(X,\mathcal{T})$가 **제2가산공리(second axiom of countability)**를 만족한다. 또는 **제2가산(second countable)** 공간이라 불린다.
   (i) 위의 연습문제 3을 이용하여 $\mathbb{R}$이 제2가산공리를 만족함을 보이시오.
   (ii) 비가산 집합 위의 이산위상은 제2가산공리를 만족하지 않음을 증명하시오.
   [힌트. 하나의 특별한 기저가 비가산임을 보이는 것으로 충분한 것이 아니다. 이 위상에 대한 $\boxed{\text{모든}}$ 기저가 비가산임을 보여야 한다.]
   (iii) 모든 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{R}^n$은 제2가산공리를 만족함을 증명하시오.
   (iv) Let $(X,\mathcal{T})$를 정수 집합 위에 여유한위상이 주어진 위상공간이라 하자. 위상공간 $(X,\mathcal{T})$가 제2가산공리를 만족하는가?

5. 다음 명제를 증명하시오.
   (i) m과 c를 실수라 하자. 여기서 $m \neq 0$이다. 이때 직선 $L = \{\langle x,y\rangle : y = mx + c\}$는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌 부분집합이다.
   (ii) $\mathbb{S}^1$를 단위원이라 하자. 즉, $\mathbb{S}^1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$이다. 이때 $\mathbb{S}^1$는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌 부분집합이다.
   (iii) $\mathbb{S}^n$을 단위 n-구면(sphere) 즉,

$$\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

   이라 하자. 이때 $\mathbb{S}^n$는 $\mathbb{R}^{n+1}$의 닫힌 부분집합이다.
   (iv) B^n을 닫힌 단위 n-구(ball) 즉,

$$B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

   이라 하자. 이때 B^n은 $\mathbb{R}^n$의 닫힌 부분집합이다.
   (v) 곡선 $C = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌 부분집합이다.

6. $\mathcal{B}_1$을 집합 X 위의 위상 $\mathcal{T}_1$에 대한 기저, 그리고 $\mathcal{B}_2$를 집합 Y 위의 위상 $\mathcal{T}_2$에 대한 기저라 하자. 집합 $X \times Y$는 $x \in X$, $y \in Y$인 모든 순서쌍 $\langle x, y \rangle$로 이루어진 곱집합이다. $\mathcal{B}$를 $X \times Y$의 모든 부분집합 $B_1 \times B_2$들로 이루어진 집합족이라 하자. 여기서, $B_1 \in \mathcal{B}_1$ 그리고 $B_2 \in \mathcal{B}_2$이다. $\mathcal{B}$는 $X \times Y$ 위의 하나의 위상에 대한 기저임을 증명하시오. 위와 같이 정의된 위상을 소위 $X \times Y$ 위의 **곱위상(product topology)**이라 부른다.
[힌트. 보기 2.2.9를 참조하시오.]

7. 위의 연습문제 3과 연습문제 2.1 #8을 이용하여, $\mathbb{R}$의 모든 열린 부분집합은 F_σ-집합이고 동시에 G_δ-집합임을 증명하시오.

2.3 주어진 위상에 대한 기저

명제 2.2.8은 집합 X의 부분집합들의 집합족 $\mathcal{B}$가 X 위의 $\boxed{\text{어떤}}$ 위상에 대한 기저이기 위한 조건을 말해준다. 그러나 때로는 X 위의 $\boxed{\text{주어진}}$ 위상 $\mathcal{T}$에 대하여 $\mathcal{B}$가 이 특별한 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저인지 아닌지를 알기 원한다. $\mathcal{B}$가 $\mathcal{T}$에 대한 기저임을 입증하기 위해서 단순히 정의 2.2.2를 적용하고 $\mathcal{T}$의 모든 원소가 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합임을 보여야 한다. 하지만, 아래의 명제 2.3.2는 다른 방법을 제시한다.

그러나 먼저 X의 부분집합들의 집합족 $\mathcal{B}$는 $\boxed{\text{어떤}}$ 위상에 대한 기저라고 말하는 것과 $\boxed{\text{주어진}}$ 위상에 대한 기저라고 말하는 것의 차이점을 말해주는 보기를 제시한다.

2.3.1 보기. $\mathcal{B}$를 $(a, b]$, $a < b$ 형태의 모든 반열린구간들의 집합족이라 하자. 여기서, $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\, a < x \leq b\}$이다. 그러면 $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}$ 위의 하나의 위상에 대한 기저이다. 왜냐하면 $\mathbb{R}$은 $\mathcal{B}$의 모든 원소들의 합집합이고 임의의 두 반열린구간의 교집합은 반열린구간이기 때문이다.

그러나, 위의 $\mathcal{B}$를 기저로 갖는 위상 $\mathcal{T}_1$은 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상은 <u>아니다</u>. 이것은 $(a, b]$가 위상 $\mathcal{T}_1$을 갖는 $\mathbb{R}$에서 열린집합이지만 유클리드 위상을 갖는 $\mathbb{R}$에서는 열린집합이 아니라는 사실을 주시함으로써 알 수 있다. (연습문제 2.1 #1을 참조하시오.) 따라서 $\mathcal{B}$는 <u>어떤</u> 위상에 대한 기저이지만 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저는 아니다. □

2.3.2 명제. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. X의 열린 부분집합들의 집합족 $\mathcal{B}$가 $\mathcal{T}$에 대한 기저일 필요충분조건은 임의의 열린집합 U에 속하는 임의의 점 x에 대하여, 어떤 $B \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B \subseteq U$를 만족하는 것이다.

증명.

우리는 다음을 증명해야 한다.
(i) 만약 $\mathcal{B}$가 $\mathcal{T}$에 대한 기저이고 $x \in U \in \mathcal{T}$이면, 어떤 $B \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B \subseteq U$를 만족하고,

그리고

(ii) 만약 각각의 $U \in \mathcal{T}$ 그리고 $x \in U$에 대하여 어떤 $B \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B \subseteq U$를 만족하면, $\mathcal{B}$는 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다.

$\mathcal{B}$는 $\mathcal{T}$에 대한 기저이고 $x \in U \in \mathcal{T}$라고 가정하자. $\mathcal{B}$가 $\mathcal{T}$에 대한 기저이기 때문에, 열린집합 U는 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다; 즉, $U = \bigcup_{j \in J} B_j$이다. 여기서 적당한 첨자집합 J에 속하는 각각의 j에 대하여, $B_j \in \mathcal{B}$이다. 그러나 $x \in U$이면 어떤 $j \in J$에 대하여 $x \in B_j$이다. 그러므로 우리가 원했던 $x \in B_j \subseteq U$를 얻는다.

역으로, 각각의 $U \in \mathcal{T}$ 그리고 각각의 $x \in U$에 대하여, 어떤 $B \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B \subseteq U$를 만족한다고 가정하자. 우리는 모든 열린집합이 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합임을 보여야 한다. V를 임의의 열린집합이라 하자. 그러면 각각의 $x \in V$에 대하여, 어떤 $B_x \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B_x \subseteq V$이다. 분명히 $V = \bigcup_{x \in V} B_x$이다. (이것을 확인하시오!) 그러므로 V는 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합이다. □

2.3.3 명제. $\mathcal{B}$를 집합 X 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저라 하자. 그러면 X의 부분집합 U가 열린집합일 필요충분조건은 각각의 $x \in U$에 대하여 어떤 $B \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B \subseteq U$를 만족하는 것이다.

증명. U를 X의 임의의 부분집합이라 하자. 각각의 $x \in U$에 대하여, 어떤 $B_x \in \mathcal{B}$가 존재하여 $x \in B_x \subseteq U$를 만족한다고 가정하자. 분명히 $U = \bigcup_{x \in U} B_x$이다. 따라서 U는 열린집합들의 합집합이다. 그러므로 우리가 원했던 대로 U는 열린집합이다. 역명제는 명제 2.3.2으로부터 나온다. □

명제 2.3.3에서 서술한 기저 성질은 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상을 $\boxed{\text{정의하는 데}}$ 사용된 바로 그 성질임을 주시하자. 우리가 말했던 것은 $\mathbb{R}$의 부분집합 U가 열린집합일 필요충분조건은 각각의 $x \in U$에 대하여, 어떤 실수 $a, b \in \mathbb{R}$가 존재하여 $a < b$이고 $x \in (a, b) \subseteq U$를 만족한다는 것이었다.

주의. 명제 2.2.8과 명제 2.3.2의 차이점을 확실히 이해해야 한다. 명제 2.2.8은 집합 X의 부분집합들의 집합족 $\mathcal{B}$가 X 위의 어떤 위상에 대한 기저가 될 조건들을 제공한다. 그러나 명제 2.3.2은 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합들의 집합족 $\mathcal{B}$가 주어진 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저가 될 조건들을 제공한다.

우리는 하나의 위상이 서로 다른 많은 기저를 가질 수 있음을 보았다. 다음의 명제는 집합 X 위의 두 개의 기저 $\mathcal{B}_1$과 $\mathcal{B}_2$가 언제 같은 위상을 정의하는지를 말해준다.

2.3.4 명제. 공집합이 아닌 집합 X 위에 $\mathcal{B}_1$과 $\mathcal{B}_2$를 각각 위상 $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$의 기저라고 하자. 이때 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$일 필요충분조건은

(i) 각각의 $B \in \mathcal{B}_1$와 각각의 $x \in B$에 대하여, 어떤 $B' \in \mathcal{B}_2$가 존재하여 $x \in B' \subseteq B$이고,

(ii) 각각의 $B \in \mathcal{B}_2$와 각각의 $x \in B$에 대하여, 어떤 $B' \in \mathcal{B}_1$가 존재하여 $x \in B' \subseteq B$가 성립하는 것이다.

증명.

우리가 증명해야 할 것은 $\mathcal{B}_1$와 $\mathcal{B}_2$가 같은 위상에 대한 기저일 필요충분조건은 (i)과 (ii)가 참이라는 것이다.

먼저 $\mathcal{B}_1$와 $\mathcal{B}_2$가 같은 위상에 대한 기저, 즉, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$라고 가정하자. 그리고 조건 (i)과 (ii)가 성립함을 보인다.

다음에 (i)과 (ii)가 성립한다고 가정하고 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$임을 보인다.

먼저, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$라고 가정하자. 그러면 (i)과 (ii)는 명제 2.3.2의 직접적인 결과이다.

역으로, $\mathcal{B}_1$과 $\mathcal{B}_2$가 조건 (i)과 (ii)를 만족한다고 가정하자. 명제 2.3.2에 의하여, (i)은 각각의 $B \in \mathcal{B}_1$는 $(X, \mathcal{T}_2)$에서 열린집합임을 의미한다. 즉, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$이다. 그런데 $\mathcal{T}_1$의 모든 원소들이 $\mathcal{T}_2$의 원소들의 합집합이므로 $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$가 성립한다. 비슷하게, (ii)에 의하여 $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$가 성립한다. 그러므로 우리가 원했던 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$를 얻는다. $\square$

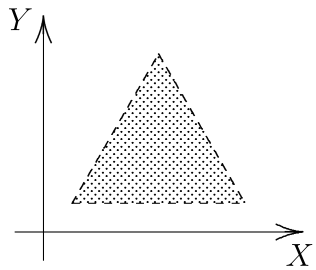
2.3.5 보기. 밑변이 X-축과 평행인 모든 "열린 이등변삼각형"들의 집합 $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저임을 보이시오. ("열린 삼각형"이란 경계가 제외된 삼각형을 의미한다.)

증명 개요. (여기서는 단지 그림에 의한 주장만 제공한다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다.)

우리는 $\mathcal{B}$가 유클리드 위상에 대한 기저임을 증명하는 것이 필요하다.

우리는 명제 2.3.4을 적용할 것이다. 그러나 먼저 $\mathcal{B}$가 $\mathbb{R}^2$ 위의 어떤 위상에 대한 기저가 됨을 보여야 할 필요가 있다.

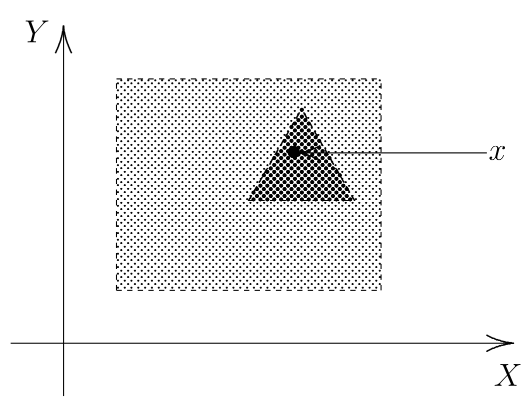
이것을 위해서 $\mathcal{B}$는 명제 2.2.8의 조건들을 만족함을 보이자.



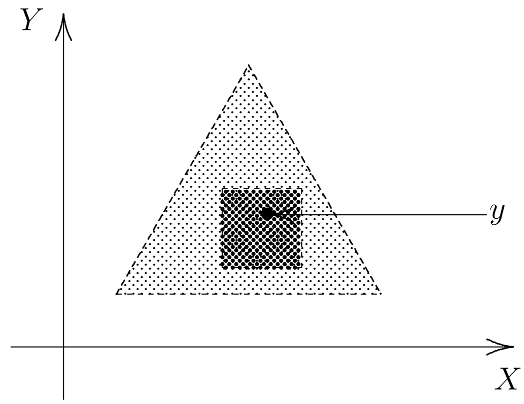
주시해야할 첫 번째 것은 $\mathcal{B}$가 어떤 위상에 대한 기저라는 것이다. 왜냐하면 그것은 명제 2.2.8을 만족하기 때문이다. ($\mathcal{B}$가 명제 2.2.8을 만족한다는 것을 보이기 위해서, $\mathbb{R}^2$는 밑변이 X-축에 평행인 모든 열린 이등변삼각형들의 합집합과 같고, 그리고 그런 두 개의 삼각형들의 교집합은 같은 형태의 다른 삼각형이라는 사실을 주시하자.)

다음에 명제 2.3.4의 조건 (i)과 (ii)가 만족됨을 보이겠다.

먼저 조건 (i)을 입증하자. R을 각 변이 각 축에 평행인 열린 사각형이라 하고 x를 R안에 있는 임의의 점이라 하자. 우리는 밑변이 X-축에 평행인 열린 이등변삼각형 T가 존재하여 $x \in T \subseteq R$이 성립함을 보여야 한다. 그림 상으로는 이것을 쉽게 알 수 있다.



마지막으로 명제 2.3.4의 조건 (ii)을 입증하자. T'를 밑변이 X-축에 평행인 열린 이등변삼각형이라 하고 y를 T'안에 있는 임의의 점이라 하자. 그러면 어떤 열린 사각형 R'이 존재하여 $y \in R' \subseteq T'$를 만족한다. 그림 상으로는 이것도 쉽게 알 수 있다.



따라서 명제 2.3.4의 조건을 만족한다. 그러므로 $\mathcal{B}$는 사실상 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저이다. □

보기 2.2.9에서 우리는 (변이 축에 평행인) 모든 "열린 사각형"들의 집합족이 유클리드 위상에 대한 기저가 되도록 정의했다. 보기 2.3.5는 "열린 사각형"을 (밑변이 X-축에 평행인) "열린 이등변삼각형"으로 바꾸었지만 위상은 바뀌지 않았다는 것을 보여준다. 연습문제 2.3 #1에서 위의 괄호 안에 있는 조건이 없어도 위상은 변하지 않는다는 것을 알 수 있다. 또한 "열린 사각형"을 "열린 원판"으로 바꿀 수 있다.[2]

연습문제 2.3

1. 다음의 각각의 집합족이 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저인지 아닌지를 결정하시오:

(i) 각 변이 각각의 축에 평행인 모든 "열린" 정사각형들의 집합족;

(ii) 모든 "열린" 원판들의 집합족;

(iii) 모든 "열린" 정사각형들의 집합족;

(iv) 모든 "열린" 사각형들의 집합족;

(v) 모든 "열린" 삼각형들의 집합족.

[2]사실상, 대부분의 교재는 $\mathbb{R}^2$ 위의 열린 원판으로 유클리드 위상을 서술한다.

2. (i) $\mathcal{B}$를 공집합이 아닌 집합 X 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저라고 하자. 만약 $\mathcal{B}_1$이 $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$를 만족하는 X의 부분집합들의 집합족일 때, $\mathcal{B}_1$ 또한 $\mathcal{T}$에 대한 기저임을 증명하시오.

   (ii) (i)로부터 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 비가산개의 서로 다른 기저가 존재함을 유도하시오.

3. $\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$라 하자. 보기 2.3.1에서 본 것처럼, $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}$ 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저이고 $\mathcal{T}$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상은 $\boxed{\text{아니다}}$. 그럼에도 불구하고, 각각의 구간 (a, b)는 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$에서 열린집합임을 보이시오.

4.* $C[0, 1]$를 $[0, 1]$ 위의 연속인 실수값 함수들의 집합이라 하자.

   (i) 다음 집합족 $\mathcal{M}$이 $C[0, 1]$ 위의 한 위상 $\mathcal{T}_1$에 대한 기저임을 보이시오:

$$\mathcal{M} = \{M(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1] \text{ 그리고 } \varepsilon\text{는 양의 실수}\}$$

   여기서, $M(f, \varepsilon) = \left\{g : g \in C[0, 1] \text{ 그리고 } \int_0^1 |f - g| < \varepsilon\right\}$.

   (ii) 다음 집합족 $\mathcal{U}$가 $C[0, 1]$ 위의 한 위상 $\mathcal{T}_2$에 대한 기저임을 보이시오:

$$\mathcal{U} = \{U(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1]\text{그리고}\varepsilon\text{는 양의 실수}\}$$

   여기서, $U(f, \varepsilon) = \{g : g \in C[0, 1] \text{ 그리고 } \sup_{x \in [0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon\}$.

   (iii) $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$임을 증명하시오.

5. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. X의 열린 부분집합들의 공집합이 아닌 집합족 $\mathcal{S}$에 속하는 원소들의 모든 유한 교집합들의 집합족이 $\mathcal{T}$에 대한 기저를 이루면 $\mathcal{S}$를 $\mathcal{T}$에 대한 **부분기저(subbasis)**라고 부른다.

   (i) (a, ∞) 또는 $(-\infty, b)$ 형태의 모든 열린구간들의 집합족은 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 부분기저임을 증명하시오.

   (ii) $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$는 보기 1.1.2의 위상 $\mathcal{T}_1$에 대한 부분기저임을 증명하시오.

6. $\mathcal{S}$를 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저라 하자. (위의 연습문제 5를 보시오.) 만약 모든 닫힌구간 $[a, b]$, $a < b$이 $\mathcal{S}$에 속하면, $\mathcal{T}$는 이산위상임을 증명하시오.

7. X를 공집합이 아닌 집합이라 하고 $x \in X$에 대하여 $\mathcal{S}$를 모든 집합 $X \setminus \{x\}$들의 집합족이라 하자. $\mathcal{S}$는 X 위의 여유한위상에 대한 부분기저임을 증명하시오.

8. X를 임의의 무한집합 그리고 $\mathcal{T}$를 X 위의 이산위상이라 하자. 단집합을 포함하지 않는 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저 $\mathcal{S}$를 찾으시오.

9. $\mathcal{S}$를 $\mathbb{R}^2$ 평면에 있는 모든 직선들의 집합족이라 하자. 만약 $\mathcal{S}$가 집합 $\mathbb{R}^2$ 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저이면, 그 위상은 어떤 위상인가?

10. $\mathcal{S}$를 X-축에 평행인 평면에 있는 모든 직선들의 집합족이라 하자. $\mathcal{S}$가 $\mathbb{R}^2$ 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저일 때, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ 안에 있는 열린집합을 서술하시오.

11. $\mathcal{S}$를 평면에 있는 모든 원들의 집합족이라 하자. $\mathcal{S}$가 $\mathbb{R}^2$ 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저일 때, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ 안에 있는 열린집합을 서술하시오.

12. $\mathcal{S}$를 중심이 X-축 위에 있는 평면의 모든 원들의 집합족이라 하자. $\mathcal{S}$가 $\mathbb{R}^2$ 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저일 때, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ 안에 있는 열린집합을 서술하시오.

2.4 후기

이 장에서 우리는 매우 중요한 위상공간을 정의했다. 즉 실수집합 $\mathbb{R}$ 위에 유클리드 위상을 정의했고, 그것을 분석하는데 약간의 시간을 소비했다. 이 위상에서 열린구간은 실제로 열린집합 (그리고 닫힌구간은 닫힌집합)임을 관찰했다. 그러나 모든 열린집합이 열린구간은 아니다. 그럼에도 불구하고, $\mathbb{R}$에 있는 모든 열린집합은 열린구간들의 합집합이다. 이것으로부터 우리는 "위상에 대한 기저"의 개념을 소개했고 모든 열린구간들의 집합족은 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저임을 확고히 했다.

제 1장의 소개에서 우리는 빈틈없는 논증으로서 수학적 증명을 서술했고 증명 서술의 중요성을 강조했다. 이 장에서 우리는 주목 2.1.2 (v)와 보기 2.2.7에 있는 다른 예제를 가지고 모순법에 의한 증명을 소개했다. "필요충분"조건의 증명은 명제 2.2.1에서 설명되었고, 다른 예제는 명제 2.2.8, 2.3.2, 2.3.3, 그리고 2.3.4에 있다.

위상에 대한 기저는 그 자체가 중요한 주제이다. 예를 들어 단집합들의 집합족은 이산위상에 대한 기저임을 보았다. 명제 2.2.8은 집합 X의 부분집합들의 집합족이 X 위의 $\boxed{\text{어떤}}$ 위상에 대한 기저가 될 필요충분조건을 제시한다. 이것은 X의 부분집합들의 집합족이 X 위의 $\boxed{\text{주어진}}$ 위상에 대한 기저가 될 필요충분조건을 제시한 명제 2.3.2와 대조를 이루었다. 두 개의 서로 다른 집합족 $\mathcal{B}_1$과 $\mathcal{B}_2$가 같은 위상에 대한 기저가 될 수 있음을 주목했다. 이것에 대한 필요충분조건은 명제 2.3.4에 주어져 있다.

임의의 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{R}^n$ 위에 유클리드 위상을 정의했다. 열린 정사각형들의 집합족 또는 열린 사각형들의 집합족처럼 모든 열린 원판들의 집합족은 $\mathbb{R}^2$에 대한 기저임을 알았다.

연습문제에서 세 개의 중요한 아이디어를 소개했다. 연습문제 2.1 #8에서 측도론에서 중요한 F_σ-집합과 G_δ-집합의 개념을 다루었다. 연습문제 2.3 #4에서 연속인 실수값 함수공간을 소개했다. 이러한 공간은 함수해석학 연구의 중심 대상인 함수공간이라 불린다. 함수해석학은 (고전) 해석학과 위상수학의 보기 좋은 조합이고, 얼마 전부터 현대 해석학이라고 불리었다. Simmons [286]를 비교하시오. 마지막으로, 연습문제 2.3 #5–12에서 부분기저의 개념을 다루었다.

이제 여러분은 다음의 비디오를 보아야 한다:
Topology Without Tears - Video 1 - Pure Mathematics
Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory
Topology Without Tears - Video 4a & 4b &4c &4d - Writing Proofs in Mathematics
YouTube와 Youku 상의 이러한 비디오의 링크는 http://www.topologywithouttears.net에서 볼 수 있다.

제 3 장

극한점

소개

실직선 상에는 "가까움(closeness)"의 개념이 있다. 예를 들어 수열 $.1, .01, .001, .0001, .00001, \ldots$의 각 점은 이전의 것보다 0에 더 가깝다. 사실상, 어떤 의미에서 0은 이 수열의 극한점이다. 따라서 구간 $(0,1]$은 극한점 0을 포함하지 않기 때문에 닫힌집합이 아니다. 일반적인 위상공간에서는 "거리함수(distance function)"가 없기 때문에 다른 방법으로 접근해야 한다. 우리는 거리에 의존하지 않고 극한의 개념을 정의할 것이다. 새로운 극한의 개념을 가지고도 0은 $(0,1]$의 극한점이 될 것이다. 이 극한의 개념 소개로 닫힌집합의 개념이 더 잘 이해될 것이다.

이 장에서 소개할 매우 중요한 다른 위상적 개념은 연결성(connectedness)이다. 위상공간 $\mathbb{R}$을 생각해 보자. 집합 $[0,1] \cup [2,3]$과 $[4,6]$은 둘 다 길이가 2이지만, 서로 다른 형태의 집합임은 분명하다 – 첫 번째 집합은 서로소인 두 조각으로 이루어져 있고 두 번째 집합은 한 조각으로 이루어져 있다. 둘 사이의 차이점은 "위상적"이고 연결성의 개념에 의하여 드러나게 될 것이다.

이 장을 이해하기 위하여 독자 스스로가 부록 1의 내용에 익숙해 있어야 한다.
앞에서 말한 것처럼, 이것은 YouTube 상의 비디오
http://youtu.be/9h83ZJeiecg &
http://youtu.be/QPSRB4Fhzko; "Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory"
중국 Youku 싸이트 http://tinyurl.com/m4dlzhh &
http://tinyurl.com/kf9lp8e ;
그리고 링크
http://www.topologywithouttears.net에서 찾을 수 있다.

3.1 극한점과 폐포

만약 $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이면, 집합 X의 원소를 **점(points)**이라고 한다.

3.1.1 정의. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 점 $x \in X$를 포함하는 모든 열린집합 U가 x와 다른 A의 점을 포함하면 x를 **A의 극한점(limit point)** (또는 **응집점(accumulation point)** 또는 **집적점(cluster point)**)이라 한다.

3.1.2 보기. 집합 $X = \{a, b, c, d, e\}$, 위상 $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$인 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 생각해 보자. $A = \{a, b, c\}$이면 b, d, 그리고 e는 A의 극한점이지만, a와 c는 A의 극한점이 아니다.

증명.

점 a가 A의 극한점일 필요충분조건은 a를 포함하는 모든 열린집합이 집합 A의 다른 점을 포함하는 것이다.

그러므로 점 a가 A의 극한점이 $\boxed{\text{아니다}}$라는 것을 보이기 위해서는, a를 포함하지만 A의 다른 점을 포함하지 않는 오직 하나의 열린집합을 찾으면 충분하다.

$\{a\}$는 열린집합이고 A의 다른 점을 포함하지 않는다. 따라서 a는 A의 극한점이 아니다.

$\{c, d\}$는 c를 포함하는 열린집합이지만 A의 다른 점은 포함하지 않는다. 그러므로 c는 A의 극한점이 아니다.

b가 A의 극한점임을 보이기 위해서는, b를 포함하는 모든 열린집합이 b와 다른 A의 점을 포함하다는 것을 보여야 한다.

이 경우에는 b를 포함하는 $\boxed{\text{모든}}$ 열린집합을 적어 놓고 각각이 b와 다른 A의 점을 포함한다는 것을 보여야 한다.

b를 포함하는 열린집합은 X와 $\{b, c, d, e\}$ 뿐이고 둘 다 b와 다른 A의 점을 포함한다. 즉, c를 포함한다. 따라서 b는 A의 극한점이다.

점 d는 A에 속하지 않지만 A의 극한점이다. 이것은 d를 포함하는 모든 열린집합이 d와 다른 A의 점을 포함하기 때문이다. 비슷하게 e는 A에 속하지 않지만 A의 극한점이다. □

3.1.3 보기. $(X, \mathcal{T})$를 이산공간 그리고 A를 X의 부분집합이라 하자. 그러면 A는 극한점을 갖지 않는다. 왜냐하면 각각의 $x \in X$에 대하여, $\{x\}$는 x와 다른 A의 점을 포함하지 않는 열린집합이기 때문이다. $\square$

3.1.4 보기. $\mathbb{R}$의 부분집합 $A = [a, b)$를 생각해 보자. $[a, b)$의 모든 원소는 A의 극한점이라는 것을 쉽게 입증할 수 있다. b도 A의 극한점이다. $\square$

3.1.5 보기. $(X, \mathcal{T})$를 비이산공간 그리고 A를 적어도 두 점을 갖는 X의 부분집합이라 하자. 그러면 X의 모든 점은 A의 극한점이란 것을 쉽게 보일 수 있다. (왜 A가 적어도 두 점을 가져야 된다고 주장을 했습니까?) $\square$

다음 명제는 하나의 집합이 닫힌집합인지 아닌지를 테스트하는 유용한 방법을 제공해 준다.

3.1.6 명제. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. A가 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합일 필요충분조건은 A가 그것의 모든 극한점을 포함하는 것이다.

증명.

A가 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합일 $\boxed{\text{필요충분조건}}$은 A가 그것의 모든 극한점을 포함한다는 것의 증명을 요구하고 있다. 즉, 우리는 다음을 증명해야 한다;

(i) 만약 A가 닫힌집합이면, A가 그것의 모든 극한점을 포함해야한다, $\boxed{\text{그리고}}$

(ii) 만약 A가 A의 모든 극한점을 포함하면, 그것은 닫힌집합이다.

A가 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합이라 가정하자. $\boxed{\text{모순법 가정:}}$ p를 $X \setminus A$에 속하는 A의 극한점이라고 가정하자. 그러면 $X \setminus A$는 A의 극한점 p를 포함하는 열린집합이다. 그러므로 $X \setminus A$는 A의 한 원소를 포함한다. 이것은 분명한 오류이다. 그러므로 가정에 모순이다. 따라서 A의 모든 극한점은 A에 속해야 한다.

역으로, A가 그것의 모든 극한점을 포함한다고 가정하자. 각각의 $z \in X \setminus A$에 대하여 가정을 적용하면 적당한 열린집합 $U_z \ni z$가 존재하여 $U_z \cap A = \emptyset$이다. 즉, $U_z \subseteq X \setminus A$이다. 그러므로 $X \setminus A = \bigcup_{z \in X \setminus A} U_z$이다. (이것을 확인하시오!) 따라서 $X \setminus A$는 열린집합들의 합집합이다. 그러므로 열린집합이다. 결론적으로 그것의 여집합, A는 닫힌집합이다. $\square$

3.1.7 보기. 명제 3.1.6의 응용으로 다음을 얻는다:

(i) $[a, b)$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이 아니다, 왜냐하면 b는 극한점이고 $b \notin [a, b)$이기 때문이다;

(ii) $[a, b]$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이다, 왜냐하면 $[a, b]$의 모든 극한점 (즉, $[a, b]$의 모든 원소)이 $[a, b]$에 속하기 때문이다;

(iii) (a, b)는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이 아니다, 왜냐하면 그것은 극한점 a를 포함하지 않기 때문이다;

(iv) $[a, \infty)$는 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이다. □

3.1.8 명제. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하고 A'를 A의 모든 극한점들의 집합이라 하자. 그러면 $A \cup A'$는 닫힌집합이다.

증명. 명제 3.1.6으로 부터, 집합 $A \cup A'$가 $\boxed{\text{그것의}}$ 모든 극한점을 포함하거나 또는 동등하게 $X \setminus (A \cup A')$의 어느 원소도 $A \cup A'$의 극한점이 아니다 라는 것을 보이면 충분하다.

$p \in X \setminus (A \cup A')$라 하자. $p \notin A'$이므로, p를 포함하는 적당한 열린집합 U가 존재하여 $U \cap A = \{p\}$ 또는 $\emptyset$이다. 그러나 $p \notin A$이므로 $U \cap A = \emptyset$이다. 우리는 또한 $U \cap A' = \emptyset$임을 주장하자. 만약 $x \in U$이면 U가 열린집합이고 $U \cap A = \emptyset$이므로 $x \notin A'$이다. 그러므로 $U \cap A' = \emptyset$이다. 따라서 $U \cap (A \cup A') = \emptyset$ 그리고 $p \in U$이다. 이것은 p가 $A \cup A'$의 극한점이 아니다 라는 것을 의미한다. 따라서 $A \cup A'$는 닫힌집합이다. □

3.1.9 정의. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. A와 그것의 모든 극한점으로 이루어진 집합 $A \cup A'$를 **A의 폐포(closure)**라 부르고 $\overline{A}$로 나타낸다.

3.1.10 주목. 명제 3.1.8로부터 $\overline{A}$는 닫힌집합임은 분명하다. 명제 3.1.6 그리고 연습문제 3.1 #5 (i)에 의하여, A를 포함하는 모든 닫힌집합은 A'도 포함해야 한다. 따라서 $A \cup A' = \overline{A}$는 A를 포함하는 가장 작은 닫힌집합이다. 이것은 $\overline{A}$가 A를 포함하는 모든 닫힌집합들의 교집합임을 의미한다. □

3.1.11 보기. $X = \{a, b, c, d, e\}$이고

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

일 때, $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$, 그리고 $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$임을 보이시오.

증명.

특별한 집합의 폐포를 찾기 위하여, 그 집합을 포함하는 모든 닫힌집합을 찾고 그 다음에 가장 작은 것을 선택한다. 그러므로 우리는 먼저 $\boxed{\text{모든}}$ 닫힌집합들을 적어놓고 시작한다 – 이것은 단순히 열린집합들의 여집합이다.

이제 $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ 그리고 $\{a\}$은 닫힌집합들이다. 그러므로 $\{b\}$를 포함하는 가장 작은 닫힌집합은 $\{b, e\}$이다; 즉, $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$이다. 비슷하게 $\overline{\{a, c\}} = X$, 그리고 $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$이다. □

3.1.12 보기. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$를 유리수의 집합이라 할 때 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$임을 증명하시오.

증명. $\boxed{\text{모순법 가정}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$라고 가정하자. 그러면 어떤 $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$가 존재한다. $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$가 $\mathbb{R}$에서 열린집합이므로, 적당한 실수 a, b $(a < b)$가 존재하여 $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$이다. 그러나 모든 구간 (a, b) 안에는 어떤 유리수 q가 존재한다; 즉, $q \in (a, b)$이다. 따라서 $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$이다. 그러므로 $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$이다. 이것은 모순이다. 왜냐하면 $q \in \mathbb{Q}$이기 때문이다. 따라서 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$이다. □

3.1.13 정의. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. $\overline{A} = X$이면 A는 X에서 **조밀하다(dense)** 또는 X의 **모든 곳에서 조밀하다(everywhere dense)**고 한다.

이제 우리는 보기 3.1.12를 $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$의 조밀한 부분집합이다라고 다시 말할 수 있다.

보기 3.1.11에서 $\{a, c\}$는 X에서 조밀하다는 것에 주목하자.

3.1.14 보기. $(X, \mathcal{T})$를 이산공간이라 하자. 그러면 X의 모든 부분집합은 닫힌집합이다. (그것의 여집합이 열린집합이기 때문이다.) 그러므로 X의 조밀한 부분집합은 오직 X 자신 뿐이다. 왜냐하면 X의 각각의 부분집합의 폐포가 자기 자신과 같기 때문이다. □

3.1.15 명제. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 이 때 A가 X에서 조밀하기 위한 필요충분조건은 X의 공집합이 아닌 모든 열린집합과 A의 교집합은 공집합이 아니다. (즉, 만약 $U \in \mathcal{T}$이고 $U \neq \emptyset$이면 $A \cap U \neq \emptyset$이다.)

증명. 먼저, X의 공집합이 아닌 모든 열린집합과 A의 교집합은 공집합이 아니라고 가정하자. 만약 $A = X$이면, 분명히 A는 X에서 조밀하다. 만약 $A \neq X$이면 , $x \in X \setminus A$라고 놓자. 만약 $U \in \mathcal{T}$ 그리고 $x \in U$이면 $U \cap A \neq \emptyset$이다. 따라서 x는 A의 극한점이다. x가 $X \setminus A$의 임의의 점이므로, $X \setminus A$의 모든 점은 A의 극한점이다. 따라서 $A' \supseteq X \setminus A$ 이고, 정의 3.1.9에 의하여 $\overline{A} = A' \cup A = X$ 이다; 즉, A는 X에서 조밀하다.

역으로, A가 X에서 조밀하다고 가정하자. U를 X의 공집합이 아닌 임의의 열린 부분집합이라고 놓자. $\boxed{\text{모순법 가정}}$ $U \cap A = \emptyset$라고 가정하자. 이 때 만약 $x \in U$이면, $x \notin A$ 그리고 x는 A의 극한점이 $\boxed{\text{아니다}}$. 왜냐하면 U는 x를 포함하는 열린집합이지만 A의 다른 원소를 포함하지 않기 때문이다. 이것은 모순이다. 그 이유는 A가 X에서 조밀하기 때문에 $X \setminus A$ 의 모든 원소가 A의 극한점이다. 따라서 가정이 잘못이고 우리가 원하는 $U \cap A \neq \emptyset$이 성립한다. □

연습문제 3.1

1. (a) 보기 1.1.2에서, 다음 집합의 모든 극한점을 찾으시오:
   (i) $\{a\}$,
   (ii) $\{b, c\}$,
   (iii) $\{a, c, d\}$,
   (iv) $\{b, d, e, f\}$.

   (b) 그러므로, 위의 각각의 집합의 폐포를 찾으시오.
   (c) 이제 보기 3.1.11의 방법을 이용하여 위의 각각의 집합의 폐포를 찾으시오.

2. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$를 여유한위상을 갖는 정수집합이라 하자. 다음 집합의 극한점의 집합을 나열하시오:
   (i) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,
   (ii) 집합 E는 모든 짝수들로 이루어져 있다.

3. $\mathbb{R}$의 열린구간 (a, b)의 모든 극한점을 찾으시오. 여기서 $a < b$이다.

4. (a) 다음의 각각의 집합에 대하여 $\mathbb{R}$에서의 폐포가 무엇인가?

(i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$,

(ii) 정수집합 $\mathbb{Z}$,

(iii) 무리수집합 $\mathbb{P}$.

(b) S를 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고 $a \in \mathbb{R}$라 하자. $a \in \overline{S}$일 필요충분조건은 각각의 양의 정수 n에 대하여, 어떤 $x_n \in S$이 존재하여 $|x_n - a| < \frac{1}{n}$을 만족하는 것임을 증명하시오.

5. S와 T를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 공집합이 아닌 부분집합이라 하고 $S \subseteq T$라 하자.

(i) 만약 p가 집합 S의 극한점이면, p는 또한 집합 T의 극한점임을 입증하시오.

(ii) (i)로부터 $\overline{S} \subseteq \overline{T}$를 유도하시오.

(iii) 그러므로 만약 S가 X에서 조밀하면, T는 X에서 조밀함을 보이시오.

(iv) (iii)을 이용하여 $\mathbb{R}$는 비가산개의 서로 다른 조밀한 부분집합을 가짐을 보이시오.

[힌트. 비가산집합은 부록 1에 논의되었다.]

(v)* 다시 (iii)을 이용하여, $\mathbb{R}$은 비가산개의 서로 다른 가산인 조밀한 부분집합을 가지고 있고 $2^{\mathfrak{c}}$개의 서로 다른 비가산인 조밀한 부분집합을 갖는 것임을 증명하시오.
[힌트. $\mathfrak{c}$는 부록 1에 논의되었음을 주목하시오.]

6. A와 B를 유클리드 위상공간 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하자. 다음 4개의 집합을 생각하시오.

(i) $A \cap \overline{B}$; (ii) $\overline{A} \cap B$; (iii) $\overline{A} \cap \overline{B}$; (iv) $\overline{A \cap B}$.

(a) 만약 A가 유리수집합이고 B가 무리수집합이면, 위의 4개의 집합 중 어느 두 집합도 같지 않음을 증명하시오.

(b) 만약 A와 B가 $\mathbb{R}$에서 열린구간이면, 위의 4개의 집합 중 적어도 두개는 같음을 증명하시오.

(c) 위의 4개의 집합 중 어느 두 개도 같지 않은 $\mathbb{R}$의 열린 부분집합 A와 B를 찾으시오.

3.2 근방

3.2.1 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간, N을 X의 부분집합, 그리고 p를 N의 점이라 하자. X의 어떤 열린 부분집합 U가 존재하여 $p \in U \subseteq N$을 만족하면 N을 점 p의 **근방 (neighbourhood)**이라고 부른다.

3.2.2 보기. $\mathbb{R}$의 닫힌구간 $[0,1]$은 점 $\frac{1}{2}$의 근방이다. 왜냐하면 $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0,1]$이기 때문이다. □

3.2.3 보기. $\mathbb{R}$의 구간 $(0,1]$은 점 $\frac{1}{4}$의 근방이다. 왜냐하면 $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0,1]$이기 때문이다. 그러나 $(0,1]$은 점 1의 근방은 아니다. (이것을 증명하시오.) □

3.2.4 보기. $(X, \mathcal{T})$가 임의의 위상공간이고 $U \in \mathcal{T}$이면, 정의 3.2.1로부터 U는 모든 점 $p \in U$의 근방이라는 결과가 나온다. 따라서, 예를 들면, $\mathbb{R}$의 모든 열린구간 (a,b)는 그 안에 있는 모든 점의 근방이다. □

3.2.5 보기. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간, 그리고 N을 점 p의 근방이라 하자. 만약 S가 X의 임의의 부분집합이고 $N \subseteq S$이면, S는 p의 근방이다. □

다음의 명제는 쉽게 증명되므로 증명은 독자에게 맡긴다.

3.2.6 명제. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 점 $x \in X$가 A의 극한점일 필요충분조건은 x의 모든 근방이 x와 다른 A의 점을 포함하는 것이다. □

하나의 집합이 닫힌집합일 필요충분조건은 그 집합이 그것의 모든 극한점을 포함하는 것이기 때문에 다음을 얻는다:

3.2.7 따름정리. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 그러면 A가 닫힌집합일 필요충분조건은 각각의 $x \in X \setminus A$에 대하여 x의 어떤 근방 N이 존재하여 $N \subseteq X \setminus A$이다. □

3.2.8 따름정리. U를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 그러면 $U \in \mathcal{T}$일 필요충분조건은 각각의 $x \in U$에 대하여 x의 근방 N이 존재하여 $N \subseteq U$이다. □

다음 따름정리는 따름정리 3.2.8로부터 쉽게 유도된다.

3.2.9 따름정리. U를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 그러면 $U \in \mathcal{T}$ 일 필요충분조건은 각각의 $x \in U$에 대하여 x의 근방 $V \in \mathcal{T}$가 존재하여 $x \in V \subseteq U$이다. □

따름정리 3.2.9는 하나의 집합이 열린집합인지 아닌지를 테스트하는데 유용하게 사용된다. 이것은 하나의 집합이 열린집합일 필요충분조건은 그 집합이 그 안의 각 점에 대한 어떤 열린집합을 포함하는 것을 말한다.

연습문제 3.2

1. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. A가 X에서 조밀하기 위한 필요충분조건은 $X \setminus A$의 각 점의 모든 근방과 A의 교집합이 공집합이 아님을 증명하시오.

2. (i) A와 B를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자.

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

임을 주의깊게 증명하시오.

(ii)

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

인 예를 만드시오.

3. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. $\mathcal{T}$가 X 위의 여유한위상일 필요충분조건은 (i) $(X, \mathcal{T})$가 T_1-공간이고, (ii) X의 모든 무한 부분집합이 X에서 조밀함을 증명하시오.

4. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 가산인 조밀한 부분집합을 가지면, $(X, \mathcal{T})$를 **가분(separable)**공간이라고 부른다. 다음 위상공간 중 어느 것이 가분인지를 결정하시오:

 (i) 보통위상공간 $\mathbb{R}$;

 (ii) 가산집합 위의 이산위상;

 (iii) 가산집합 위의 여유한 위상;

 (iv) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$, 단, X는 유한집합;

 (v) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$, 단, $\mathcal{T}$는 유한집합족;

 (vi) 비가산집합 위의 이산위상;

 (vii) 비가산집합 위의 여유한위상;

 (viii) 제2가산공리를 만족하는 위상공간 $(X, \mathcal{T})$.

5. $(X, \mathcal{T})$를 임의의 위상공간, A를 X의 임의의 부분집합이라 하자. A 안에 포함되는 가장 큰 열린집합을 A의 **내부(interior)**라 부르고 기호 **Int(A)**로 나타낸다. [이것은 A 안에 있는 X의 모든 열린 부분집합들의 합집합이다.]

 (i) 실수 $\mathbb{R}$에서, Int$([0,1]) = (0,1)$임을 증명하시오.

 (ii) 실수 $\mathbb{R}$에서, Int$((3,4)) = (3,4)$임을 증명하시오.

 (iii) 만약 A가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합이면, Int$(A) = A$임을 보이시오.

 (iv) 실수 $\mathbb{R}$에서, Int$(\{3\}) = \emptyset$임을 입증하시오.

 (v) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 비이산위상공간이면, X의 모든 진부분집합 A에 대하여, Int$(A) = \emptyset$임을 보이시오.

 (vi) 실수 $\mathbb{R}$의 모든 가산부분집합 A에 대하여, Int$(A) = \emptyset$임을 보이시오.

6. 만약 A가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 부분집합이면, Int$(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$임을 보이시오. (내부의 정의에 대해서는 위의 연습문제 5를 보시오.)

7. 위의 연습문제 6을 이용하여, A가 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀하기 위한 필요충분조건은 Int$(X \setminus A) = \emptyset$임을 입증하시오.

8. 위의 연습문제 5의 내부의 정의를 이용하여, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 부분집합들 A_1, A_2에 관한 다음의 명제가 참인지 아닌지를 결정하시오.

(i) $\text{Int}(A_1 \cap A_2) = \text{Int}(A_1) \cap \text{Int}(A_2)$,

(ii) $\text{Int}(A_1 \cup A_2) = \text{Int}(A_1) \cup \text{Int}(A_2)$,

(iii) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

(만약 위의 부분에 대한 답이 "참"이면 증명을 해야 한다. 답이 "거짓"이면 구체적인 예를 들어야 한다.)

9.* S를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 조밀한 부분집합이라 하자. X의 모든 열린 부분집합 U에 대하여, $\overline{S \cap U} = \overline{U}$임을 증명하시오.

10. S와 T를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 조밀한 부분집합이라 하자. 만약 T가 열린집합이면, 위의 연습문제 9로부터 $S \cap T$가 X에서 조밀함을 유도하시오.

11. $\mathcal{B} = \{[a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$라 하자. 다음의 각각의 명제를 증명하시오.

(i) $\mathcal{B}$가 $\mathbb{R}$ 위의 위상 $\mathcal{T}_1$에 대한 기저이다. (위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$을 **Sorgenfrey 직선**이라 한다.)

(ii) 만약 $\mathcal{T}$가 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상이면, $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$이다.

(iii) $a < b$인 모든 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여, $[a, b)$는 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$에서 열린닫힌집합이다.

(iv) Sorgenfrey 직선은 가분공간이다.

(v)* Sorgenfrey 직선은 제2가산공리를 만족하지 않는다.

3.3 연결성

3.3.1 주목. 우리는 여기서 독자가 이미 알고 있는 몇 가지 정의와 기본 사실을 적어둔다. S를 임의의 실수집합이라 하자. 어떤 원소 $b \in S$가 존재해서 모든 $x \in S$에 대하여 $x \leq b$이면, b를 S의 **최대원(the greatest element)**이라 부른다. 비슷하게 만약 어떤 원소 $a \in S$가 존재해서 모든 $x \in S$에 대하여 $a \leq x$이면, a를 S의 **최소원(the least element)**이라 부른다. 어떤 실수 c가 존재해서 모든 $x \in S$에 대하여 $x \leq c$이면, S를 **위로 유계(bounded above)**라 부르고, c는 S에 대한 **상계(upper bound)**라 불린다. 비슷한 방법으로 용어 "**아래로 유계(bounded below)**" 그리고 "**하계(lower bound)**"를 정의한다. 위로 유계이고 아래로 유계인 집합을 **유계(bounded)**라고 부른다. □

최소상계공리(Least Upper Bound Axiom): ***S를 공집합이 아닌 실수집합이라 하자. 만약 S가 위로유계이면, S는 최소상계를 갖는다.*** □

S의 최소상계는 **상한(supremum)**이라고도 불리며, 기호 $\sup(S)$으로 나타낸다. 상한은 집합 S에 속할 수도 있고 속하지 않을 수도 있다. 사실상, S의 상한이 S의 원소일 필요충분조건은 S가 최대원을 갖는 것이다. 예를 들어, 열린구간 $S = (1, 2)$의 상한은 2이지만, $2 \notin (1, 2)$이다. 반면에 $[3, 4]$의 상한은 4이고 4는 $[3, 4]$에 속한다. 그리고 4는 $[3, 4]$의 최대원이다. 아래로 유계인 임의의 실수집합 S를 **최대하계(greatest lower bound)** 또는 **하한(infimum)**을 갖고 기호 $\inf(S)$로 나타낸다.

3.3.2 보조정리. S를 위로 유계인 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고 p를 S의 상한이라 하자. 만약 S가 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이면, $p \in S$이다.

증명. $p \in \mathbb{R} \setminus S$라 $\boxed{\text{가정}}$하자. $\mathbb{R} \setminus S$가 열린집합이기 때문에 실수 a와 b, $a < b$가 존재하여 $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$이다. p는 S에 대한 $\boxed{\text{최소}}$상계이고 $a < p$이기 때문에, 분명히 $x \in S$가 존재하여 $a < x$이다. 또한 $x < p < b$이므로, $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$이다. 그러나 $x \in S$이므로, 이것은 모순이다. 따라서 우리의 가정이 잘못이고 $p \in S$이다. □

3.3.3 명제. T를 $\mathbb{R}$의 열린닫힌 부분집합이라 하자. 그러면 $T = \mathbb{R}$ 또는 $T = \emptyset$이다.

증명. $T \neq \mathbb{R}$ 그리고 $T \neq \emptyset$라 $\boxed{\text{가정}}$하자. 그러면 $x \in T$와 $z \in \mathbb{R} \setminus T$가 존재한다. 일반성을 잃지 않고, $x < z$라 가정하자. $S = T \cap [x, z]$라 놓자. 그러면 S는, 두 닫힌집합의 교집합으로써, 닫힌집합이다. S는 또한 위로 유계이다. 왜냐하면 z가 분명히 S의 상계이기 때문이다. p를 S의 상한이라 하자. 보조정리 3.3.2에 의하여, $p \in S$이다. $p \in [x, z]$이기 때문에, $p \leq z$이다. $z \in \mathbb{R} \setminus S$이므로, $p \neq z$ 그래서 $p < z$이다.

이제 T 열린집합이고 $p \in T$이다. 따라서 어떤 $a, b \in \mathbb{R}$가 존재하여 $a < b$이고 $p \in (a, b) \subseteq T$이다. $p < t < \min(b, z)$인 t를 선택하자. 여기서 $\min(b, z)$는 b와 z의 최솟값을 나타낸다. 따라서 $t \in T$ 그리고 $t \in [p, z]$이다. 그러므로 $t \in T \cap [x, z] = S$이다. 이것은 모순이다. 왜냐하면 $t > p$ 그리고 p는 S의 상한이기 때문이다. 그러므로 우리의 가정은 잘못이고 결론적으로 $T = \mathbb{R}$ 또는 $T = \emptyset$이다. □

3.3.4 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 만약 X의 유일한 열린닫힌집합이 X와 $\emptyset$ 뿐이면 X를 **연결(connected)공간**이라 부른다.

그러므로 명제 3.3.3을 다시 서술하여 다음을 얻는다:

3.3.5 명제. 위상공간 $\mathbb{R}$은 연결공간이다. □

3.3.6 보기. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 두 점 이상을 갖는 이산위상공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 연결이 아니다. 왜냐하면 각각의 단집합이 열린닫힌 집합이기 때문이다. □

3.3.7 보기. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 비이산위상공간이면, 그것은 연결이다, 왜냐하면 유일한 열린닫힌 집합은 X와 $\emptyset$ 뿐이기 때문이다. (사실상 유일한 열린집합은 X와 $\emptyset$ 뿐이다.) □

3.3.8 보기. 만약 $X = \{a, b, c, d, e\}$ 그리고

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

이면 $(X, \mathcal{T})$는 연결이 아니다. 왜냐하면 $\{b, c, d, e\}$가 열린닫힌집합이기 때문이다. □

3.3.9 주목. 정의 3.3.4로부터 다음을 얻는다. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 연결공간이 아닐 (즉, **비연결(disconnected)**)일 필요충분조건은 공집합이 아닌 열린집합 A와 B가 존재하여 $A \cap B = \emptyset$ 그리고 $A \cup B = X$이다.[1] (연습문제 3.3 #3을 보시오.)

$\mathbb{R}^2$ (그리고 사실상, 모든 $n \geq 1$에 대하여, $\mathbb{R}^n$)은 연결공간이라고 적어 두고 이 장의 결론을 맺는다. 그러나 증명은 5장으로 미룬다.

연결성은 더 말할 나위 없이 매우 중요한 성질이다.

연습문제 3.3

1. S를 실수집합 그리고 $T = \{x : -x \in S\}$라 하자.

   (a) 실수 a가 S의 하한일 필요충분조건은 $-a$가 T의 상한임을 증명하시오.

   (b) (a)와 최소상계공리를 이용하여 공집합이 아닌 실수의 모든 집합이 아래로 유계이면 그 집합은 최대하계를 가짐을 증명하시오.

2. 다음의 각각의 실수집합에 대하여 최대원과 최소상계를 찾으시오. (존재할 경우)

   (i) $S = \mathbb{R}$.
   (ii) $S = \mathbb{Z} =$ 모든 정수들의 집합.
   (iii) $S = [9, 10)$.
   (iv) S는 $1 - \frac{3}{n^2}$ 형태의 모든 실수들의 집합, 여기서 n은 양의 정수이다.
   (v) $S = (-\infty, 3]$.

3. $(X, \mathcal{T})$를 임의의 위상공간이라 하자. $(X, \mathcal{T})$가 연결이 아닐 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$의 공집합이 아닌 서로소인 열린 부분집합 A와 B가 존재하여 $A \cup B = X$임을 증명하시오.

4. 보기 1.1.2의 위상공간 $(X, \mathcal{T})$는 연결공간인가?

5. $(X, \mathcal{T})$를 여유한위상을 갖는 무한집합이라 하자. $(X, \mathcal{T})$는 연결공간인가?

6. $(X, \mathcal{T})$를 여가산위상을 갖는 무한집합이라 하자. $(X, \mathcal{T})$는 연결공간인가?

7. 연습문제 1.1 #9의 어느 위상공간이 연결인가?

[1] 대부분의 교재는 이 성질을 이용하여 연결성을 정의한다.

3.4 후기

이 장에서 우리는 극한점의 개념을 소개했고 하나의 집합이 닫힌집합일 필요충분조건은 그 집합의 모든 극한점을 포함하는 것임을 보였다. 명제 3.1.8은 임의의 집합 A는 자신을 포함하는 가장 작은 닫힌집합 $\overline{A}$을 갖는 것을 말한다. 집합 $\overline{A}$는 A의 폐포라고 불렀다.

위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 A에 대하여, 만약 $\overline{A} = X$이면, A는 X에서 조밀하다고 말한다. $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$에서 조밀하고 모든 무리수들의 집합 $\mathbb{P}$도 $\mathbb{R}$에서 조밀하다. 우리는 점의 근방의 개념과 연결위상공간의 개념을 소개했다. 하나의 중요한 결과, 즉, $\mathbb{R}$의 연결성을 증명했다. 나중에 연결성에 관하여 더 많은 것을 소개한다.

연습문제에서 집합의 내부의 개념을 소개했고, 이 개념은 집합의 폐포 개념과 상호보완적이다.

제 4 장

위상동형함수

소개

수학의 모든 분야에서 두 개의 구조가 언제 동치인지를 알아보는 것은 아주 중요하다. 예를 들어, 집합론에 관해서는, 하나의 집합에서 다른 집합 위로의 전단사 함수가 존재하면 두 집합이 서로 동치이다. 하나의 군에서 다른 군 위로의 전단사인 군 준동형함수가 존재하면 두 개의 군이 동치인데, 동형이라고 알려져 있다. 하나의 위상공간에서 다른 위상공간 위로의 위상동형함수가 존재하면 두 위상공간은 동치인데, 위상동형이라고 알려져 있다.

이 장을 공부하기 전에 부록 1을 공부해야 하고 다음의 비디오를 보아야 한다:
"Topology Without Tears - Video 1 - Pure Mathematics"
는 YouTube
http://youtu.be/veSbFJFjbzU와 중국 사이트 Youku
http://tinyurl.com/mulg9fv에 있다.
"Topology Without Tears - Video 2a & 2b - Infinite Set Theory"는 YouTube
http://youtu.be/9h83ZJeiecg와 http://youtu.be/QPSRB4Fhzko
그리고 중국 사이트 Youku
http://tinyurl.com/m4dlzhh와 http://tinyurl.com/kf9lp8e
에 있다.
그리고 "Topology Without Tears - Video 4a & 4b &4c &4d - Writing Proofs in Mathematics"는 YouTube에 있다.

YouTube와 Youku의 비디오 관련 링크는
http://www.topologywithouttears.net에서 찾아 볼 수 있다.

4.1 부분공간

4.1.1 정의. Y를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 공집합이 아닌 부분집합이라 하자. Y의 부분집합들의 집합족 $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$는 Y 위의 하나의 위상이다. 이 위상을 **부분위상(subspace topology)** (또는 **상대위상(relative topology)** 또는 **유도위상(induced topology)** 또는 **$\mathcal{T}$에 의하여 Y 위에 유도된 위상**)이라고 부른다. 위상공간 $(Y, \mathcal{T}_Y)$를 $(X, \mathcal{T})$의 **부분공간(subspace)**이라 한다.

물론 $\mathcal{T}_Y$가 실제로 Y 위의 하나의 위상임을 확인해야 한다.

4.1.2 보기. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\},$$

그리고 $Y = \{b, c, e\}$라 하자. 그러면 Y 위의 부분위상은

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}$$

이다. □

4.1.3 보기. $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

그리고 $Y = \{a, d, e\}$라 하자. 그러면 Y 위의 유도위상은

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$$

이다. □

4.1.4 보기. $\mathcal{B}$를 X 위의 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저라 하고 Y를 X의 부분집합이라 하자. 이때 집합족 $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$는 Y 위의 부분위상 $\mathcal{T}_Y$에 대한 기저임을 보이는 것은 어렵지 않다. [연습문제: 이것을 입증하시오.]

따라서 $\mathbb{R}$의 부분집합 $(1, 2)$를 생각해 보자. $(1, 2)$ 위에 유도된 위상에 대한 기저는 집합족 $\{(a, b) \cap (1, 2) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$이다; 즉, $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ 1 \le a < b \le 2\}$는 $(1, 2)$ 위에 유도된 위상에 대한 기저이다. □

4.1.5 보기. $\mathbb{R}$의 부분집합 $[1,2]$를 생각해 보자. $[1,2]$ 위의 부분위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저는

$$\{(a,b)\cap[1,2] : a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$$

이다. 즉,

$$\{(a,b) : 1\le a<b\le 2\}\cup\{[1,b) : 1<b\le 2\}\cup\{(a,2] : 1\le a<2\}\cup\{[1,2]\}$$

는 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다.

그러나 여기서 우리는 약간 놀라운 일이 생기는 것을 본다; 예를 들어 $[1,1\frac{1}{2})$는 $\mathbb{R}$에서는 분명히 열린집합이 아니다, 그러나 $[1,1\frac{1}{2})=(0,1\frac{1}{2})\cap[1,2]$는 부분공간 $[1,2]$에서는 열린집합이다.

또한 $(1,2]$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합은 아니지만 $[1,2]$에서 열린집합이다. 더욱이 $[1,2]$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합이 아니지만, $[1,2]$에서 열린집합이다.

따라서 하나의 집합이 열린집합이라고 말할 때마다 어느 공간 또는 어느 위상에서 그 집합이 열린집합인지를 분명히 말해야 한다. □

4.1.6 보기. $\mathbb{Z}$를 정수로 이루어진 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하자. $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 의하여 유도된 $\mathbb{Z}$ 위의 위상은 이산위상임을 보이시오.

증명.

> $\mathbb{Z}$ 위의 유도된 위상 $\tau_{\mathbb{Z}}$가 이산위상임을 보이기 위해서는 명제 1.1.9에 의하여, $\mathbb{Z}$의 모든 단집합이 $\tau_{\mathbb{Z}}$에서 열린집합임을 보이면 충분하다; 즉, 만약 $n\in\mathbb{Z}$이면 $\{n\}\in\tau_{\mathbb{Z}}$이다.

$n\in\mathbb{Z}$라 하자. 그러면 $\{n\}=(n-1,n+1)\cap\mathbb{Z}$이다. 그러나 $(n-1,n+1)$은 $\mathbb{R}$에서 열린집합이다. 따라서 $\{n\}$은 $\mathbb{Z}$ 위에 유도된 위상에 관하여 열린집합이다. 그러므로 $\mathbb{Z}$의 모든 단집합은 $\mathbb{Z}$ 위에 유도된 위상에 관하여 열린집합이다. 따라서 유도위상은 이산위상이다. □

표기.

$\mathbb{Q}$ = 유리수집합,

$\mathbb{Z}$ = 정수집합,

$\mathbb{N}$ = 자연수집합,

$\mathbb{P}$ = 무리수집합,

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), 또는 $[a, \infty)$

위의 위상에 관하여 특별한 언급이 없을 때는 $\mathbb{R}$의 부분공간으로서 유도된 위상을 말한다. (때로는 이러한 집합 위에 유도된 위상을 "**보통위상(usual topology)**"이라고 부른다.)

연습문제 4.1

1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ 그리고 $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$라 하자. $Y = \{a, c, e\}$ 위에 유도된 위상 $\mathcal{T}_Y$와 $Z = \{b, c, d, e\}$ 위에 유도된 위상 $\mathcal{T}_Z$의 원소를 모두 나열하시오.

2. $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 의하여 양의 정수 집합 $\mathbb{N}$ 위에 유도된 위상을 서술하시오.

3. 아래의 각각의 집합 위의 보통위상에 대한 기저를 적으시오:
   (i) $[a, b)$, 여기서 $a < b$;
   (ii) $(a, b]$, 여기서 $a < b$;
   (iii) $(-\infty, a]$;
   (iv) $(-\infty, a)$;
   (v) (a, ∞);
   (vi) $[a, \infty)$.
   [힌트: 보기 4.1.4와 4.1.5를 보시오.]

4. $A \subseteq B \subseteq X$라 하고 X는 위상 $\mathcal{T}$를 갖는다고 하자. $\mathcal{T}_B$를 B 위의 부분위상이라 하자. 더욱이 $\mathcal{T}_1$을 $\mathcal{T}$에 의하여 A 위에 유도된 위상이라 하고, $\mathcal{T}_2$를 $\mathcal{T}_B$에 의하여 A 위에 유도된 위상이라 하자. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$임을 증명하시오. (따라서 **부분공간의 부분공간은 부분공간이다.**)

5. $(Y, \mathcal{T}_Y)$를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. Y의 부분집합 Z가 $(Y, \mathcal{T}_Y)$에서 닫힌집합일 필요충분조건은 $Z = A \cap Y$임을 보이시오. 여기서 A는 $(X, \mathcal{T})$의 닫힌부분집합이다.

6. 이산공간의 모든 부분공간은 이산공간임을 보이시오.

7. 비이산공간의 모든 부분공간은 비이산공간임을 보이시오.

8. $\mathbb{R}$의 부분공간 $[0,1] \cup [3,4]$은 적어도 4개의 열린닫힌 부분집합을 가짐을 보이시오. 정확하게 몇 개의 열린닫힌집합을 가지고 있는가?

9. 연결공간의 모든 부분공간은 연결공간이라는 것은 참인가?

10. $(Y, \mathcal{T}_Y)$를 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$일 필요충분조건은 $Y \in \mathcal{T}$임을 보이시오.

    [힌트: $Y \in \mathcal{T}_Y$를 기억하시오.]

11. A와 B를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 연결부분공간이라 하자. 만약 $A \cap B \neq \emptyset$이면, 부분공간 $A \cup B$는 연결임을 보이시오.

12. $(Y, \mathcal{T}_1)$을 T_1-공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. $(Y, \mathcal{T}_1)$ 역시 T_1-공간임을 보이시오.

13. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 서로 다른 두 점 a, b에 대하여 어떤 열린집합 U와 V가 존재하여 $a \in U$, $b \in V$, 그리고 $U \cap V = \emptyset$를 만족하면, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **Hausdorff** (또는 ***T_2*-공간**)이라 부른다.

    (i) $\mathbb{R}$은 Hausdorff임을 보이시오.
    (ii) 모든 이산공간은 Hausdorff임을 보이시오.
    (iii) 임의의 T_2-공간은 역시 T_1-공간임을 보이시오.
    (iv) 여유한 위상을 갖는 $\mathbb{Z}$는 T_1-공간이지만 T_2-공간은 아님을 보이시오.
    (v) T_2-공간의 임의의 부분공간은 T_2-공간임을 보이시오.
    (vi) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 문공간(door space) (연습문제 1.3 #9를 보시오)이면 적어도 한 점 $x \in X$는 극한점이고, 만약 한 점 $y \in X$가 극한점이 아니면 단집합 $\{y\}$는 열린집합임을 증명하시오.

14. $(Y, \mathcal{T}_1)$를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 제2가산공리를 만족하면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 역시 제2가산공리를 만족함을 보이시오.

15. a 와 b가 $\mathbb{R}$의 원소이고 $a < b$라 하자. $[a, b]$는 연결임을 증명하시오.

    [힌트: 명제 3.3.3의 명제와 증명에 있는 모든 $\mathbb{R}$을 $[a, b]$로 바꾸시오.]

16. $\mathbb{Q}$를 보통위상을 갖는 유리수집합 그리고 $\mathbb{P}$를 보통위상을 갖는 무리수집합이라 하자.

(i) $\mathbb{Q}$와 $\mathbb{P}$는 이산위상이 아님을 증명하시오.

(ii) $\mathbb{Q}$ 또는 $\mathbb{P}$가 연결공간인가?

(iii) $\mathbb{Q}$ 또는 $\mathbb{P}$가 Hausdorff 공간인가?

(iv) $\mathbb{Q}$ 또는 $\mathbb{P}$가 여유한위상을 갖는가?

17. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 닫힌집합 A와 임의의 점 $x \in X \setminus A$에 대하여, 어떤 열린집합 U와 V가 존재하여 $x \in U$, $A \subseteq V$, 그리고 $U \cap V = \emptyset$를 만족하면, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **정칙공간 (regular space)**이라 부른다. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 정칙이고 T_1-공간이면, **T_3-공간**이라고 부른다. 다음 명제를 증명하시오.

(i) 정칙공간의 모든 부분공간은 정칙이다.

(ii) 위상공간 $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$, 그리고 $\mathbb{R}^2$은 정칙공간이다.

(iii) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 정칙이고 T_1-공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 T_2-공간이다.

(iv) Sorgenfrey 직선은 정칙공간이다.

(v)* X는 실수집합 $\mathbb{R}$이고, $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$라 하자. 집합 $C \subseteq \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에서 닫힌집합 A와 S의 부분집합 T에 대하여 $C = A \cup T$일 때, C를 닫힌집합이라고 정의하자. 이러한 닫힌집합의 여집합은 $\mathbb{R}$ 위의 하나의 위상 $\mathcal{T}$를 이루고, 이 위상은 Hausdorff이지만 정칙이 아니다.

4.2 위상동형함수

이제 동치인 위상공간의 개념으로 돌아가자. 우리는 하나의 예제를 생각하면서 시작한다:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

그리고

$$\mathcal{T}_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

직관적인 의미에서 $(X, \mathcal{T})$는 $(Y, \mathcal{T}_1)$에 "동치"라는 것은 분명하다. $f(a) = g$, $f(b) = h$, $f(c) = i$, $f(d) = j$, 그리고 $f(e) = k$에 의해 정의된 함수 $f\colon X \to Y$는 위의 두 위상공간이 동치임을 설명해준다. 우리는 이제 이것을 공식화한다.

4.2.1 정의. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$를 위상공간이라 하자. 다음 성질을 만족하는 함수 $f : X \to Y$가 존재하면 X와 Y는 **위상동형(homeomorphic)**이라고 한다:

(i) f는 단사 (즉, $f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$이다),

(ii) f는 전사 (즉, 임의의 $y \in Y$에 대하여 $x \in X$가 존재하여 $f(x) = y$이다),

(iii) 각각의 $U \in \mathcal{T}_1$에 대하여, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, 그리고

(iv) 각각의 $V \in \mathcal{T}$에 대하여, $f(V) \in \mathcal{T}_1$이다.

더욱이, 함수 f를 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$ 사이의 **위상동형함수(homeomorphism)**라고 부르고 $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$로 나타낸다. □

"$\cong$"는 동치관계임을 보이고 이것을 이용하여 모든 열린구간 (a, b)는 서로 동치임을 보일 것이다. 첫 번째 단계로, 보기 4.2.2는 "$\cong$"는 추이적 관계임을 보여준다.

4.2.2 보기. $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}_1)$ 그리고 $(Z,\mathcal{T}_2)$를 위상공간이라 하자. 만약 $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ 그리고 $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$이면, $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$임을 증명하시오.

증명.

$(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$가 주어졌다; 즉, 위상동형함수 $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$가 존재한다. 또한 $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$가 주어졌다; 즉, 위상동형함수 $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$가 존재한다.

우리는 $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$가 성립함을 보여야 한다; 즉, 위상동형함수 $h : (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_2)$를 찾아야 할 필요가 있다. 합성함수 $g \circ f : X \to Z$가 우리가 원하는 위상동형함수임을 보일 것이다.

$(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ 그리고 $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$이므로, 위상동형함수 $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$와 $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$가 존재한다. 합성함수 $g \circ f : X \to Z$를 생각하자. [그러므로 모든 $x \in X$에 대하여 $g \circ f(x) = g(f(x))$이다.] $g \circ f$가 전단사임을 입증하는 것은 쉬운 일이다. 이제 $U \in \mathcal{T}_2$라 하자. 그러면, g가 위상동형함수이므로 $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$이다. f가 위상동형함수임을 이용하여 $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$을 얻는다. 그러나 $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$이다. 따라서 $g \circ f$는 정의 4.2.1의 성질 (iii)을 만족한다. 다음으로 $V \in \mathcal{T}$라 하자. 그러면 $f(V) \in \mathcal{T}_1$이다. 따라서 $g(f(V)) \in \mathcal{T}_2$ 즉, $g \circ f(V) \in \mathcal{T}_2$이다. 그리고 $g \circ f$는 정의 4.2.1의 성질 (iv)를 만족한다는 것을 안다. 그러므로 $g \circ f$는 위상동형함수이다. □

4.2.3 주목. 보기 4.2.2는 "$\cong$"가 추이적 관계임을 보여준다. 실제로, 그것이 동치관계임은 쉽게 입증된다; 즉,

(i) $(X,\mathcal{T}) \cong (X,\mathcal{T})$이다 (반사적);

(ii) $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$이면 $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (X,\mathcal{T})$이다 (대칭적);

[만약 $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$가 위상동형함수이면, 그 역함수 $f^{-1} : (Y,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T})$도 역시 위상동형함수임을 관찰하자.]

(iii) $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ 그리고 $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$이면 $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$이다 (추이적). □

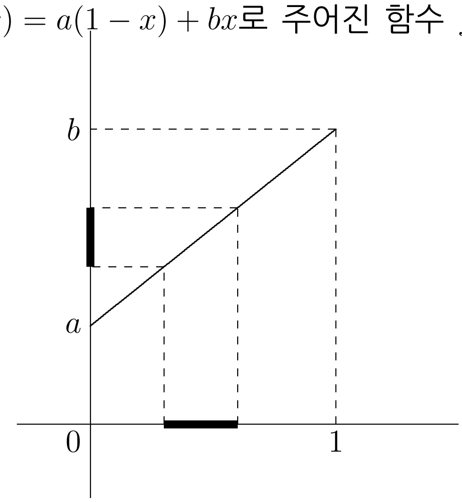
다음 세 개의 보기는 $\mathbb{R}$의 모든 열린구간들은 위상동형임을 보여준다. 길이는 분명히 위상적 성질이 아니다. 특히, 길이가 유한인 열린구간 $(0,1)$이 길이가 무한인 열린구간 $(-\infty,1)$과 동치이다. 실제로 모든 열린구간이 $\mathbb{R}$에 동치이다.

4.2.4 보기. 공집합이 아닌 모든 두 열린구간 (a,b)와 (c,d)는 위상동형임을 증명하시오.

증명 개요.

주목 4.2.3에 의하여 (a,b)는 $(0,1)$에 위상동형이고 (c,d)는 $(0,1)$에 위상동형임을 보이면 충분하다. 그러나 a와 b가 임의의 실수이므로 ($a<b$ 제외), (a,b)가 $(0,1)$과 위상동형이면 (c,d)도 역시 $(0,1)$과 위상동형이다. (a,b)가 $(0,1)$과 위상동형임을 보이기 위해서는 위상동형함수 $f:(0,1)\to(a,b)$를 찾으면 충분하다.

$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$라 하고, $f(x)=a(1-x)+bx$로 주어진 함수 $f:(0,1)\to(a,b)$를 생각하자.



분명히 $f:(0,1)\to(a,b)$는 전단사함수이다. 또한 그림으로부터 $(0,1)$ 안의 임의의 열린구간의 f에 의한 상은 (a,b) 안의 열린구간임은 분명하다 즉,

$$f((0,1) \text{ 안의 열린구간}) = (a,b) \text{ 안의 열린구간}$$

이다. $(0,1)$ 안의 모든 열린집합은 $(0,1)$ 안의 열린구간들의 합집합이다. 그러므로

$$\begin{aligned} f((0,1) \text{ 안의 열린집합}) &= f((0,1) \text{ 안의 열린구간들의 합집합}) \\ &= (a,b) \text{ 안의 열린구간들의 합집합} \\ &= (a,b) \text{ 안의 열린집합} \end{aligned}$$

이다. 따라서 정의 4.2.1의 조건 (iv)가 만족되었다. 비슷하게, 우리는 $f^{-1}((a,b)$ 안의 열린집합)는 $(0,1)$에서 열린집합임을 알 수 있다. 그러므로 정의 4.2.1의 조건 (iii)도 역시 만족되었다.

[연습문제: 위의 증명을 주의깊게 서술하시오.]

그러므로 f는 위상동형함수이고 모든 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$에 대하여 $(0,1)\cong(a,b)$이다.

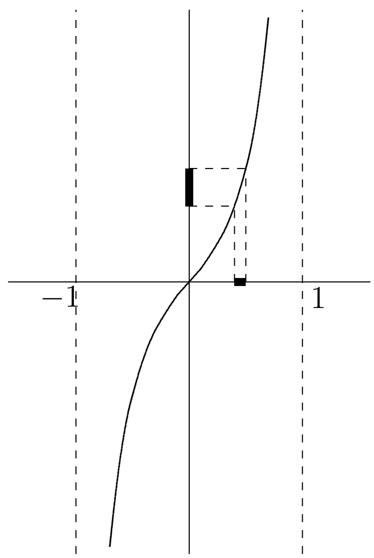
위 사실로부터 우리가 원했던 $(a,b)\cong(c,d)$가 바로 유도된다. □

4.2.5 보기. 위상공간 $\mathbb{R}$은 보통위상을 갖는 열린구간 $(-1,1)$과 위상동형임을 증명하시오.

증명 개요. 함수 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\frac{x}{1-\mid x\mid}$$

라 정의하자. f는 전단사임은 쉽게 증명이 되고, 보기 4.2.4처럼 그림을 이용한 논증에 의하여 f는 위상동형함수임을 안다.



[연습문제: f는 위상동형함수임을 증명하시오.] □

4.2.6 보기. $a<b$인 모든 열린구간 (a,b)는 $\mathbb{R}$과 위상동형임을 증명하시오.

증명. 이것은 보기 4.2.5와 4.2.4 그리고 주목 4.2.3으로부터 곧바로 유도된다. □

4.2.7 주목. 비슷한 방법으로 $a<b$, $c<d$인 임의의 두 구간 $[a,b]$와 $[c,d]$는 위상동형임을 보일 수 있다. □

연습문제 4.2

1. (i) $a, b, c,$ 그리고 d가 실수이고 $a < b$, $c < d$이면, $[a, b] \cong [c, d]$임을 증명하시오.

   (ii) a와 b가 실수이면,
$$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a, \infty) \cong [b, \infty)$$
   임을 증명하시오.

   (iii) c, d, e, 그리고 f가 임의의 실수이고 $c < d$, $e < f$이면,
$$[c, d) \cong [e, f) \cong (c, d] \cong (e, f]$$
   임을 증명하시오.

   (iv) $a < b$인 임의의 실수 a와 b에 대하여,
$$[0, 1) \cong (-\infty, a] \cong [a, \infty) \cong [a, b) \cong (a, b]$$
   임을 유도하시오.

2. $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$임을 증명하시오.

3. m과 c를 영이 아닌 실수라 하고 $X = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$는 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이라 하자. X는 $\mathbb{R}$과 위상동형임을 증명하시오.

4. (i) X_1 그리고 X_2를 다음과 같이 정의된 $\mathbb{R}^2$의 닫힌 직사각형 영역이라 하자:

$$X_1 = \{\langle x, y\rangle : |x| \le a_1 \text{ 그리고 } |y| \le b_1\}$$

그리고 $$X_2 = \{\langle x, y\rangle : |x| \le a_2 \text{ 그리고 } |y| \le b_2\}$$

여기서, a_1, b_1, a_2와 b_2는 양의 실수이다. 만약 X_1과 X_2가 $\mathbb{R}^2$로부터 각각 유도된 부분위상 $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$를 가지면, $X_1 \cong X_2$임을 보이시오.

(ii) D_1과 D_2를 다음과 같이 정의된 $\mathbb{R}^2$에서 닫힌 원판이라 하자:

$$D_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \le c_1\}$$

그리고 $$D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \le c_2\}$$

여기서, c_1과 c_2는 양의 실수이다. 위상공간 $D_1 \cong D_2$임을 증명하시오. 여기서, D_1과 D_2는 부분위상을 갖는다.

(iii) $X_1 \cong D_1$임을 증명하시오.

5. $X_1 = (0,1) \cup (3,4)$ 그리고 $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$로 주어진 X_1과 X_2를 $\mathbb{R}$의 부분공간이라 하자. $X_1 \cong X_2$인가? (여러분의 답을 입증하시오.)

6. (**위상동형군(Group of Homeomorphisms)**) $(X, \mathcal{T})$를 임의의 위상공간 그리고 G를 X에서 자기자신으로의 모든 위상동형함수들의 집합이라 하자.

(i) G는 함수의 합성 연산하에서 군임을 보이시오.

(ii) $X = [0,1]$이면, G는 무한집합임을 보이시오.

(iii) $X = [0,1]$이면, G는 아벨(교환)군인가?

7. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 위상동형인 위상공간이라 하자. 다음을 증명하시오.

(i) $(X, \mathcal{T})$가 T_0-공간이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 T_0-공간이다.

(ii) $(X, \mathcal{T})$가 T_1-공간이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 T_1-공간이다.

(iii) $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 공간이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 Hausdorff 공간이다.

(iv) $(X, \mathcal{T})$가 제2가산공리를 만족하면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 제2가산공리를 만족한다.

(v) $(X, \mathcal{T})$가 가분공간이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 가분공간이다.

8.* $(X, \mathcal{T})$를 이산위상공간이라 하자. $(X, \mathcal{T})$가 $\mathbb{R}$의 한 부분공간과 위상동형일 필요충분조건은 X가 가산집합임을 증명하시오.

4.3 비동형 위상공간

두 위상공간이 위상동형임을 증명하기 위해서는 그들 사이에 하나의 위상동형함수를 찾아야 한다. 그러나, 두 위상공간이 위상동형이 아니다라는 것을 증명하기 위해서는 그들 사이에 어느 위상동형함수도 존재하지 않음을 보여야 하는데 그것은 좀 더 어렵다. 다음 보기는 이것을 보이기 위한 방법이 될 수도 있는 실마리를 제공한다.

4.3.1 보기. $[0,2]$는 $\mathbb{R}$의 부분공간 $[0,1] \cup [2,3]$과 위상동형이 아님을 증명하시오.

증명. $(X, \mathcal{T}) = [0,2]$ 그리고 $(Y, \mathcal{T}_1) = [0,1] \cup [2,3]$라 하자. 그러면

$$[0,1] = [0,1] \cap Y \Rightarrow [0,1]\text{는 } (Y, \mathcal{T}_1)\text{에서 닫힌집합이다}$$

그리고

$$[0,1] = (-1, 1\frac{1}{2}) \cap Y \Rightarrow [0,1]\text{는 } (Y, \mathcal{T}_1)\text{에서 열린집합이다.}$$

그러므로 Y는 연결이 아니다. 왜냐하면 $[0,1]$이 공집합이 아닌 Y의 진부분집합으로서 열린닫힌집합이기 때문이다.

$(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$라고 $\boxed{\text{가정하자}}$. 그러면 위상동형함수 $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 존재한다. 따라서 $f^{-1}([0,1])$는 X의 열린닫힌 부분집합이다. 그러므로 X는 연결이 아니다. $[0,2] = X$는 연결공간이므로 이것은 거짓이다. (연습문제 4.1 #15를 보시오.) 그러므로 우리는 모순을 얻었다. 따라서 $(X, \mathcal{T}) \not\cong (Y, \mathcal{T}_1)$이다. □

이것으로부터 우리는 무엇을 배웠는가?

4.3.2 명제. 연결공간에 위상동형인 임의의 위상공간은 연결이다. □

명제 4.3.2는 두 위상공간이 위상동형이 아님을 보이기 위해서 시도하는 하나의 방법을 제공한다. 즉, 하나의 위상공간은 가지고 있지만 다른 위상공간은 가지고 있지 않은 "위상동형함수에 의하여 보존되는" 성질을 찾는 것이 그 방법이다.

연습문제들에서 "위상동형함수에 의하여 보존"되는 많은 성질을 접했다:

(i) T_0-공간;

(ii) T_1-공간;

(iii) T_2-공간 또는 Hausdorff 공간;

(iv) 정칙공간;

(v) T_3-공간;

(vi) 제2가산공간;

(vii) 가분공간. [연습문제 4.2 #7을 보시오.]

물론 다른 공간들도 있다:

(viii) 이산공간;

(ix) 비이산공간;

(x) 여유한위상;

(xi) 여가산위상.

따라서 연결성과 함께 위상동형함수에 의하여 보존되는 12개의 성질을 알고 있다. 물론 두 위상공간 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$에 대하여 X와 Y가 서로 다른 농도(cardinalities)를 가지거나 (예를 들어, X는 가산이고 Y는 비가산집합), 또는 $\mathcal{T}$와 $\mathcal{T}_1$이 서로 다른 농도를 가지면 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$는 위상동형이 될 수가 없다.

그럼에도 불구하고 특별한 문제를 접했을 때 우리가 필요로 하는 것을 갖지 않을 수도 있다. "$(0, 1)$는 $[0, 1]$와 위상동형이 아님을 보이시오" 또는 "$\mathbb{R}$은 $\mathbb{R}^2$와 위상동형이 아님을 보이시오"와 같은 예에서 볼 수 있다. 우리는 이러한 공간들이 간단히 위상동형이 아님을 어떻게 보이는지를 보게 될 것이다.

이것으로 이동하기 전에 다음 질문을 해결하자: $\mathbb{R}$의 어느 부분공간이 연결공간인가?

4.3.3 정의. $\mathbb{R}$의 부분집합 S가 다음 성질을 만족하면 **구간(interval)**이라고 불린다: 만약 $x \in S$, $z \in S$, 그리고 $y \in \mathbb{R}$에 대하여 $x < y < z$이면, $y \in S$이다.

4.3.4 주목. 다음을 주목하자:

(i) 각각의 단집합 $\{x\}$는 구간이다.

(ii) 모든 구간은 다음 형태 중의 하나이다: $\{a\}, [a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,\infty)$.

(iii) 보기 4.2.6, 주목 4.2.7, 그리고 연습문제 4.2 #1로부터 모든 구간들은 $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$, 또는 $\{0\}$ 중의 오직 하나와 위상동형이다. 연습문제 4.3 #1에서 더 강한 명제를 말할 수 있다.

4.3.5 명제. $\mathbb{R}$의 부분공간 S가 연결일 필요충분조건은 S가 구간이다.

증명. 모든 구간이 연결이라는 것은 명제 3.3.3의 증명에 있는 모든 $\mathbb{R}$을 구간으로 대치하여 우리가 보이고자 하는 연결성을 명제 3.3.3과 비슷한 방법으로 보일 수 있다.

역으로, S를 연결공간이라 하자. $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$, 그리고 $\boxed{y \notin S\text{라 가정하자}}$. 그러면 $(-\infty,y) \cap S = (-\infty,y] \cap S$는 S의 열린닫힌 부분집합이다. 따라서 S는 열린닫힌 부분집합을 가지고 있다. 즉, $(-\infty,y) \cap S$을 갖는다. S가 연결이 아님을 보이기 위해서는 이 열린닫힌 부분집합이 공집합이 아닌 진부분집합이라는 것을 입증해야 한다. S가 x를 포함하고 있으므로 공집합이 아니다. $z \in S$이지만 $z \notin (-\infty,y) \cap S$이므로 진부분집합이다. 따라서 S는 연결이 아니다. 이것은 모순이다. 그러므로 S는 구간이다. □

이제 우리는 "연결"이라는 이름에 대한 근거를 보게 된다. $[a,b]$, (a,b) 등과 같은 $\mathbb{R}$의 부분공간들은 연결이지만, "비연결" 조각들의 합집합으로 이루어진 부분공간 $X = [0,1] \cup [2,3] \cup [5,6]$은 연결이 아니다.

이제 $(0,1) \not\cong [0,1]$임을 보이는 문제로 돌아가자. 첫째로, 언뜻 보기에는 자명한 관찰을 표현해 보자.

4.3.6 주목. $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$을 위상동형함수라 하자. $a\in X$에 대하여, $X\setminus\{a\}$는 X의 부분공간으로 부분위상 $\mathcal{T}_2$를 갖는다고 하자. 또한 $Y\setminus\{f(a)\}$는 Y의 부분공간으로 부분위상 $\mathcal{T}_3$를 갖는다고 하자. 그러면 $(X\setminus\{a\},\mathcal{T}_2)$는 $(Y\setminus\{f(a)\},\mathcal{T}_3)$과 위상동형이다.

증명 개요. 함수 $g\colon X\setminus\{a\}\to Y\setminus\{f(a)\}$를 모든 $x\in X\setminus\{a\}$에 대하여 $g(x)=f(x)$로 정의하자. 그러면 g는 위상동형함수임이 쉽게 입증된다. (이 증명을 쓰시오.) □

이것의 직접적인 결과로 우리는 다음을 얻는다:

4.3.7 따름정리. 만약 a, b, c, 그리고 d가 실수이고, $a<b$ 그리고 $c<d$이면,

(i) $(a,b)\not\cong[c,d)$,

(ii) $(a,b)\not\cong[c,d]$, 그리고

(iii) $[a,b)\not\cong[c,d]$이다.

증명. (i) $(X,\mathcal{T})=[c,d)$ 그리고 $(Y,\mathcal{T}_1)=(a,b)$라 하자. $(X,\mathcal{T})\cong(Y,\mathcal{T}_1)$라 $\boxed{\text{가정하자}}$. 그러면 어떤 $y\in Y$가 존재하여 $X\setminus\{c\}\cong Y\setminus\{y\}$이다. 그러나 $X\setminus\{c\}=(c,d)$는 구간이므로 연결이다. 반면에 (a,b)로부터 어느 점을 제거하든 결과로 얻어지는 공간은 비연결이다. 따라서 명제 4.3.2에 의하여,

$$\text{각각의 } y\in Y\text{에 대하여 } X\setminus\{c\}\not\cong Y\setminus\{y\}\text{이다.}$$

이것은 모순이다. 그러므로 $[c,d)\not\cong(a,b)$이다.

(ii) $[c,d]\setminus\{c\}$는 연결이지만, 모든 $y\in(a,b)$에 대하여 $(a,b)\setminus\{y\}$는 비연결이다. 그러므로 $(a,b)\not\cong[c,d]$이다.

(iii) $[a,b)\cong[c,d]$라고 $\boxed{\text{가정하자}}$. 그러면 어떤 $y\in[a,b)$에 대하여 $[c,d]\setminus\{c\}\cong[a,b)\setminus\{y\}$이다. 그러므로 어떤 $z\in[a,b)\setminus\{y\}$에 대하여 $([c,d]\setminus\{c\})\setminus\{d\}\cong([a,b)\setminus\{y\})\setminus\{z\}$이다; 즉, $[a,b)$ 안에 있는 서로 다른 어떤 y와 z에 대하여 $(c,d)\cong[a,b)\setminus\{y,z\}$이다. 그러나 (c,d)는 연결이지만, $[a,b)$ 안에 있는 임의의 서로 다른 y와 z에 대하여 $[a,b)\setminus\{y,z\}$는 비연결이다. 따라서 우리는 모순을 얻는다. 그러므로 $[a,b)\not\cong[c,d]$이다. □

연습문제 4.3

1. 위로부터 모든 구간은 다음 공간들 중에 오직 하나와 위상동형임을 유도하시오:

$$\{0\}; \qquad (0,1); \qquad [0,1]; \qquad [0,1).$$

2. 명제 4.3.5로부터 두 점 이상을 갖는 $\mathbb{R}$의 가산 부분공간은 비연결임을 유도하시오. (특히, $\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Q}$는 비연결이다.)

3. X를 $\mathbb{R}^2$의 단위원이라 하자; 즉, $X = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$ 그리고 부분위상을 갖는다.

   (i) $X \setminus \{\langle 1, 0\rangle\}$은 열린구간 $(0,1)$에 위상동형임을 보이시오.

   (ii) $X \not\cong (0,1)$ 그리고 $X \not\cong [0,1]$임을 유도하시오.

   (iii) 모든 점 $a \in X$에 대하여, 부분공간 $X \setminus \{a\}$는 연결임을 관찰하여, $X \not\cong [0,1)$임을 보이시오.

   (iv) X는 어느 구간에도 위상동형이 아님을 유도하시오.

4. Y를 다음과 같이 주어진 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이라 하자:

$$Y = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-2)^2 + y^2 = 1\}.$$

   (i) Y는 위의 연습문제 3에 있는 위상공간 X와 위상동형인가?

   (ii) Y는 하나의 구간에 위상동형인가?

5. Z를 다음과 같이 주어진 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이라 하자:

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x-3/2)^2 + y^2 = 1\}.$$

   (i) Z는 어느 구간과도 위상동형이 아님을 보이고,

   (ii) Z는 위의 연습문제 3과 4에서 서술한 공간 X 또는 Y에 위상동형이 아님을 보이시오.

6. Sorgenfrey 직선은 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, 또는 이 두 공간의 어느 부분공간에도 위상동형이 아님을 증명하시오.

7. (i) 연습문제 1.1 #5 (i)의 위상공간은 연습문제 1.1 #9 (ii)의 위상공간과 위상동형이 아님을 증명하시오.

(ii)* 연습문제 1.1 #5에서, $(X, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T}_2)$인가?

(iii)* 연습문제 1.1 #9에서, $(X, \mathcal{T}_2) \cong (X, \mathcal{T}_9)$인가?

8. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자, 여기서 X는 무한집합이다. 다음의 각각의 명제를 증명하시오 (원래는 Ginsburg and Sands [128]에 의하여 증명됨).

(i)* $(X, \mathcal{T})$는 $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$에 위상동형인 부분공간을 갖는다, 여기서 $\mathcal{T}_1$은 비이산위상이거나 $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$은 T_0-공간이다.

(ii)** $(X, \mathcal{T})$를 T_1-공간이라 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$는 $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$에 위상동형인 부분공간을 갖는다, 여기서 $\mathcal{T}_2$는 여유한위상이거나 이산위상이다.

(iii) (ii)로부터 임의의 무한 Hausdorff 공간은 무한 이산부분공간을 포함함을 유도하시오. 그러므로 이산위상을 갖는 $\mathbb{N}$과 위상동형인 부분공간을 갖는다.

(iv)** $(X, \mathcal{T})$를 T_0-공간이지만 T_1-공간이 아니라고 하자. 그러면 위상공간 $(X, \mathcal{T})$는 $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_3)$에 위상동형인 부분공간을 갖는다, 여기서 $\mathcal{T}_3$은 $\mathbb{N}$, $\emptyset$, 그리고 모든 집합들 $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$로 이루어졌거나 $\mathcal{T}_3$은 $\mathbb{N}$, $\emptyset$, 그리고 모든 집합들 $\{n, n+1, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$로 이루어졌다.

(v) 위로부터 모든 무한위상공간은 $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_4)$에 위상동형인 부분공간을 가짐을 유도하시오, 여기서 $\mathcal{T}_4$는 비이산위상, 이산위상, 여유한위상, 또는 각각 **첫조각위상** 그리고 **끝조각위상**으로 알려진, (iv)에서 서술된 두 위상 중의 하나이다. 더욱이, $\mathbb{N}$ 위의 이러한 다섯 개의 위상 중 어느 두 개도 위상동형이 아니다.

9. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$를 위상공간이라 하자. 함수 $f : X \to Y$가 다음 조건을 만족하면 **국소위상동형함수(local homeomorphism)**라고 부른다: 각 점 $x \in X$에 대하여 x의 열린근방 U가 존재하여 $f(U)$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 어떤 열린 부분공간 V와 위상동형이다; 즉, 만약 $\mathcal{T}$에 의하여 U 위에 유도된 위상이 $\mathcal{T}_2$이고 $\mathcal{T}_1$에 의하여 $V = f(U)$ 위에 유도된 위상이 $\mathcal{T}_3$이면, f는 $(U, \mathcal{T}_2)$에서 $(V, \mathcal{T}_3)$ 위로의 위상동형함수이다. 만약 $(X, \mathcal{T})$에서 $(Y, \mathcal{T}_1)$으로 국소위상동형함수가 존재하면, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$는 $(Y, \mathcal{T}_1)$와 **국소적 위상동형(locally homeomorphic**이라고 말한다.

(i) 만약 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상동형인 위상공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 $(Y, \mathcal{T}_1)$에 국소위상동형임을 입증하시오.

(ii) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 열린 부분공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 $(Y, \mathcal{T}_1)$에 국소위상동형임을 증명하시오.

(iii)* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 국소위상동형함수이면, f는 $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린 부분집합을 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 열린 부분집합 위로 보냄을 증명하시오.

10. A를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 어떤 열린집합 $O \in (X, \mathcal{T})$가 존재하여 $O \subseteq A \subseteq \overline{O}$를 만족하면 A를 X의 **반열린(semi-open)집합**이라고 부른다. 다음을 입증하시오:

(i) 모든 열린집합은 반열린집합이다;

(ii) 닫힌집합은 반드시 반열린집합은 아니다;

(iii) 만약 A가 $\mathbb{R}$에서 단집합이 아닌 구간이면, A는 $\mathbb{R}$의 반열린 부분집합이다;

(iv) 만약 $\mathcal{T}$가 여유한위상, 이산위상 또는 비이산위상이면, 반열린집합은 바로 열린집합이다.

4.4 후기

옛 위상공간으로부터 새로운 위상공간을 창조하는 세 가지 중요한 방법이 있다: 부분공간, 곱공간, 그리고 상공간을 형성하는 것이다. 우리는 적절한 때에 세 가지 모두를 조사한다. 부분공간을 형성하는 것은 이 장에서 공부했다. 이것에 의하여 중요한 공간들 $\mathbb{Q}$, $[a, b]$, (a, b) 등이 소개되었다.

우리는 위상동형함수의 중심개념을 정의했다. "$\cong$"는 하나의 동치관계임을 주목했다. 하나의 성질이 위상동형함수에 의하여 보존이 되면 그 성질을 **위상적 성질(topological property)**이라고 부른다; 즉, 만약 $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ 그리고 $(X, \mathcal{T})$가 그 성질을 가지고 있으면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 역시 그 성질을 가지고 있다. 연결성은 위상적 성질임을 보였다. 따라서 연결공간과 위상동형인 모든 위상공간은 연결이다. (다른 많은 위상적 성질들이 확인되었다.) 우리는 $\mathbb{R}$에서 구간의 개념을 공식적으로 정의했고, 구간들만이 $\mathbb{R}$의 연결부분공간임을 보였다.

주어진 두 위상공간 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$에 대하여 그들이 위상동형인지 아닌지를 보이는 것은 흥미로운 일이다. $\mathbb{R}$의 모든 구간은 $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$, 그리고 $\{0\}$ 중의 오직 하나와 위상동형임을 증명했다. 다음 절에서 $\mathbb{R}$은 $\mathbb{R}^2$와 위상동형이 아님을 보인다. 더 어려운 문제는 $\mathbb{R}^2$가 $\mathbb{R}^3$와 위상동형이 아님을 보이는 것이다. 이것은 나중에 Jordan 곡선 정리에 의하여 증명이 될 것이다. 아직도 일류 중의 일류는 $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$일 필요충분조건은 $n = m$이라는 사실이다. 이것은 이 책에서 간단히 언급한 대수적 위상수학을 통해서 접근하는 것이 최선이다.

연습문제 4.2 #6에서 위상동형함수들의 군의 개념을 소개했는데 그 자체가 흥미롭고 중요한 주제이다.

제 5 장

연속함수

소개

순수수학의 대부분의 분야에서는 범주론에서 "객체"와 "화살표"라 불리우는 것을 공부한다. 선형대수학에서 객체는 벡터공간이고 화살표는 선형변환이다. 군론에서 객체는 군이고 화살표는 준동형사상이다, 반면에 집합론에서 객체는 집합이고 화살표는 함수이다. 위상에서 객체는 위상공간이다. 우리는 이제 화살표인 연속함수를 소개한다.

5.1 연속함수

물론 우리는 이미 $\mathbb{R}$로부터 $\mathbb{R}$로의 연속함수의 개념에 익숙하다.[1]

각각의 $a \in \mathbb{R}$와 각각의 양의 실수 ε에 대하여, 양의 실수 δ가 존재해서 $|\ x - a\ | < \delta$이 $|\ f(x) - f(a)\ | < \varepsilon$를 함의할 때, 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 **연속(continuous)**이라고 부른다.

이 정의를 "절댓값"이나 "뺄셈"이 없는 일반위상공간으로 일반화하는 방법은 전혀 명백하지 않다. 그래서 우리는 일반화에 더 적합한 연속의 다른 (동치인) 정의를 찾을 것이다.

다음은 쉽게 알 수 있다. **$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속일 필요충분조건은 다음과 같다: 각각의 $a \in \mathbb{R}$와 $\varepsilon > 0$에 따른 각 구간 $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$에 대하여, $\delta > 0$가 존재해서 모든 $x \in (a - \delta\,, a + \delta)$에 대하여 $f(x) \in (f(a) - \varepsilon\,, f(a) + \varepsilon)$를 만족한다.**

이 정의는 "절댓값" 개념을 포함하지 않지만 여전히 "뺄셈"을 포함하고 있다. 다음 보조정리는 뺄셈을 피하는 방법을 보여준다.

[1] 이 절의 앞부분은 여러분이 실해석학의 어떤 지식, 특히 연속의 ε–δ 정의를 알고 있다고 가정한다. 그렇지 않다면, 정의 5.1.3으로 바로 가기를 바란다. 이 분야의 지식에 관한 기억을 새롭게 하고 싶다면 G.H. Hardy의 책 "A course of pure mathematics"을 볼 수도 있다. 이것은 Project Gutenberg로부터 http://www.gutenberg.org/ebooks/38769에서 무료로 다운받을 수 있다.

5.1.1 보조정리. f가 $\mathbb{R}$을 자기자신으로 보내는 함수라 하자. 그러면 f가 연속일 필요충분조건은 다음과 같다: 각각의 $a \in \mathbb{R}$와 $f(a)$를 포함하는 각각의 열린집합 U에 대하여, a를 포함하는 열린집합 V가 존재해서 $f(V) \subseteq U$를 만족한다.

증명. f가 연속이라고 가정하자. $a \in \mathbb{R}$이고 U가 $f(a)$를 포함하는 열린집합이라고 하자. 그러면 실수 c와 d가 존재해서 $f(a) \in (c,d) \subseteq U$을 만족한다. 두 수 $d - f(a)$와 $f(a) - c$ 중 더 작은 것을 ε이라 놓자. 그러면

$$(f(a) - \varepsilon\,,\ f(a) + \varepsilon) \subseteq U$$

이다. 함수 f가 연속이기 때문에, $\delta > 0$가 존재해서 모든 $x \in (a - \delta\,,\ a + \delta)$에 대하여

$$f(x) \in (f(a) - \varepsilon\,,\ f(a) + \varepsilon)$$

이다. V를 열린집합 $(a - \delta\,,\ a + \delta)$이라고 하자. 그러면 $a \in V$이고 $f(V) \subseteq U$이다.

역으로 각각의 $a \in \mathbb{R}$와 $f(a)$를 포함하는 각각의 열린집합 U에 대하여 a를 포함하는 열린집합 V가 존재해서 $f(V) \subseteq U$를 만족한다고 가정하자. 우리는 f가 연속임을 증명해야 한다. $a \in \mathbb{R}$와 ε이 양의 실수라고 하고 $U = (f(a) - \varepsilon\,,\ f(a) + \varepsilon)$라 놓자. 그러면 U는 $f(a)$를 포함하는 열린집합이다. 그러므로 a를 포함하는 열린집합 V가 존재해서 $f(V) \subseteq U$를 만족한다. V가 a를 포함하는 열린집합이기 때문에, 실수 c와 d가 존재해서 $a \in (c,d) \subseteq V$를 만족한다. 두 수 $d - a$와 $a - c$ 중 더 작은 것을 δ로 놓자. 그러면 $(a - \delta\,,\ a + \delta) \subseteq V$이다. 따라서 모든 $x \in (a - \delta\,,\ a + \delta)$에 대하여 $f(x) \in f(V) \subseteq U$이다. 그러므로 f는 연속이다. □

연속을 정의하기 위해 보조정리 5.1.1에 묘사된 성질을 사용할 수 있다. 하지만 다음 보조정리는 더 명쾌한 정의를 만들 수 있도록 해준다.

5.1.2 보조정리. f가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$로부터 위상공간 $(Y, \mathcal{T}')$로의 함수라 하자. 그러면 다음 두 조건은 동치이다:

(i) 각각의 $U \in \mathcal{T}'$에 대하여, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$,

(ii) 각각의 $a \in X$와 $f(a) \in U$인 각각의 $U \in \mathcal{T}'$에 대하여, $a \in V$와 $f(V) \subseteq U$를 만족하는 $V \in \mathcal{T}$가 존재한다.

증명. 조건 (i)을 만족한다고 가정하자. $a \in X$이고 $U \in \mathcal{T}'$에 대하여 $f(a) \in U$이라 하자. 그러면 $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$이다. $V = f^{-1}(U)$로 놓자. 그러면 $a \in V$, $V \in \mathcal{T}$, 그리고 $f(V) \subseteq U$이다. 따라서 조건 (ii)를 만족한다.

역으로 조건 (ii)를 만족한다고 가정하자. $U \in \mathcal{T}'$라 하자. $f^{-1}(U) = \emptyset$이면 분명히 $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$이다. $f^{-1}(U) \neq \emptyset$이면, $a \in f^{-1}(U)$이라고 하자. 그러면 $f(a) \in U$이다. 그러므로 $a \in V$와 $f(V) \subseteq U$를 만족하는 $V \in \mathcal{T}$가 존재한다. 따라서 각각의 $a \in f^{-1}(U)$에 대하여 $a \in V \subseteq f^{-1}(U)$를 만족하는 $V \in \mathcal{T}$가 존재한다. 따름정리 3.2.9에 의해 이것은 $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$를 함의한다. 따라서 조건 (i)을 만족한다. □

보조정리 5.1.1과 5.1.2로부터 다음을 알 수 있다: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속일 필요충분조건은 $\mathbb{R}$의 각각의 열린집합 U에 대하여, $f^{-1}(U)$는 열린집합이다.

이것은 두 위상공간 사이의 연속함수의 개념을 다음과 같이 정의하도록 도와준다:

5.1.3 정의. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 f가 X로부터 Y로의 함수라 하자. 각각의 $U \in \mathcal{T}_1$에 대하여 $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$를 만족할 때, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$를 **연속함수(continuous mapping)**라고 말한다.

위 주목으로부터 이러한 연속의 정의는 $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}_1) = \mathbb{R}$일 때의 보통의 정의와 같다는 것을 알 수 있다.

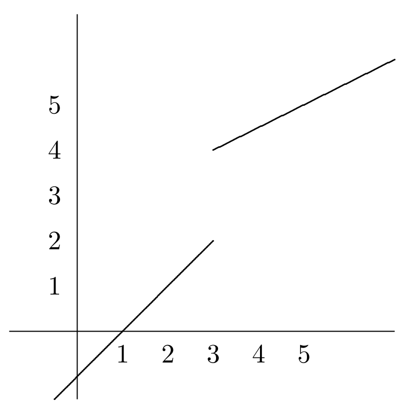
이러한 연속의 정의가 실제로 얼마나 좋게 적용되는지 알아보기 위해 몇 개의 쉬운 보기들을 살펴보자.

5.1.4 보기. 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = x$로 주어진 함수, 즉, 항등함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 생각하자. 그러면 $\mathbb{R}$에 있는 임의의 열린집합 U에 대하여, $f^{-1}(U) = U$이고 이것은 열린집합이다. 따라서 f는 연속이다. □

5.1.5 보기. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 상수 c와 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = c$로 주어져 있다고 하자. 이때, U가 $\mathbb{R}$에서 열린집합이라 하자. 분명히 $c \in U$이면 $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$이고 $c \notin U$이면 $f^{-1}(U) = \emptyset$이다. 두 경우 모두, $f^{-1}(U)$는 열린집합이다. 따라서 f는 연속이다. □

5.1.6 보기. 다음과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 생각하자:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \le 3 \\ \frac{1}{2}(x+5), & x > 3. \end{cases}$$



함수가 연속일 필요충분조건은 모든 열린집합의 역상이 열린집합임을 상기하자. 그러므로 f가 연속이 *아님*을 보이기 위해서 $f^{-1}(U)$가 열린집합이 아닌 한 개의 U만 찾으면 된다.

그러면 $f^{-1}((1,3)) = (2,3]$는 열린집합이 아니다. 그러므로 f는 연속이 아니다. □

이제 보조정리 5.1.2가 다음처럼 다시 쓰여질 수 있음을 주목하자.[2]

5.1.7 명제. f가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$로부터 위상공간 $(Y, \mathcal{T}')$로의 함수라고 하자. 그러면 f가 연속일 필요충분조건은 다음과 같다: 각각의 $x \in X$와 $f(x) \in U$인 각각의 $U \in \mathcal{T}'$에 대하여, $x \in V$와 $f(V) \subseteq U$을 만족하는 $V \in \mathcal{T}$가 존재한다. □

5.1.8 명제. $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}_1)$와 $(Z, \mathcal{T}_2)$가 위상공간이라고 하자. 만약 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$와 $g : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$가 연속함수이면, 합성함수 $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_2)$는 연속이다.

증명.

합성함수 $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_2)$가 연속임을 증명하기 위해, $U \in \mathcal{T}_2$이면 $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$임을 보여야 한다.

하지만 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$이다.

U가 $(Z, \mathcal{T}_2)$에서 열린집합이라고 하자. g가 연속이므로, $g^{-1}(U)$는 $\mathcal{T}_1$에서 열린집합이다. 그러면 f가 연속이기 때문에 $f^{-1}(g^{-1}(U))$는 $\mathcal{T}$에서 열린집합이다. 하지만 $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$이다. 그러므로 $g \circ f$는 연속이다. □

다음 결과는 우리가 원한다면 연속이 열린집합 대신에 닫힌집합으로 나타내어질 수 있음을 보여준다.

5.1.9 명제. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$가 위상공간이라고 하자. 이때, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 연속일 필요충분조건은 다음과 같다: Y의 임의의 닫힌 부분집합 S에 대하여, $f^{-1}(S)$는 X의 닫힌 부분집합이다.

증명.

$$f^{-1}(S\text{의 여집합}) = f^{-1}(S)\text{의 여집합}$$

임을 안다면 이 결과는 바로 얻어진다. □

[2] 보조정리 5.1.2와 그 증명을 읽지 않았다면 지금 읽어야 한다.

5.1.10 주목. 물론 연속함수와 위상동형함수 사이에는 다음 관계가 있다: $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 위상동형함수이면 그것은 연속이고, 모든 연속함수가 위상동형함수인 것은 아니다.

다음 명제는 "연속"과 "위상동형함수"에 대한 모든 것을 말한다. 그 증명은 정의로부터 바로 얻어진다.

5.1.11 명제. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}')$가 위상공간이고 f가 X로부터 Y로의 함수라 하자. 그러면 f가 위상동형함수일 필요충분조건은

(i) f는 연속이다,

(ii) f는 단사이고 전사이다; 즉, 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 존재한다, 그리고

(iii) f^{-1}는 연속이다. □

한 유용한 결과는 연속함수의 제한함수가 연속함수라는 다음 명제이다. 그 증명은 독자에게 맡긴다 – 연습문제 5.1 #8을 보시오.

5.1.12 명제. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$는 연속함수, A는 X의 부분집합, 그리고 $\mathcal{T}_2$는 A 위의 유도된 위상이라고 하자. 더욱이 $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 f의 A로의 제한함수라고 하자; 즉, 모든 $x \in A$에 대하여 $g(x) = f(x)$라고 하자. 그러면 g는 연속이다.

연습문제 5.1

1. (i) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 상수함수라고 하자. f가 연속임을 보이시오.
   (ii) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$가 항등함수라고 하자. f가 연속임을 보이시오.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 주어져 있다고 하자:
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$
   (i) 보기 5.1.6의 방법을 이용하여 f가 연속이 아님을 증명하시오.
   (ii) $f^{-1}\{1\}$을 구하고, 명제 5.1.9를 이용하여 f가 연속이 아님을 추론하시오.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 주어져 있다고 하자:
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1. \end{cases}$$
   f는 연속인가? (그 이유를 설명하시오.)

4. $X = [0,1] \cup [2,4]$일 때, $(X, \mathcal{T})$가 $\mathbb{R}$의 부분공간이라 하고 $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in [2,4]. \end{cases}$$
f가 연속임을 증명하시오. (이것이 여러분을 놀라게 하는가?)

5. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 $\mathcal{B}_1$이 위상 $\mathcal{T}_1$에 대한 기저라고 하자. 함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 연속일 필요충분조건이 모든 $U \in \mathcal{B}_1$에 대하여 $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$임을 보이시오.

6. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 f가 X로부터 Y로의 함수라고 하자. $(X, \mathcal{T})$가 이산공간이면, f가 연속임을 증명하시오.

7. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 f가 X로부터 Y로의 함수라고 하자. $(Y, \mathcal{T}_1)$가 비이산공간이면, f가 연속임을 증명하시오.

8. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 연속함수라고 하자. A가 X의 부분집합이고, $\mathcal{T}_2$가 A 위에 유도된 위상, $B = f(A)$, $\mathcal{T}_3$가 B 위에 유도된 위상 그리고 $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (B, \mathcal{T}_3)$가 f의 A로의 제한함수라고 하자. g가 연속임을 증명하시오.

9. f가 공간 $(X, \mathcal{T})$로부터 공간 $(Y, \mathcal{T}')$로의 함수라고 하자. f가 연속일 필요충분조건이 각각의 $x \in X$와 $f(x)$의 각각의 근방 N에 대하여 $f(M) \subseteq N$을 만족하는 x의 근방 M이 존재하는 것임을 증명하시오.

10. $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$가 한 집합 X의 두 위상이라고 하자. $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$일 때, $\mathcal{T}_1$이 $\mathcal{T}_2$보다 **섬세한 위상(finer topology)** (그리고 $\mathcal{T}_2$가 $\mathcal{T}_1$보다 **엉성한 위상(coarser topology)**)이라고 말한다. 다음을 증명하시오:

    (i) $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상이 $\mathbb{R}$ 위의 여유한위상보다 섬세하다;

    (ii) 항등함수 $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$가 연속일 필요충분조건은 $\mathcal{T}_1$이 $\mathcal{T}_2$보다 섬세한 위상이다.

11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 모든 유리수 q에 대하여 $f(q) = 0$을 만족하는 연속함수라고 하자. 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = 0$임을 증명하시오.

12. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$이 연속함수라고 하자. f가 일대일일 때, 다음을 증명하시오:

    (i) $(Y, \mathcal{T}_1)$이 Hausdorff이면 $(X, \mathcal{T})$는 Hausdorff이다.

    (ii) $(Y, \mathcal{T}_1)$이 T_1-공간이면 $(X, \mathcal{T})$는 T_1-공간이다.

13. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 f가 $(X, \mathcal{T})$로부터 $(Y, \mathcal{T}_1)$로의 함수라고 하자. f가 연속일 필요충분조건이 X의 모든 부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$임을 증명하시오.

    [힌트: 명제 5.1.9를 이용하시오.]

5.2 중간값 정리

5.2.1 명제. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 전사이면서 연속이라고 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 연결이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$은 연결이다.

증명. $(Y, \mathcal{T}_1)$이 연결이 아니라고 가정하자. 그러면 $U \neq \emptyset$이고 $U \neq Y$인 열린닫힌 부분집합 U가 존재한다. f가 연속이므로 $f^{-1}(U)$는 열린집합이고, 또한 명제 5.1.9에 의해 닫힌집합이다; 즉, $f^{-1}(U)$는 X의 열린닫힌 부분집합이다. 이제 f가 전사이고 $U \neq \emptyset$이기 때문에 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$이다. 또한 f가 전사이고 $U \neq Y$이기 때문에 $f^{-1}(U) \neq X$이다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 연결이 아니다. 이것은 모순이다. 그러므로 $(Y, \mathcal{T}_1)$은 연결이다. □

5.2.2 주목. (i) 조건 "전사"가 빠지면 위 명제는 거짓이다. (이러한 보기를 하나 찾으시오.)

(ii) 명제 5.2.1은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다: **연결집합의 연속인 상(continuous image)은 연결이다.**

(iii) 명제 5.2.1은 $(X, \mathcal{T})$가 연결공간이고 $(Y, \mathcal{T}')$가 연결이 아니면 (즉, **비연결(disconnected)** 이면), $(X, \mathcal{T})$로부터 $(Y, \mathcal{T}')$로의 전사이면서 연속인 함수가 존재하지 않는다는 것을 말한다. 예를 들면, $\mathbb{R}$로부터 $\mathbb{Q}$ (또는 $\mathbb{Z}$)로의 전사함수는 무한히 존재하지만, 그것들 중 어느 것도 연속이 아니다. 실제로 연습문제 5.2 #10에서 $\mathbb{R}$로부터 $\mathbb{Q}$ (또는 $\mathbb{Z}$)로의 연속함수들은 상수함수들 뿐임을 관찰할 것이다. □

다음은 연결의 개념을 강화한 버전으로 종종 유용한 것이다.

5.2.3 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 다음을 만족할 때 **길연결(path-connected 또는 pathwise connected)**이라고 말한다: X의 서로 다른 점 a와 b의 각각의 쌍에 대하여 $f(0) = a$이고 $f(1) = b$인 연속함수 $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$가 존재한다. 이 함수 f를 **a와 b를 연결하는 길(path joining a to b)**이라고 말한다.

5.2.4 보기. 모든 구간이 길연결인 것은 쉽게 알 수 있다. □

5.2.5 보기. 각각의 $n \geq 1$에 대하여, $\mathbb{R}^n$은 길연결이다. □

5.2.6 명제. 모든 길연결공간은 연결이다.

증명. $(X, \mathcal{T})$가 길연결공간이고 연결이 아니라고 가정하자.

그러면 공집합이 아닌 열린닫힌 진부분집합 U가 존재한다. 그래서 $a \in U$이고 $b \in X \setminus U$인 a와 b가 존재한다. $(X, \mathcal{T})$가 길연결이기 때문에 $f(0) = a$이고 $f(1) = b$인 연속함수 $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$가 존재한다.

그러나 $f^{-1}(U)$는 $[0, 1]$의 열린닫힌 부분집합이다. $a \in U$이기 때문에 $0 \in f^{-1}(U)$이고 따라서 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$이다. $b \notin U$이기 때문에, $1 \notin f^{-1}(U)$이고 따라서 $f^{-1}(U) \neq [0, 1]$이다. 그러므로 $f^{-1}(U)$는 $[0, 1]$의 공집합이 아닌 열린닫힌 진부분집합이다. 이것은 $[0, 1]$가 연결이라는 것에 모순이다.

결과적으로 $(X, \mathcal{T})$는 연결이다. □

5.2.7 주목. 명제 5.2.6의 역은 거짓이다; 즉, 모든 연결공간이 길연결인 것은 아니다. 그러한 공간의 한 예는 아래에 있는 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이다:

$$X = \{\langle x, y \rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\} \cup \{\langle 0, y \rangle : -1 \leq y \leq 1\}.$$

[연습문제 5.2 #6는 X가 연결임을 보여준다. X가 길연결이 아닌 것은 점 $\langle 0, 0 \rangle$과 점 $\langle 1/\pi, 0 \rangle$을 연결하는 길이 존재하지 않는 것을 보임으로써 알 수 있다. 이것은 여러분 스스로 그림을 그려서 확인해 보시오.] □

우리는 이제 $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$임을 보일 수 있다.

5.2.8 보기. 분명히 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$은 길연결이므로, 명제 5.2.6에 의해 연결이다. 그러나 명제 4.2.5에 의해, 임의의 점 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $\mathbb{R} \setminus \{a\}$는 비연결이다. 따라서 $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$이다. □

이제 우리는 위상의 실변수 함수론으로의 아름다운 응용인 Weierstrass 중간값 정리를 제시한다. 그 결과에서 중요한 위상적 개념은 연결성이다.

5.2.9 정리. (Weierstrass 중간값 정리(Intermediate Value Theorem)) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 연속이고 $f(a) \neq f(b)$라고 하자. 그러면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 모든 수 p에 대하여 $f(c) = p$인 점 $c \in [a,b]$가 존재한다.

증명. $[a,b]$가 연결이고 f가 연속이기 때문에, 명제 5.2.1은 $f([a,b])$가 연결임을 말해준다. 명제 4.3.5에 의해 $f([a,b])$는 구간이다. 이제 $f(a)$와 $f(b)$는 $f([a,b])$에 있다. 그래서 만약 p가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있다면 $p \in f([a,b])$, 즉, 어떤 $c \in [a,b]$에 대하여 $p = f(c)$이다. □

5.2.10 따름정리. 만약 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 연속이고 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$이면 $f(x) = 0$인 $x \in [a,b]$가 존재한다. □

5.2.11 따름정리. (고정점 정리(Fixed Point Theorem)) f가 $[0,1]$로부터 $[0,1]$로의 연속함수라고 하자. 그러면 $f(z) = z$인 $z \in [0,1]$가 존재한다. (그 점 z를 **고정점(fixed point)**이라 부른다.)

증명. $f(0) = 0$ 또는 $f(1) = 1$이면 명백히 그 결과는 참이다. 그러므로 $f(0) > 0$이고 $f(1) < 1$인 경우를 생각하는 것으로 충분하다.

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$가 $g(x) = x - f(x)$로 정의된 함수라고 하자. 분명히 g는 연속이고, $g(0) = -f(0) < 0$, $g(1) = 1 - f(1) > 0$이다. 결과적으로, 따름정리 5.2.10에 의하여 $g(z) = 0$인 $z \in [0,1]$가 존재한다; 즉, $z - f(z) = 0$ 또는 $f(z) = z$이다. □

5.2.12 주목. 따름정리 5.2.11은 Brouwer 고정점 정리(Brouwer Fixed Point Theorem)라고 부르는 매우 중요한 정리의 특별한 경우이다. 그 정리는 다음과 같다: n-차원 큐브를 연속적으로 자기자신으로 보낸다면 고정점이 존재한다. [이 정리는 많은 증명방법이 있지만 대부분 대수적 위상의 방법에 의존한다. 한 복잡하지 않은 증명은 Kuratowski [194]의 238–239쪽에 주어져 있다.]

연습문제 5.2

1. 길연결공간의 연속인 상(continuous image)은 길연결임을 증명하시오.

2. f가 구간 $[a, b]$로부터 자기자신으로의 연속함수라고 하자. 여기서 a, $b \in \mathbb{R}$이고 $a < b$이다. 고정점이 존재함을 증명하시오.

3. (i) 따름정리 5.2.11에서 $[0, 1]$을 $(0, 1)$으로 바꾸면 성립하지 않는 보기를 하나 드시오.
   (ii) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$로부터 자기자신으로의 모든 연속함수가 고정점을 가질 때, $(X, \mathcal{T})$는 **고정점 성질(fixed point property)**을 갖는다고 말한다. 고정점 성질을 갖는 구간들은 오직 닫힌구간들 뿐임을 보이시오.
   (iii) X가 적어도 두 점을 갖는 집합이라고 하자. 이산공간 $(X, \mathcal{T})$와 비이산공간 $(X, \mathcal{T}')$이 고정점 성질을 갖지 않음을 증명하시오.
   (iv) 여유한위상이 주어진 공간은 고정점 성질을 갖는가?
   (v) 공간 $(X, \mathcal{T})$가 고정점 성질을 갖고 공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 $(X, \mathcal{T})$와 위상동형일 때, $(Y, \mathcal{T}_1)$이 고정점 성질을 가짐을 증명하시오.

4. $\{A_j : j \in J\}$가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 연결 부분공간들의 족이라고 하자. $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$일 때, $\bigcup_{j\in J} A_j$이 연결임을 보이시오.

5. A가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 연결 부분공간이라고 하자. $\overline{A}$ 또한 연결임을 증명하시오. 실제로 $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$이면 B가 연결임을 증명하시오.

6. (i) $\mathbb{R}^2$의 부분공간 $Y = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\}$가 연결임을 보이시오.
   [힌트: 명제 5.2.1을 이용하시오.]
   (ii) $\overline{Y} = Y \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}$임을 보이시오.
   (iii) 연습문제 5를 이용하여, $\overline{Y}$가 연결임을 관찰하시오.

7. $\mathbb{R}^2$에서 두 좌표들이 유리수인 모든 점들의 집합을 E라고 하자. 공간 $\mathbb{R}^2 \setminus E$가 길연결임을 증명하시오.

8.* C가 $\mathbb{R}^2$의 가산 부분집합이라고 하자. 공간 $\mathbb{R}^2 \setminus C$가 길연결임을 증명하시오.

9. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고 a가 X의 임의의 점이라고 하자. **X에서 a의 성분(component in X of a)** $C_X(a)$는 a를 포함하는 X의 모든 연결 부분집합들의 합집합으로 정의된다. 다음을 보이시오.

   (i) $C_X(a)$는 연결이다. (위 연습문제 4를 이용하시오.)

   (ii) $C_X(a)$는 a를 포함하는 가장 큰 연결집합이다.

   (iii) $C_X(a)$는 X에서 닫혀있다. (위 연습문제 5를 이용하시오.)

10. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 공집합이 아닌 연결 부분집합이 단집합일 때, $(X, \mathcal{T})$를 **완전비연결(totally disconnected)**이라고 말한다. 다음 명제들을 증명하시오.

   (i) $(X, \mathcal{T})$가 완전비연결일 필요충분조건은 각각의 $a \in X$에 대하여, $C_X(a) = \{a\}$이다. (연습문제 9에 있는 표기를 보시오.)

   (ii) 보통위상을 가지고 있는 모든 유리수들의 집합 $\mathbb{Q}$는 완전비연결이다.

   (iii) f가 $\mathbb{R}$로부터 $\mathbb{Q}$로의 연속함수일 때, $c \in \mathbb{Q}$가 존재하여 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = c$를 만족함을 증명하시오.

   (iv) 완전비연결공간의 모든 부분공간은 완전비연결이다.

   (v) $\mathbb{R}^2$의 모든 가산 부분공간은 완전비연결이다.

   (vi) Sorgenfrey 직선은 완전비연결이다.

11. (i) 연습문제 9를 이용하여, 위상공간에서 한 점의 "길성분(path-component)"을 자연스러운 방법으로 정의하시오.

   (ii) 위상공간에서 모든 길성분은 길연결공간임을 증명하시오.

   (iii) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 점이 길연결인 근방을 가질 때, 모든 길성분은 열린집합임을 증명하시오. 또한 모든 길성분은 닫힌집합임을 추론하시오.

   (iv) (iii)을 이용하여, $\mathbb{R}^2$의 열린 부분집합이 연결일 필요충분조건은 그것이 길연결임을 보이시오.

12.* A와 B가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라고 하자. A와 B 모두 열려있거나 모두 닫혀있고, $A \cup B$와 $A \cap B$가 연결일 때, A와 B는 연결임을 보이시오.

13. 열린닫힌집합으로 이루어진 기저가 존재하는 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **0-차원(zero-dimensional)** 이라고 한다. 다음 명제들을 증명하시오.

(i) $\mathbb{Q}$와 $\mathbb{P}$는 0-차원 공간이다.

(ii) 0-차원 공간의 부분공간은 0-차원이다.

(iii) 0-차원 Hausdorff 공간은 완전비연결이다. (위 연습문제 10을 보시오.)

(iv) 모든 비이산공간은 0-차원이다.

(v) 모든 이산공간은 0-차원이다.

(vi) 두 점 이상을 갖는 비이산공간은 완전비연결이 아니다.

(vii) 0-차원 T_0-공간은 Hausdorff이다.

(viii)* $\mathbb{R}$의 부분공간이 0-차원일 필요충분조건은 그것이 완전비연결이다.

14. 모든 국소위상동형함수는 연속함수임을 보이시오. (연습문제 4.3 #9를 보시오.)

5.3 후기

이 장에서 우리는 모든 열린집합의 역상이 열린집합인 성질을 갖는 위상공간들 사이의 함수를 "연속"이라고 말했다. 이것은 명쾌한 정의이고 이해하기 쉽다. 그것은 이 절의 시작에서 언급된 실해석학에서의 그것과 대조를 이룬다. 우리는 일반화를 위해서가 아니라 실제로 무엇이 일어나고 있는지 더 정확히 알기 위해서 실해석학 정의를 일반화하였다.

Weierstrass 중간값 정리는 직관적으로 명백한 것 같지만 그것은 $\mathbb{R}$이 연결인 것과 연결공간의 연속인 상은 연결이라는 사실로부터 얻어진다는 것을 안다.

우리는 연결보다 더 강한 성질 즉, 길연결을 소개하였다. 많은 경우에 한 공간이 연결이라고 주장하는 것은 충분하지 않다. 그것은 길연결일 수도 있다. 이 성질은 대수적 위상에서 중요한 역할을 한다.

우리는 적절한 때에 Brouwer 고정점 정리로 되돌아갈 것이다. 그것은 강력한 정리이다. 고정점 정리들은 위상, 함수해석, 미분방정식을 포함한 수학의 다양한 분야에서 중요한 역할을 한다. 그것들은 오늘날에도 여전히 활발한 연구의 주제이다.

우리는 연습문제 5.2 #9와 #10에서 "성분"과 "완전비연결"의 개념을 보았다. 이 두 개념은 모두 연결성을 이해하는데 중요한 것이다.

제 6 장

거리공간

소개

가장 중요한 위상공간들의 모임(class)은 거리공간들의 모임이다. 거리공간은 위상수학에서 풍부한 보기의 원천을 제공한다. 그러나 이보다 더, 위상수학의 해석학에 대한 대부분의 응용은 거리공간을 통하여 이루어진다.

거리공간의 개념은 1906년 Maurice Fréchet에 의하여 소개되었고 1914년 Felix Hausdorff (Hausdorff [136])에 의하여 발전되었고 이름이 지어졌다.

6.1 거리공간

6.1.1 정의. X를 공집합이 아닌 집합이라 하고 d를 다음을 만족하는 $X \times X$위에 정의된 실수값 함수라 하자: $a, b \in X$에 대하여

(i) $d(a,b) \geq 0$, 그리고 $d(a,b) = 0$일 필요충분조건은 $a = b$이다;

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$; 그리고

(iii) X 안의 모든 a, b, c에 대하여, $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$가 성립한다. [삼각부등식]

이 때 d를 X 위의 **거리(metric)**라고 부르고, (X, d)를 **거리공간(metric space)**이라고 부른다. $d(a,b)$를 a와 b 사이의 **거리(distance)**라고 한다.

6.1.2 보기. 다음과 같이 정의된 함수 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$d(a, b) = |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

는 집합 $\mathbb{R}$ 위의 거리이다. 왜냐하면,

(i) 모든 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 $|a - b| \geq 0$, 그리고 $|a - b| = 0$일 필요충분조건은 $a = b$이다,

(ii) $|a - b| = |b - a|$, 그리고

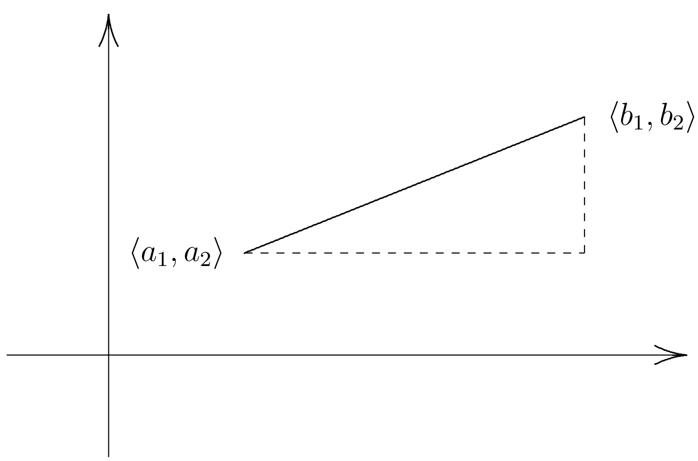
(iii) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$이다. ($|x + y| \leq |x| + |y|$로부터 이것을 유도하시오.)

d를 $\mathbb{R}$ 위의 **유클리드 거리(euclidean metric)**라고 부른다. □

6.1.3 보기. 다음과 같이 정의된 함수 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$d(\langle a_1, a_2 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

는 $\mathbb{R}^2$ 위의 거리이고, d를 $\mathbb{R}^2$ 위의 **유클리드 거리**라고 부른다.



□

6.1.4 보기. X를 공집합이 아닌 집합이라 하고 d를 다음과 같이 정의된 $X \times X$에서 $\mathbb{R}$로의 함수라 하자.

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b. \end{cases}$$

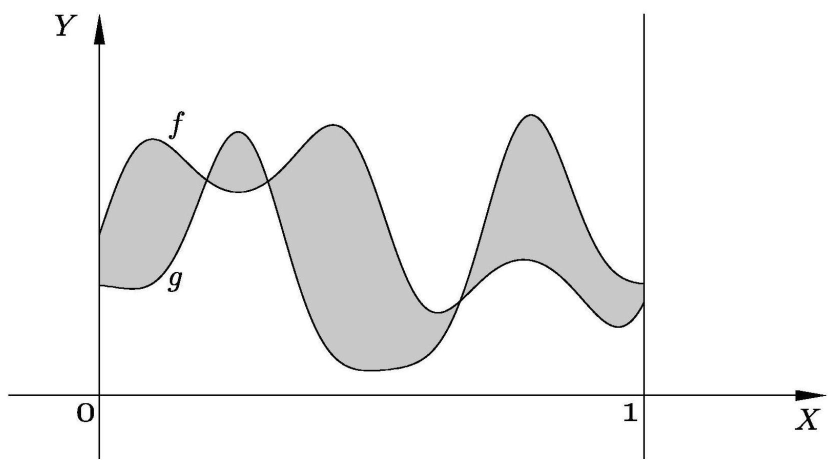
그러면 d는 X 위의 거리이고 **이산거리(discrete metric)**라고 부른다. □

거리공간의 많은 중요한 보기는 "함수공간"이다. 이것에 위해서 거리를 부여할 집합 X는 함수들의 집합이다.

6.1.5 보기. C$[0,1]$를 $[0,1]$에서 $\mathbb{R}$로의 연속함수들의 집합으로 표시하고 이 집합 위의 거리를 다음과 같이 정의하자: C$[0,1]$에 속하는 임의의 f와 g에 대하여

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

잠시 생각해 보면 $d(f,g)$는 아래 그림과 같이 함수의 그래프와 직선 $x = 0$과 $x = 1$ 사이의 영역의 면적임을 안다.

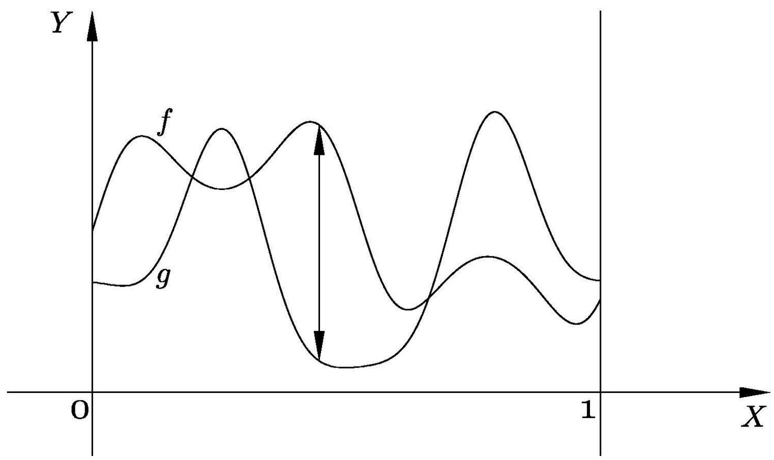


□

6.1.6 보기. 다시 C$[0,1]$을 $[0,1]$에서 $\mathbb{R}$로의 모든 연속함수들의 집합이라 하자. C$[0,1]$ 위의 다른 거리가 다음과 같이 정의된다:

$$d^*(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

분명히 $d^*(f,g)$는 바로 함수 f와 g의 그래프 사이의 최대 수직 격차이다.



□

6.1.7 보기. 우리는 다음과 같이 $\mathbb{R}^2$ 위에 또 다른 거리를 정의할 수 있다:

$$d^*(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

여기서 $\max\{x, y\}$는 두 수 x와 y 중의 최댓값이다. □

6.1.8 보기. $\mathbb{R}^2$ 위의 또 다른 거리는 다음과 같이 주어진다:

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$ □

거리공간의 보기의 대한 풍부한 원천은 노름벡터공간의 집합족이다.

6.1.9 보기. V를 실수 또는 복소수 체(field) 위의 벡터공간이라 하자. V 위의 **노름(norm)** $\|\ \|$은 다음을 만족하는 함수 $\|\ \|: V \to \mathbb{R}$이다: 모든 $a, b \in V$와 체에 속하는 모든 λ에 대하여

(i) $\| a \| \geq 0$, 그리고 $\| a \| = 0$일 필요충분조건은 $a = 0$이다,

(ii) $\| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|$, 그리고

(iii) $\| \lambda a \| = |\lambda| \| a \|$이다.

노름벡터공간(normed vector space) $(V, \|\ \|)$는 노름 $\|\ \|$을 갖는 벡터공간 V이다.

$(V, \|\ \|)$를 임의의 노름벡터공간이라 하자. 그러면 노름에 대응되는 다음의 거리 d가 존재한다. V 안에 있는 a와 b에 대하여 $d(a, b) = \| a - b \|$로 놓으면 d는 집합 V 위의 거리이다.

d는 실제로 거리임은 쉽게 확인이 된다. 그러므로 자연스러운 방법으로 모든 노름벡터공간은 또한 거리공간이다.

예를 들어,

$$\| \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \text{여기서, } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

라 놓으면 $\mathbb{R}^3$는 노름벡터공간이다. 따라서

$$\begin{aligned} d(\langle a_1, b_1, c_1 \rangle, \langle a_2, b_2, c_2 \rangle) &= \| (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2) \| \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} \end{aligned}$$

라 놓으면 $\mathbb{R}^3$는 거리공간이 된다.

실제로 임의의 양의 정수 n에 대하여,

$$\| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

라 놓으면 $\mathbb{R}^n$는 노름벡터공간이다. 그러므로

$$\begin{aligned} d(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle) &= \| \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n \rangle \| \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \end{aligned}$$

라 놓으면 $\mathbb{R}^n$는 거리공간이 된다. □

노름벡터공간 $(N, \|\ \|)$에서 **중심이 a이고 반경이 r인 열린구(open ball)**는 집합

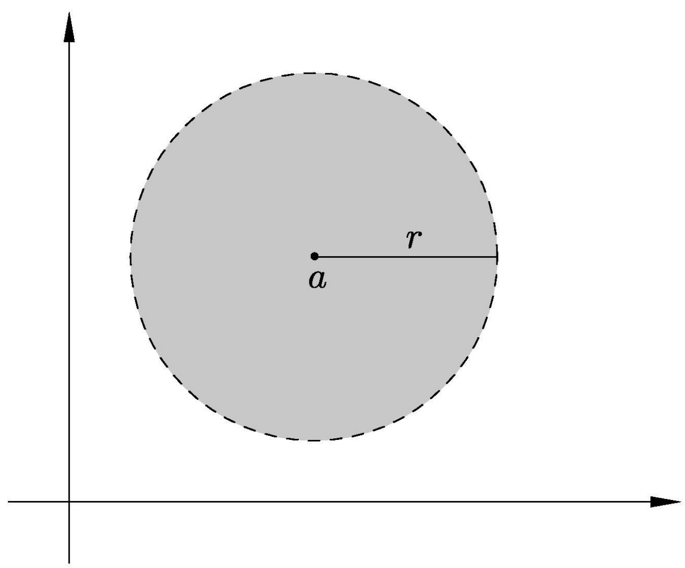
$$B_r(a) = \{x : x \in N \text{ 그리고 } \| x - a \| < r\}$$

으로 정의된다. 이것은 거리공간에 대한 다음 정의를 제시한다:

6.1.10 정의. (X, d)를 거리공간 그리고 r을 양의 실수라 하자. 그러면 **중심이 $a \in X$이고 반경이 r인 열린구(open ball)**는 집합 $B_r(a) = \{x : x \in X \text{ 그리고 } d(a, x) < r\}$이다.

6.1.11 보기. 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}$에서 $B_r(a)$는 열린구간 $(a - r, a + r)$이다. □

6.1.12 보기. 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^2$에서, $B_r(a)$는 중심이 a이고 반경이 r인 열린원판이다.

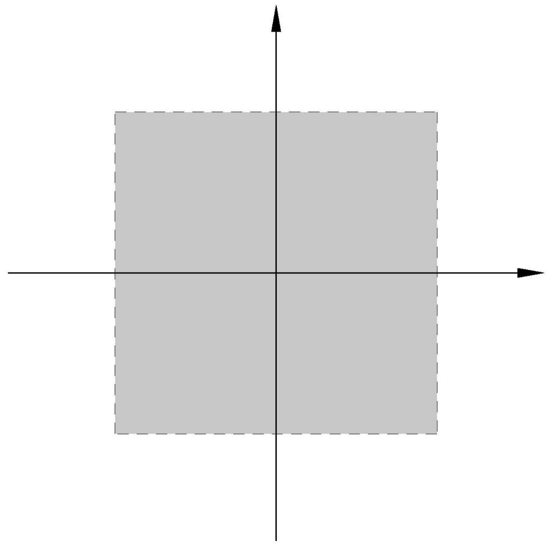


□

6.1.13 보기. $\mathbb{R}^2$에서 거리 d^*를 다음과 같이 정의하자:

$$d^*(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

열린구 $B_1(\langle 0, 0\rangle)$은 아래와 같다.

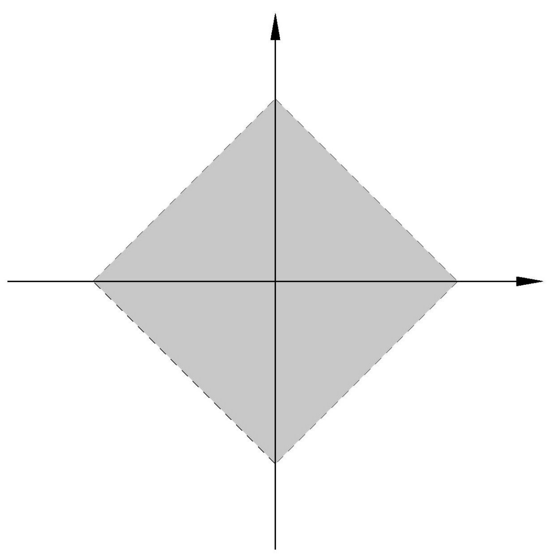


□

6.1.14 보기. $\mathbb{R}^2$에서 거리 d_1을 다음과 같이 정의하자:

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

열린구 $B_1(\langle 0, 0\rangle)$은 다음과 같다.



□

다음 보조정리의 증명은 아주 쉬우므로 (특히 그림을 그려보면) 독자에게 맡긴다.

6.1.15 보조정리. (X, d)를 거리공간 그리고 a와 b를 X의 점이라 하자. 더욱이, δ_1과 δ_2를 양의 실수라 하자. 만약 $c \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$이면, 적당한 $\delta > 0$가 존재하여 $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$이다. □

다음의 따름정리는 보조정리 6.1.15로부터 일상적인 방법에 의하여 나온다.

6.1.16 따름정리. (X, d)를 거리공간 그리고 B_1과 B_2를 (X, d)에서 열린구라고 하자. 그러면 $B_1 \cap B_2$는 (X, d)에서 열린구들의 합집합이다. □

마지막으로 우리는 거리공간과 위상공간을 결부시킬 수 있다.

6.1.17 명제. (X, d)를 거리공간이라 하자. 그러면 (X, d)의 열린구들의 집합족은 X 위의 하나의 위상 $\mathcal{T}$의 기저이다.

[그 위상 $\mathcal{T}$를 **거리 d에 의하여 유도된 위상(topology induced by the metric d)**이라고 언급하고, $(X, \mathcal{T})$를 **유도위상공간(induced topological space)** 또는 **대응위상공간** 또는 **관련위상공간**이라고 부른다.]

증명. 이 증명은 명제 2.2.8과 따름정리 6.1.16으로부터 유도된다. □

6.1.18 보기. 만약 d가 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 거리이면, 거리 d에 의하여 유도된 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저는 열린구들의 집합이다. 그러나 $B_\delta(a) = (a-\delta\,,\ a+\delta)$이다. 이것으로부터 $\mathcal{T}$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상임을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 **$\mathbb{R}$ 위의 유클리드 거리는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상을 유도한다.** □

6.1.19 보기. 연습문제 2.3 #1 (ii)와 보기 6.1.12로부터 집합 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 거리는 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상을 유도한다는 것이 나온다. □

6.1.20 보기. 연습문제 2.3 #1 (i)과 보기 6.1.13으로부터 거리 d^* 역시 집합 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상을 유도한다는 것이 나온다. □

보기 6.1.14의 거리 d_1 역시 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상을 유도한다는 것의 증명은 연습문제로 남겨둔다.

6.1.21 보기. 만약 d가 집합 X 위의 이산거리이면, 각각의 $x \in X$에 대하여, $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$이다. 따라서 모든 단집합은 d에 의하여 X 위에 유도된 위상 $\mathcal{T}$에 관하여 열린집합이다. 결론적으로, $\mathcal{T}$는 이산위상이다. □

보기 6.1.19, 6.1.20, 그리고 6.1.14에서 같은 집합상에 같은 위상을 유도하는 $\boxed{\text{3개의 서로 다른 거리}}$를 보았다.

6.1.22 정의. 집합 X 위의 거리들이 X 위의 같은 위상을 유도하면 **거리 동치 (equivalent)**라고 말한다.

따라서 보기 6.1.3, 6.1.13, 그리고 6.1.14에 있는 $\mathbb{R}^2$ 위의 거리 d, d^*, 그리고 d_1은 동치이다.

6.1.23 명제. (X, d)를 거리공간 그리고 $\mathcal{T}$를 거리 d에 의하여 X 위에 유도된 위상이라 하자. 그러면 X의 부분집합 U가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합일 필요충분조건은 각각의 $a \in U$에 대하여 적당한 $\varepsilon > 0$이 존재하여 열린구 $B_\varepsilon(a) \subseteq U$이다.

증명. $U \in \mathcal{T}$라 가정하자. 그러면, 명제 2.3.2와 6.1.17에 의하여, 임의의 $a \in U$에 대하여 어떤 점 $b \in X$와 적당한 $\delta > 0$가 존재해서 $a \in B_\delta(b) \subseteq U$가 성립한다.

$\varepsilon = \delta - d(a, b)$라 하자. 그러면

$$a \in B_\varepsilon(a) \subseteq U$$

는 쉽게 증명된다.

역으로, X의 부분집합 U가 다음 성질을 만족한다고 가정하자: 각각의 $a \in U$에 대하여 적당한 $\varepsilon_a > 0$이 존재하여 $B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq U$이 성립한다고 하자. 그러면, 명제 2.3.3과 6.1.17에 의하여, U는 열린집합이다. □

집합 X 위의 모든 거리는 집합 X 위의 위상을 유도한다는 것을 보았다. 그러나, 우리는 이제 집합 위의 모든 위상이 어떤 거리에 의하여 유도되는 것은 아니라는 것을 보게 될 것이다. 먼저, 독자가 이미 접한 정의는 연습문제에 있다. (연습문제 4.1 #13을 보시오.)

6.1.24 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 다음을 만족하면 **Hausdorff 공간** (또는 **$\mathcal{T}_2$-공간**)이라고 부른다: 만약 X에 있는 임의의 서로 다른 점 a, b에 대하여, 어떤 열린집합 U와 V가 존재하여 $a \in U$, $b \in V$, 그리고 $U \cap V = \emptyset$가 성립한다.

물론 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ 그리고 모든 이산공간은 Hausdorff 공간의 예제이다. 반면에, 적어도 2개의 원소를 가진 비이산 위상공간은 Hausdorff 공간이 아니다. 좀 더 생각해 보면, 여유한위상을 갖는 $\mathbb{Z}$도 역시 Hausdorff 공간이 아님을 안다. (이 사실에 대하여 스스로 확신을 가지시오.)

6.1.25 명제. (X, d)를 임의의 거리공간 그리고 $\mathcal{T}$를 d에 의하여 X 위에 유도된 위상이라 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$는 Hausdorff 공간이다.

증명. a와 b를 X의 임의의 점이고, $a \neq b$라 하자. 그러면 $d(a, b) > 0$이다. $\varepsilon = d(a, b)$라 놓자. 열린구 $B_{\varepsilon/2}(a)$와 $B_{\varepsilon/2}(b)$를 생각하자. 그러면 이 열린구는 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합이고, $a \in B_{\varepsilon/2}(a)$ 그리고 $b \in B_{\varepsilon/2}(b)$이다. 따라서 $\mathcal{T}$가 Hausdorff임을 보이기 위해서는 오직 $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b) = \emptyset$임을 증명해야 한다.

$x \in B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b)$라고 가정하자. 그러면 $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ 그리고 $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $d(a, b) < \varepsilon$인데, 이것은 거짓이다. 결론적으로 $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b)$에 속하는 x가 존재하지 않는다; 즉, 우리가 원했던 $B_{\varepsilon/2}(a) \cap B_{\varepsilon/2}(b) = \emptyset$을 얻는다. $\square$

6.1.26 주목. 명제 6.1.25와 그 앞의 논평을 종합하면, 적어도 두 점을 갖는 비이산위상공간은 어느 거리에 의해서도 유도되지 않는 위상을 가지고 있다. 또한 여유한위상 $\mathcal{T}$를 갖는 $\mathbb{Z}$에서도 $\mathcal{T}$는 $\mathbb{Z}$ 위의 어느 거리에 의해서도 유도되지 않는다. $\square$

6.1.27 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 만약 집합 X 위에 거리 d가 존재하여 $\mathcal{T}$가 d에 의하여 유도된 위상이라는 성질을 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **거리화가능(metrizable)** 공간이라고 부른다.

그러므로, 예를 들어, 여유한위상을 갖는 집합 $\mathbb{Z}$는 거리화가능 공간이 아니다.

경고. 명제 6.1.25에 의하여 모든 Hausdorff 공간은 거리화가능이라는 생각으로 잘못 인도되지 말아야 한다. 나중에 우리는 (무한 곱공간을 이용하여) Hausdorff 공간이지만 거리화가능이 아닌 공간의 예제를 만들 수 있게 될 것이다. [위상공간의 거리화 가능성은 상당히 기술적인 주제이다. 거리화 가능성에 대한 필요충분조건에 대해서는 Dugundji [92]책의 195쪽에 있는 정리 9.1을 보시오.]

연습문제 6.1

1. 보기 6.1.8의 거리 d_1이 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 위상을 유도함을 증명하시오.

2. d를 공집합이 아닌 집합 X 위의 거리라 하자.

   (i) $a, b \in X$일 때, $e(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$에 의하여 정의된 함수 e도 역시 X 위의 거리임을 보이시오.

   (ii) d와 e는 동치인 거리임을 증명하시오.

   (iii) (X, d)를 거리공간이라 하자. 만약 적당한 양의 실수 M이 존재하여 모든 $x, y \in X$에 대하여 $d(x, y) < M$이 성립하면, (X, d)를 **유계거리공간(bounded metric space)**, 그리고 d를 **유계거리(bounded metric)**라고 부른다. (ii)를 이용하여 모든 거리는 유계거리와 동치임을 유도하시오.

3. (i) d를 공집합이 아닌 집합 X 위의 거리라 하자. 다음과 같이 정의된 함수 e도 역시 X 위의 거리임을 보이시오.

$$e(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}$$

   여기서, $a, b \in X$이다.

   (ii) d와 e는 동치인 거리임을 증명하시오.

4. d_1과 d_2를 각각 집합 X와 Y 위의 거리라 하자. 다음을 증명하시오:

   (i) d는 $X \times Y$ 위의 거리다. 여기서,

$$d(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}.$$

   (ii) e는 $X \times Y$ 위의 거리다. 여기서,

$$e(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

   (iii) d와 e는 동치인 거리다.

5. (X, d)를 거리공간 그리고 $\mathcal{T}$를 X 위의 대응위상이라 하자. $a \in X$를 고정된 원소라 하자. 함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(a, x)$는 연속임을 증명하시오.

6. (X, d)를 거리공간 그리고 $\mathcal{T}$를 d에 의하여 X 위에 유도된 위상이라 하자. Y를 X의 부분집합 그리고 d_1을 d를 Y 위에 제한하여 얻어진 거리라 하자; 즉, Y에 속하는 모든 a와 b에 대하여 $d_1(a, b) = d(a, b)$이다. 만약 $\mathcal{T}_1$이 d_1에 의하여 Y 위에 유도된 위상이고 $\mathcal{T}_2$는 (X 위에 $\mathcal{T}$에 의하여 유도된) Y 위의 부분위상이면, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$임을 증명하시오. [이것은 **거리화가능 공간의 모든 부분공간은 거리화가능이다**라는 것을 보여준다.]

7. (i) $\boldsymbol{\ell_1}$을 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$이 수렴하는 성질을 가지고 있는 모든 실수열

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

의 집합이라 하자. 만약 ℓ_1 안의 모든 x와 y에 대하여

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

으로 정의하면, (ℓ_1, d_1)은 거리공간임을 증명하시오.

(ii) $\boldsymbol{\ell_2}$를 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$이 수렴하는 성질을 가지고 있는 모든 실수열

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

의 집합이라 하자. 만약 ℓ_2에 속하는 모든 x와 y에 대하여

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

라고 정의하면, (ℓ_2, d_2)는 거리공간임을 증명하시오.

(iii) $\boldsymbol{\ell_\infty}$는 유계인 실수열 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$의 집합을 나타낸다. 만약 $x, y \in \ell_\infty$에 대하여

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

라고 정의하면, (ℓ_∞, d_∞)는 거리공간임을 증명하시오.

(iv) $\boldsymbol{c_0}$을 0으로 수렴하는 모든 수열로 이루어진 ℓ_∞의 부분집합이라 하고 d_0을 연습문제 6에서처럼 ℓ_∞ 위의 거리 d_∞를 c_0 위에 제한하여 얻은 거리라 하자. c_0은 (ℓ_∞, d_∞)의 닫힌 부분집합임을 증명하시오.

(v) 각각의 공간 (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), 그리고 (c_0, d_0)는 가분공간임을 증명하시오.

(vi)* (ℓ_∞, d_∞)는 가분공간인가?

(vii) 위의 각각의 거리공간은 자연스런 방법으로 노름벡터공간임을 보이시오.

8. f를 거리화가능 공간 $(X, \mathcal{T})$에서 위상공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$ 위로의 연속함수라 하자. $(Y, \mathcal{T}_1)$는 반드시 거리화가능인가? (자신의 답을 정당화하시오.)

9. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 각각의 닫힌 부분집합의 쌍 A와 B에 대하여, 어떤 열린집합 U와 V가 존재하여 $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, 그리고 $U \cap V = \emptyset$을 만족하면 $(X, \mathcal{T})$를 **정규공간(normal space)**이라고 부른다. 다음을 증명하시오.

   (i) 모든 거리화가능 공간은 정규공간이다.

   (ii) 모든 T_1, 정규공간은 Hausdorff 공간이다. [Hausdorff 정규공간은 **T_4-공간**이라고 불린다.]

10. (X, d)와 (Y, d_1)을 거리공간이라 하자. 만약 전사함수 $f : (X, d) \to (Y, d_1)$가 존재해서 모든 $x_1, x_2 \in X$에 대하여,
$$d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$$
를 만족하면 (X, d)와 (Y, d_1)은 **등거리(isometric)**라고 말한다. 그러한 함수 f를 **등거리 함수(isometry)**라고 부른다. 모든 등거리 함수는 대응위상공간 사이의 위상동형함수임을 증명하시오. (따라서 **등거리인 거리공간은 위상동형이다**!)

11. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 각각의 원소 $x \in X$에 대하여 x를 포함하는 열린집합으로 이루어진 가산집합족 $\{U_i(x)\}$가 존재하여 x를 포함하는 모든 열린집합 V가 부분집합으로서 $U_i(x)$ 중에 (적어도) 하나를 포함하는 성질을 가지고 있으면, $(X, \mathcal{T})$가 **제1가산공리(first axiom of countability)**를 만족한다 또는 **제1가산(first countable)**이라고 한다. 가산집합족 $\{U_i(x)\}$를 x에서 **가산기저(countable base)**라 부른다. 다음을 증명하시오:

   (i) 모든 거리화가능 공간은 제1가산공리를 만족한다.

   (ii) 제2가산공리를 만족하는 모든 위상공간은 또한 제1가산공리를 만족한다.

12. 집합 $X = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$이라 하자. 함수 $f : \mathbb{R} \to X$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ 1, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

더욱이, X 위의 위상 $\mathcal{T}$를 다음과 같이 정의하자:

$$\mathcal{T} = \{U : U \subseteq X \text{ 그리고 } f^{-1}(U)\text{는 } \mathbb{R} \text{ 위의 유클리드 위상에 관하여 열린집합이다.}\}$$

다음을 증명하시오:

(i) f는 연속함수이다.

(ii) $(X, \mathcal{T})$에서 1의 모든 열린근방은 $(U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$의 형태이다. 여기서, U는 $\mathbb{R}$에서 열린집합이다.

(iii) $(X, \mathcal{T})$는 제1가산이 아니다.

[힌트. $(U_1 \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$, $(U_2 \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, \dots, (U_n \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}, \dots$ 이 1에서 가산기저라고 가정하시오. 각각의 양의 정수 n에 대하여, $x_n > n$을 만족하는 $x_n \in U_n \setminus \mathbb{N}$을 선택할 수 있다. 집합 $U = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합임을 입증하시오. $V = (U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$이 1의 열린근방이지만 집합 $(U_n \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$ 중 어느 것도 포함하지 않음을 유도하시오. 이것은 모순이다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 제1가산이 아니다.]

(iv) $(X, \mathcal{T})$는 Hausdorff 공간이다.

(v) $\mathbb{R}$의 연속상인 Hausdorff 공간은 반드시 제1가산은 아니다.

13. S를 거리공간 (X,d)의 부분집합이라 하자. 만약 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여, 어떤 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$이 존재하여 $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$를 만족하면; 즉, S가 반경이 ε인 유한개의 열린구에 의하여 덮혀지면, S를 **완전유계(totally bounded)**라고 부른다.

   (i) 모든 완전유계 거리공간은 유계 거리공간임을 보이시오. (위의 연습문제 2를 보시오.)

   (ii) 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}$은 완전유계는 아니지만, 각각의 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$에 대하여, 닫힌구간 $[a,b]$는 완전유계이다.

   (iii) (Y,d)를 거리공간 (X,d_1)으로부터 유도된 거리를 갖는 부분공간이라 하자. 만약 (X,d_1)이 완전유계이면, (Y,d)도 완전유계이다; 즉, **완전유계공간의 모든 부분공간은 완전유계이다.** [힌트. $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$라고 가정하시오. 만약 $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap Y$이면, 삼각부등식에 의하여 $B_\varepsilon(x_i) \subseteq B_{2\varepsilon}(y_i)$이다.]

   (iv) (iii)과 (ii)로부터 완전유계 거리공간 $(0,1)$은 완전유계가 아닌 $\mathbb{R}$과 위상동형임을 유도하시오. 그러므로 "완전유계"는 위상적 성질이 아니다.

   (v) (iii)과 (ii)로부터 각각의 $n > 1$에 대하여, 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^n$은 완전유계가 아님을 유도하시오.

   (vi) 각각의 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 닫힌구간 $[a,b]$는 완전유계라는 것을 주목하여, $\mathbb{R}$의 거리 부분공간이 유계일 필요충분조건은 완전유계임을 보이시오.

   (vii) 각각의 $n > 1$에 대하여, $\mathbb{R}^n$의 거리 부분공간이 유계일 필요충분조건은 완전유계임을 보이시오.

14. 모든 완전유계 거리공간은 가분임을 보이시오. (위의 연습문제 13과 연습문제 3.2 #4를 보시오.)

15. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 만약 양의 정수 n이 존재하여 각 점 $x \in X$가 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^n$의 원점 0을 중심으로 갖는 열린구와 위상동형인 열린근방을 갖는다면 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **국소적 유클리드(locally euclidean)** 공간이라고 부른다. Hausdorff 국소적 유클리드 공간을 **위상다양체(topological manifold)**라고 부른다.[1]

    (i) 모든 자명하지 않은 구간 (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$는 국소 유클리드 공간임을 증명하시오.

    (ii) $\mathbf{S}^1$을 $d(x, 0) = 1$를 만족하는 모든 점 $x \in \mathbb{R}^2$로 이루어진 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이라 하자. 여기서 d는 유클리드 거리이다. $\mathbf{S}^1$은 국소 유클리드 공간임을 보이시오.

    (iii) 임의의 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{R}^n$과 국소 위상동형인 모든 위상공간은 국소 유클리드임을 보이시오. (연습문제 4.3 #9를 보시오.)

    (iv)* 국소 유클리드 공간이지만 위상다양체가 아닌 예제를 찾으시오.

---

[1]참고 문헌에 위상다양체에 대한 다른 정의가 있다(Kunen and Vaughan [193]; Lee [199]를 비교하시오). 특히 어떤 정의는 위상공간이 연결공간이어야 함을 요구하고 있다 – 소위 **연결다양체(connected manifold)**를 말한다 – 그리고 더 오래된 정의는 위상공간이 거리화가능 공간이 되어야 함을 요구한다. Hausdorff 공간 X의 각 점이 어떤 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{R}^n$에 위상적으로 동형인 열린근방을 갖거나 또는 $\mathbb{R}^n$의 닫힌 반-공간 $\{< x_1, x_2, \ldots, x_n >: x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$과 위상적으로 동형인 열린근방을 가지면 X를 **경계가 있는 위상다양체(topological manifold with boundary)**라고 부른다. 더 많은 구조를 갖는 다양체에 관한 많은 참고문헌이 있다. 특히, **미분다양체(differentiable manifolds)** (Gadea and Masque [119]; Barden and Thomas [28]), **매끄러운 다양체(smooth manifolds)** (Lee [200]) 그리고 **Riemannian 다양체(Riemannian manifolds)** 또는 **Cauchy-Riemann 다양체(Cauchy-Riemann manifolds)** 또는 **CR-다양체(CR-manifolds)** 등이 있다.

6.2 수열의 수렴

우리는 수렴하는 실수열의 개념은 잘 알고 있다. 그것은 다음과 같이 정의된다. 주어진 임의의 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 정수 n_0가 존재하여 모든 $n \geq n_0$에 대하여 $|x_n - x| < \varepsilon$를 만족하면 실수의 수열 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$이 실수 x로 **수렴한다(converge)**고 한다.

이 정의를 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{R}$로부터 임의의 거리공간으로 어떻게 확장시킬 수 있는지는 분명하다.

6.2.1 정의. (X, d)를 거리공간 그리고 $x_1, \ldots, x_n, \ldots$을 X의 점으로 이루어진 수열이라 하자. 그러면 주어진 임의의 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 n_0가 존재하여 모든 $n \geq n_0$에 대하여 $d(x, x_n) < \varepsilon$이면 그 수열은 $x \in X$에 **수렴한다(converge)**고 말한다. 이것을 $\boldsymbol{x_n \to x}$로 나타낸다.

$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$을 (X, d)의 점으로 이루어진 수열이라 하자. 어떤 점 $y \in X$가 존재하여 $y_n \to y$이면 그 수열을 **수렴하는(convergent)** 수열이라고 한다.

다음의 명제는 쉽게 증명된다. 따라서 증명은 연습문제로 남겨둔다.

6.2.2 명제. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$을 거리공간 (X, d)의 점으로 이루어진 수열이라 하자. 더욱이, x와 y를 (X, d)의 점이라 하자. 만약 $x_n \to x$ 그리고 $x_n \to y$이면 $x = y$이다. □

거리공간 (X, d)의 부분집합 A가 거리 d에 의하여 X 위에 유도된 위상 $\mathcal{T}$에 관하여 닫힌 (각각, 열린)집합이면, 편리하게 A를 거리공간 (X, d)에서 닫힌 (각각, 열린)집합이라 한다.

다음의 명제는 거리공간의 위상은 완전히 수렴하는 수열에 의하여 묘사될 수 있다는 놀라운 사실을 말해준다.

6.2.3 명제. (X,d)를 거리공간이라 하자. X의 부분집합 A가 (X,d)에서 닫힌집합일 필요충분조건은 A의 점으로 이루어진 모든 수렴하는 수열이 A 안의 점으로 수렴한다. (다른 말로 말하면, A가 (X,d)에서 닫힌집합일 필요충분조건은 $x \in X$ 그리고 모든 n에 대하여 $a_n \in A$일 때, $a_n \to x$이면 $x \in A$이다.)

증명. A를 (X,d)에서 닫힌집합이라 하고 $a_n \to x$라 하자. 여기서, 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_n \in A$이다. $x \in X \setminus A$라 가정하자. 그러면, $X \setminus A$는 x를 포함하는 열린집합으로써, 어떤 열린구 $B_\varepsilon(x)$가 존재하여 $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$이다. 각각의 $a_n \in A$임을 주목하여, 각각의 n에 대하여 $d(x,a_n) > \varepsilon$을 얻는다. 따라서 수열 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$은 x로 수렴하지 않는다. 이것은 모순이다. 따라서 우리가 원했던대로, $x \in A$이다.

역으로, A의 점으로 이루어진 모든 수렴하는 수열이 A의 점으로 수렴한다고 가정하자. $X \setminus A$는 열린집합이 아니라고 가정하자. 그러면 점 $y \in X \setminus A$가 존재하여 각각의 $\varepsilon > 0$에 대하여, $B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$이다. 각각의 양의 정수 n에 대하여, x_n를 $B_{1/n}(y) \cap A$ 안의 임의의 점이라 하자. 이때 $x_n \to y$임을 주장하자. 이것을 위하여, ε를 임의의 양의 실수라 하고, n_0를 $1/\varepsilon$보다 큰 임의의 정수라 하자. 그러면 각각의 $n \geq n_0$에 대하여,

$$x_n \in B_{1/n}(y) \subseteq B_{1/n_0}(y) \subseteq B_\varepsilon(y)$$

이다. 따라서 $x_n \to y$이다. 그리고, 가정에 의하여, $y \notin A$이다. 이것은 모순이다. 따라서 $X \setminus A$는 열린집합이다. 그러므로 A는 (X,d)에서 닫힌집합이다. $\square$

거리공간의 위상은 수렴하는 수열에 의하여 묘사할 수 있다는 것을 보았으므로, 연속함수도 그렇게 묘사할 수 있다는 것에 놀라지 말아야 한다.

6.2.4 명제. (X,d)와 (Y,d_1)을 거리공간이라 하고 f를 X로부터 Y로의 함수라 하자. $\mathcal{T}$와 $\mathcal{T}_1$을 각각 d와 d_1에 의하여 결정된 위상이라 하자. 그러면 $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$가 연속함수일 필요충분조건은 $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$; 즉, 만약 $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$이 x로 수렴하는 (X,d)의 점으로 이루어진 수열이면, (Y,d_1)에 있는 점으로 된 수열 $f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n),\dots$은 $f(x)$로 수렴한다.

증명. $x_n\to x\Rightarrow f(x_n)\to f(x)$라 가정하자. f가 연속이라는 것을 입증하기 위해서는 $(Y,\mathcal{T}_1)$의 모든 닫힌집합의 역상이 $(X,\mathcal{T})$에서 닫힌집합임을 보이면 충분하다. 따라서 A를 $(Y,\mathcal{T}_1)$의 닫힌 부분집합이라 하자. $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$를 $x\in X$로 수렴하는 $f^{-1}(A)$에 있는 점들의 수열이라 하자. $x_n\to x$이므로 $f(x_n)\to f(x)$이다. 그러나 각각의 $f(x_n)\in A$ 그리고 A가 닫힌집합이므로, 명제 6.2.3에 의하여, $f(x)\in A$이다. 그러므로 $x\in f^{-1}(A)$이다. 따라서 $f^{-1}(A)$의 점으로 된 모든 수렴하는 수열은 $f^{-1}(A)$의 한 점으로 수렴한다. 그러므로 $f^{-1}(A)$는 닫힌집합이다. 따라서 f는 연속이다.

역으로, f를 연속이라 하고 $x_n\to x$라 하자. ε를 임의의 양의 실수라 하면, 열린구 $B_\varepsilon(f(x))$는 $(Y,\mathcal{T}_1)$에서 열린집합이다. f가 연속이므로, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$는 $(X,\mathcal{T})$에서 열린집합이고 x를 포함한다. 그러므로 어떤 $\delta>0$가 존재하여

$$x\in B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

이다. $x_n\to x$이므로, 양의 정수 n_0가 존재하여 모든 $n\geq n_0$에 대하여, $x_n\in B_\delta(x)$이다. 그러므로

$$\text{모든 } n\geq n_0\text{에 대하여}, f(x_n)\in f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

이다. 따라서 $f(x_n)\to f(x)$이다. □

아래의 따름정리는 명제 6.2.4로부터 쉽게 유도된다.

6.2.5 따름정리. (X,d)와 (Y,d_1)을 거리공간, f를 X로부터 Y로의 함수, 그리고 $\mathcal{T}$와 $\mathcal{T}_1$을 각각 d와 d_1에 의하여 결정된 위상이라 하자. 그러면 $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$가 연속함수일 필요충분조건은 각각의 $x_0\in X$와 $\varepsilon>0$에 대하여, $\delta>0$가 존재하여 모든 $x\in X$에 대하여 $d(x,x_0)<\delta\Rightarrow d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$이다. □

이 절에서 우리는 거리공간의 수열의 수렴성을 논의했다. 이전에 왜 일반위상공간의 수열의 수렴성을 논의하지 않았는지를 물을 수 있다. 이 맥락에 대해서는 수열과 그물(Nets)에 대한 YouTube 비디오를 시청하는 것이 도움이 될 것이다. 이것은
"Topology Without Tears – Video 3a – Sequences and Nets" 그리고
"Topology Without Tears – Video 3b – Sequences and Nets"이라고 부르는데 YouTube의
http://youtu.be/wXkNgyVgOJE와 http://youtu.be/xNqLF8GsRFE
에서 그리고 중국 Youku 사이트
http://tinyurl.com/kxdefsm와 http://tinyurl.com/kbh93so
에서 찾아 볼 수 있다. 또는
http://www.topologywithouttears.net
와 연계된 링크에서도 찾아 볼 수 있다.

연습문제 6.2

1. C$[0,1]$와 d를 보기 6.1.5와 같다고 하자. (C$[0,1], d)$의 함수열 $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$을 다음과 같이 정의하자.
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad n = 1, 2, \dots, \quad x \in [0,1].$$
$f_n \to f_0$임을 입증하시오. 여기서, 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $f_0(x) = 0$이다.

2. (X, d)를 거리공간 그리고 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$을 $x_n \to x$ 그리고 $x_n \to y$를 만족하는 수열이라 하자. $x = y$임을 증명하시오.

3. (i) (X, d)를 거리공간, τ를 X 위에 유도된 위상, 그리고 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$을 X의 점들로 된 수열이라 하자. $x_n \to x$일 필요충분조건은 모든 열린집합 $U \ni x$에 대하여, 양의 정수 n_0가 존재해서 모든 $n \geq n_0$에 대하여 $x_n \in U$임을 증명하시오.

   (ii) X를 집합 그리고 d와 d_1을 X 위의 동치인 거리라 하자. (i)로부터 만약 (X, d)에서 $x_n \to x$이면, (X, d_1)에서 $x_n \to x$임을 유도하시오 .

4. 따름정리 6.2.5를 증명하시오.

5. $(X, \mathcal{T})$를 $\boxed{\text{위상공간}}$ 그리고 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$을 X의 점으로 이루어진 수열이라 하자. 만약 각각의 열린집합 $U \ni x$에 대하여 어떤 양의 정수 n_0가 존재해서 모든 $n \geq n_0$에 대하여 $x_n \in U$이면 $\boldsymbol{x_n \to x}$이라고 말한다. $x_n \to x$이고 $x_n \to y$이지만 $x \neq y$인 위상공간과 수열의 예제를 찾으시오.

6. (i) (X, d)를 거리공간 그리고 $x_n \to x$이라 하자. 여기서, 각각의 $x_n \in X$ 그리고 $x \in X$이다. A를 X의 부분집합으로써 x와 모든 점 x_n으로 이루어졌다 하자. A는 (X, d)에서 닫힌집합임을 증명하시오.
   (ii) (i)로부터 집합 $\{2\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$은 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합임을 유도하시오.
   (iii) 집합 $\{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$은 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이 아님을 입증하시오.

7. (i) $d_1, d_2, \ldots, d_m$을 집합 X 위의 거리 그리고 $a_1, a_2, \ldots a_m$을 양의 실수라 하자. 다음과 같이 정의된 d가 X 위의 거리임을 증명하시오.

$$\text{모든 } x, y \in X\text{에 대하여 } d(x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i d_i(x, y).$$

   (ii) 만약 $x \in X$ 그리고 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$이 X의 점으로 이루어진 수열이고, 각각의 거리공간 (X, d_i)에서 $x_n \to x$이라 하자. 거리공간 (X, d)에서 $x_n \to x$임을 증명하시오.

8. X, Y, d_1, d_2 그리고 d를 연습문제 6.1 #4와 같다고 하자. 만약 (X, d_1)에서 $x_n \to x$ 그리고 (Y, d_2)에서 $y_n \to y$이면,

$$(X \times Y, d)\text{에서 } \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$$

임을 증명하시오.

9. A와 B를 거리공간 (X, d)의 공집합이 아닌 부분집합이라 하자. 함수 ρ를 다음과 같이 정의하자.

$$\rho(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

[$\rho(A, B)$를 **집합 A와 B 사이의 거리(distance)**라고 언급한다.]

(i) 만약 S가 (X, d)의 공집합이 아닌 임의의 부분집합이면,
$$\overline{S} = \{x : x \in X \text{ 그리고 } \rho(\{x\}, S) = 0\}$$
임을 증명하시오.

(ii) 만약 S가 (X, d)의 공집합이 아닌 임의의 부분집합이면, 함수 $f\colon (X, d) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \rho(\{x\}, S), \qquad x \in X$$

는 연속임을 증명하시오.

10. (i) 각각의 양의 정수 n에 대하여 f_n을 $[0, 1]$로부터 자기자신으로의 연속함수, 그리고 $a \in [0, 1]$이고 모든 n에 대하여 $f_n(a) = a$라 하자. 더욱이, f를 $[0, 1]$로부터 자기자신으로의 연속함수라 하자. 만약 $(C[0, 1], d^*)$에서 d^*가 보기 6.1.6의 거리일 때, $f_n \to f$이면, a는 f의 고정점임을 증명하시오.

(ii) d^*를 보기 6.1.5의 거리 d로 대치하면, (i)은 거짓임을 보이시오.

6.3 완비성

6.3.1 정의. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$을 거리공간 (X, d)의 점으로 이루어진 수열이라 하자. 만약 주어진 임의의 실수 $\varepsilon > 0$에 대하여, 어떤 양의 정수 n_0가 존재해서 모든 정수 $m \geq n_0$과 $n \geq n_0$에 대하여 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$이 성립하면 그 수열을 **Cauchy 수열(Cauchy sequence)**이라고 부른다.

6.3.2 명제. (X,d)를 거리공간 그리고 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$을 (X,d)의 점으로 이루어진 수열이라 하자. 만약 점 $a \in X$가 존재하여 그 수열이 a로 수렴하면, 즉, $x_n \to a$이면, 그 수열은 Cauchy 수열이다.

증명. ε를 임의의 양의 실수라 하자. $\delta = \varepsilon/2$라 놓자. $x_n \to a$이므로 어떤 양의 정수 n_0가 존재하여 모든 $n > n_0$에 대하여 $d(x_n, a) < \delta$이다.

따라서 $m > n_0$ 그리고 $n > n_0$라 하자. 그러면 $d(x_n, a) < \delta$ 그리고 $d(x_m, a) < \delta$이다.

거리에 대한 삼각부등식에 의하여,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \delta + \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

이므로 그 수열은 사실상 Cauchy 수열이다. □

이것은 우리에게 자연스럽게 역명제에 관하여 생각하도록 한다. 그리고 모든 Cauchy 수열이 수렴하는 수열인지를 묻게 한다. 다음 보기는 이것은 사실이 아님을 보여준다.

6.3.3 보기. 유클리드 거리 d를 갖는 열린구간 $(0,1)$을 생각하자. 수열 $0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001, \ldots$은 Cauchy 수열이지만 $(0,1)$ 안의 어느 점으로도 수렴하지 않는다는 것은 분명하다. □

6.3.4 정의. 거리공간 (X,d)의 모든 Cauchy 수열이 (X,d)의 점으로 수렴하면, (X,d)를 **완비(complete)**거리공간이라고 한다.

보기 6.3.3으로부터 유클리드 거리를 갖는 단위구간 (0,1)은 완비거리공간이 아님을 곧바로 안다. 한편, 만약 X가 임의의 유한집합이고 d가 X 위의 이산거리이면, 분명히 (X,d)는 완비거리공간이다.

유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{R}$은 완비거리공간임을 보이겠다. 먼저 몇 가지 준비가 필요하다.

수열 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$을 $\{x_n\}$으로 간단히 나타낸다.

6.3.5 정의. 만약 $\{x_n\}$이 임의의 수열이면, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$을 만족하는 수열 $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$을 $\{x_n\}$의 **부분수열(subsequence)**이라고 한다.

6.3.6 정의. $\{x_n\}$을 $\mathbb{R}$의 수열이라 하자. 만약 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_n \leq x_{n+1}$을 만족하면, $\{x_n\}$을 **증가수열(increasing sequence)**이라 한다. 만약 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_n \geq x_{n+1}$을 만족하면 $\{x_n\}$을 **감소수열(decreasing sequence)**이라 한다. 증가이거나 감소인 수열을 **단조(monotonic)**수열이라 한다.

물론 대부분의 수열은 증가도 아니고 감소도 아니다.

6.3.7 정의. $\{x_n\}$을 $\mathbb{R}$의 수열이라 하자. 그러면 $n_0 \in \mathbb{N}$가 모든 $n \geq n_0$에 대하여 $x_n \leq x_{n_0}$를 만족하면, $n_0 \in \mathbb{N}$를 **극점(peak point)**이라고 부른다.

6.3.8 보조정리. $\{x_n\}$을 $\mathbb{R}$의 임의의 수열이라 하자. 그러면 $\{x_n\}$은 단조 부분수열을 갖는다.

증명. 먼저 수열 $\{x_n\}$이 무한개의 극점을 갖는다고 가정하자. 이때 부분수열 $\{x_{n_k}\}$을 선택하자. 여기서 각각의 n_k는 극점이다. 특히, 이것은 각각의 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$가 성립함을 의미한다. 즉, $\{x_{n_k}\}$은 $\{x_n\}$의 감소 부분수열이다. 따라서 $\{x_{n_k}\}$은 단조 부분수열이다.

그 다음 오직 유한개의 극점이 존재한다고 가정하자. 따라서 어떤 정수 N이 존재하여 $n > N$인 모든 n은 극점이 아니다. 임의의 $n_1 > N$을 선택하자. 그러면 n_1은 극점이 아니다. 따라서 $x_{n_2} > x_{n_1}$를 만족하는 $n_2 > n_1$가 존재한다. 이제 $n_2 > N$이므로 n_2는 극점이 아니다. 따라서 $x_{n_3} > x_{n_2}$를 만족하는 $n_3 > n_2$이 존재한다. 이 방법을 계속하면 (수학적 귀납법에 의하여), 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$을 만족하는 $\{x_n\}$의 부분수열 $\{x_{n_k}\}$을 얻는다; 즉, $\{x_{n_k}\}$은 $\{x_n\}$의 증가 부분수열이다. 이것으로 보조정리의 증명이 끝난다. □

6.3.9 명제. $\{x_n\}$을 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{R}$의 단조수열이라 하자. 그러면 $\{x_n\}$이 $\mathbb{R}$의 점으로 수렴할 필요충분조건은 $\{x_n\}$이 유계수열이다.

증명. "유계"는 주목 3.3.1에서 정의되었음을 기억하자.

분명히 $\{x_n\}$이 유계가 아니면, 그 수열은 수렴하지 않는다.

그 다음 $\{x_n\}$이 유계인 증가수열이라고 가정하자. 최소상계공리에 의하여, 집합 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$의 최소상계 L이 존재한다. 만약 ε이 임의의 양의 실수이면, 양의 정수 N이 존재하여 $d(x_N, L) < \varepsilon$이다; 실제로, $x_N > L - \varepsilon$이다.

그러나 $\{x_n\}$이 증가수열이고 L이 상계이므로,

$$\text{모든 } n > N\text{에 대하여} \qquad L - \varepsilon < x_n < L$$

을 얻는다. 즉, $x_n \to L$이다.

$\{x_n\}$이 유계인 감소수열인 경우는 비슷한 방법으로 증명이 되므로, 증명이 끝난다. □

보조정리 6.3.8과 명제 6.3.9의 따름정리로, 즉시 다음을 얻는다:

6.3.10 정리. **(Bolzano-Weierstrass 정리)** 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{R}$의 모든 유계수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다. □

마침내 우리는 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{R}$이 완비거리공간임을 증명할 수 있다.

6.3.11 따름정리. 유클리드 거리를 갖는 거리공간 $\mathbb{R}$은 완비거리공간이다.

증명. $\{x_n\}$을 $(\mathbb{R}, d)$의 임의의 Cauchy 수열이라 하자.

이 임의의 Cauchy 수열이 $\mathbb{R}$에서 수렴하는 것을 보이면, 그 거리공간이 완비임을 보인 것이 될 것이다. 첫번째 단계는 이 수열이 유계임을 보일 것이다.

$\{x_n\}$이 Cauchy 수열이므로, 어떤 양의 정수 N이 존재하여 임의의 $n \geq N$과 $m \geq N$에 대하여, $d(x_n, x_m) < 1$이다; 즉, $|x_n - x_m| < 1$이다. $M = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| + 1$라 놓자. 그러면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $|x_n| < M$이다; 즉, 수열 $\{x_n\}$은 유계이다.

따라서 Bolzano-Weierstrass 정리 6.3.10에 의하여, 이 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다; 즉, 어떤 $a \in \mathbb{R}$가 존재하고 $x_{n_k} \to a$인 부분수열 $\{x_{n_k}\}$가 존재한다.

우리는 그 부분수열이 a로 수렴할 뿐 아니라, 수열 $\{x_n\}$ 자신도 a로 수렴함을 보일 것이다.

ε을 임의의 양의 실수라 하자. $\{x_n\}$이 Cauchy 수열이므로, 어떤 양의 정수 N_0가 존재하여

$$\text{모든 } m \geq N_0 \text{ 그리고 모든 } n \geq N_0\text{에 대하여 } |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}\text{이 성립한다.}$$

$x_{n_k} \to a$이므로, 어떤 양의 정수 N_1이 존재하여

$$\text{모든 } n_k \geq N_1\text{에 대하여 } |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

이 성립한다. 그러므로 $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$으로 선택하고, 위의 두 부등식을 결합하면, 모든 $n > N_2$과 모든 $n_k > N_2$에 대하여,

$$\begin{aligned} |x_n - a| &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $x_n \to a$이다. 이것으로 따름정리의 증명이 완성되었다. □

6.3.12 따름정리. 각각의 양의 정수 m에 대하여, 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^m$은 완비거리공간이다.

증명. 연습문제 6.3 #4를 보시오. □

6.3.13 명제. (X, d)를 거리공간, Y를 X의 부분집합, 그리고 d_1을 d에 의하여 Y 위에 유도된 거리라 하자.

(i) 만약 (X, d)가 완비거리공간이고 Y가 (X, d)의 닫힌 부분공간이면, (Y, d_1)은 완비거리공간이다.

(ii) 만약 (Y, d_1)이 완비거리공간이면, Y는 (X, d)의 닫힌 부분공간이다.

증명. 연습문제 6.3 #5를 보시오. □

6.3.14 주목. 보기 6.3.3은 유클리드 거리를 갖는 $(0, 1)$은 완비거리공간이 아님을 보였음을 주목하자. 그러나, 따름정리 6.3.11은 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{R}$은 완비거리공간임을 보였다. 그리고 우리는 위상공간 $(0, 1)$과 $\mathbb{R}$은 위상동형임을 알고 있다. 따라서 **완비성은 위상동형함수에 의하여 보존이 되지 않는다. 그러므로 완비성은 위상적 성질이 아니다**.

6.3.15 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$ 위에 거리 d가 존재하여 $\mathcal{T}$가 d에 의해서 결정된 X 위의 위상이고, (X, d)가 완비거리공간이면, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **완비거리화가능(completely metrizable)**공간이라고 한다.

6.3.16 주목. 완비거리화가능은 실제로 위상적 성질임을 주목하자. 더욱이, 모든 이산거리공간과 유도위상을 갖는 $\mathbb{R}$의 모든 구간은 완비거리화가능임을 입증하는 것은 쉽다 (연습문제 6.3 #7을 보시오). 따라서 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$에 대하여, 유도된 위상을 갖는 위상공간들 $\mathbb{R}$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, 그리고 $\{a\}$는 모두 완비거리화가능이다. 나중에 볼 다소 놀라운 것은 유도된 위상을 갖는 무리수 $\mathbb{P}$ 조차도 완비거리화가능이다. 또한 $(0, 1)$은 닫힌 부분집합이 아닌 $\mathbb{R}$의 완비거리화가능 부분공간이기 때문에, 완비거리를 완비거리화가능으로 바꾸면 명제 6.3.13 (ii)는 참이 아닐 수 있다. □

6.3.17 정의. 위상공간이 가산인 조밀한 부분집합을 가지면 **가분(separable)**공간이라고 한다.

연습문제 3.2 #4에서 $\mathbb{R}$과 모든 가산위상공간은 가분공간임을 보았다. 다른 예제는 연습문제 6.1 #7에 있다.

6.3.18 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 가분이고 완비거리화가능이면 **Polish 공간**이라고 불린다.

$\mathbb{R}$이 Polish 공간임은 분명하다. 연습문제 6.3 #6에 의하여, 각각의 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{R}^n$은 Polish 공간이다.

6.3.19 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff이고 Polish 공간의 연속상이면 **Souslin 공간**이라고 불린다. 위상공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 부분집합 A의 유도위상이 $\mathcal{T}_2$이고, $(A, \mathcal{T}_2)$가 Souslin 공간이면, A를 $(Y, \mathcal{T}_1)$에서 **해석적 집합(analytic set)**이라고 부른다.

분명히 모든 Polish 공간은 Souslin 공간이다. 연습문제 6.1 #12와 #11에 의하여 Souslin 공간은 거리화가능일 필요가 없기 때문에, 그 역은 성립하지 않는다. 그러나, 거리화가능 Souslin 공간조차도 반드시 Polish 공간은 아니라는 것을 보이겠다. 이것을 보이기 위해서, 모든 가산공간은 이산공간 $\mathbb{N}$의 연속상이므로 **모든 가산위상공간은 Souslin 공간이다**라는 사실을 주목하자; 그러한 하나의 공간이 보기 6.5.8에서 보게 될 거리화가능 공간 $\mathbb{Q}$인데, 그것은 Polish 공간은 아니다.

우리는 두 위상공간이 위상동형이면 동치라는 것을 알고 있다. 두 개의 거리공간이 언제 (거리공간으로서) 동치인가?에 대한 질문은 자연스러운 것이다. 관련된 개념이 연습문제 6.1 #10에서 소개되었던, 즉, 등거리(isometric) 개념이다.

6.3.20 정의. (X, d)와 (Y, d_1)을 거리공간이라 하자. 만약 전사함수 $f : X \to Y$가 존재하여 모든 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$이면, (X, d)는 (Y, d_1)과 **등거리(isometric)**라고 말한다. 그러한 함수 f를 **등거리 함수(isometry)**라고 한다.

d를 $\mathbb{R}$ 위의 임의의 거리 그리고 a를 임의의 양의 실수라 하자. 만약 d_1을 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여 $d_1(x, y) = a.d(x, y)$로 정의하면, $(\mathbb{R}, d_1)$은 $(\mathbb{R}, d)$와 등거리인 거리공간임을 입증하는 것은 쉽다.

또한 임의의 두 등거리 공간은 서로 위상동형인 관련 위상공간을 갖는다는 것을 입증하는 것과 모든 등거리 함수는 역시 관련 위상공간 사이의 위상동형함수임을 입증하는 것은 쉽다.

6.3.21 정의. (X, d)와 (Y, d_1)을 거리공간이라 하고, f를 X로부터 Y로의 함수라 하자. $Z = f(X)$, 그리고 d_2를 d_1에 의하여 Z 위에 유도된 거리라 하자. 만약 $f : (X, d) \to (Z, d_2)$가 등거리 함수이면, f를 (X, d)에서 (Y, d_1) 안으로의 **등거리 넣기함수(isometric embedding)** 라고 말한다.

물론 유클리드 공간 $\mathbb{Q}$의 유클리드 공간 $\mathbb{R}$ 안으로의 자연스러운 넣기함수는 등거리 넣기함수이다. 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{N}$도 또한 두 유클리드 공간 $\mathbb{R}$과 $\mathbb{Q}$ 안으로 자연스러운 등거리 넣기함수를 갖는 경우이다.

6.3.22 정의. (X, d)와 (Y, d_1)을 거리공간 그리고 f를 X로부터 Y로의 함수라 하자. 만약 (Y, d_1)이 완비거리공간, $f : (X, d) \to (Y, d_1)$는 등거리 넣기함수이고 $f(X)$는 관련된 위상공간에서 Y의 조밀한 부분집합이면, (Y, d_1)을 (X, d)의 **완비화(completion)**라고 부른다.

분명히 유클리드 공간 $\mathbb{R}$은 유클리드 공간 $\mathbb{Q}$의 완비화이다. 또한 유클리드 공간 $\mathbb{R}$은 유클리드 거리를 갖는 무리수 집합 $\mathbb{P}$의 완비화이다. 곧바로 두 개의 질문이 마음 속에 떠오른다: (1) 모든 거리공간이 완비화를 갖는가? (2) 어떤 의미에서 거리공간의 완비화가 유일한가? 우리는 두 개의 질문에 대한 답변이 모두 "긍정적"임을 보게 될 것이다.

6.3.23 명제. (X, d)를 임의의 거리공간이라 하자. 그러면 (X, d)는 완비화를 갖는다.

증명 개요. (X, d)의 두 Cauchy 수열 $\{y_n\}$과 $\{z_n\}$이 $\mathbb{R}$에서 $d(y_n, z_n) \to 0$이면 동치라고 말함으로써 증명을 시작하자. 이것은 사실상 동치관계이다; 즉, 이것은 반사적, 대칭적, 그리고 추이적이다. 이제 $\widetilde{X}$를 (X, d)에서 동치인 Cauchy 수열의 모든 동치류들의 집합이라 하자. 우리는 $\widetilde{X}$ 위에 하나의 거리를 정의하기를 원한다.

$\tilde{y}$와 $\tilde{z}$를 $\widetilde{X}$의 임의의 두 점이라 하자. $\{y_n\} \in \tilde{y}$과 $\{z_n\} \in \tilde{z}$을 Cauchy 수열이라 하자. 이제 수열 $\{d(y_n, z_n)\}$은 $\mathbb{R}$의 Cauchy 수열이다. (연습문제 6.3 #8을 보시오.) $\mathbb{R}$이 완비거리공간이기 때문에, 이 Cauchy 수열은 $\mathbb{R}$의 어떤 수로 수렴하는데, 우리는 이 수를 $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$로 나타낸다. $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$는 $\tilde{y}$의 수열 $\{y_n\}$과 $\tilde{z}$의 수열 $\{z_n\}$의 선택에 무관함을 보이는 것은 간단하다.

각각의 $x \in X$에 대하여, 상수 수열 $x, x, \ldots, x, \ldots$는 (X, d)의 Cauchy 수열이고 x로 수렴한다. $\tilde{x}$를 $x \in X$로 수렴하는 모든 Cauchy 수열들의 동치류를 나타낸다고 하자. $\widetilde{X}$의 부분집합 Y를 $\{\tilde{x} : x \in X\}$로 정의하자. 만약 d_2가 $\widetilde{X}$ 위의 거리 d_1에 의하여 유도된 Y 위의 거리이면, $f(x) = \tilde{x}$에 의하여 정의된 함수 $f : (X, d) \to (Y, d_2)$는 등거리 함수임은 분명하다.

이제 Y가 $\widetilde{X}$에서 조밀함을 보이자. 이것을 위하여 임의의 주어진 실수 $\varepsilon > 0$에 대하여, 그리고 $z \in \widetilde{X}$에 대하여, 어떤 $\tilde{x} \in Y$가 존재하여 $d_1(z, \tilde{x}) < \varepsilon$임을 보인다. z는 Cauchy 수열의 동치류임을 주목하자. $\{x_n\}$을 동치류 z에 있는 Cauchy 수열이라 하자. 어떤 양의 정수 n_0가 존재해서 모든 $n > n_0$에 대하여, $d_1(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$이다. 이제 상수수열 $x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots, x_{n_0}, \ldots$를 생각하자. 이 수열은 Y에 속하는 동치류 $\widetilde{x_{n_0}}$ 안에 있다. 더욱이, $d_1(\widetilde{x_{n_0}}, z) < \varepsilon$이다. 따라서 Y는 실제로 $\widetilde{X}$에서 조밀하다.

마지막으로, $(\widetilde{X}, d_1)$는 완비거리공간임을 보인다. $\{z_n\}$을 이 공간 안에 있는 Cauchy 수열이라 하자. 우리는 이 수열이 $\widetilde{X}$에서 수렴함을 보여야 한다. Y가 조밀하기 때문에, 각각의 양의 정수 n에 대하여, 어떤 $\widetilde{x_n} \in Y$가 존재하여 $d_1(\widetilde{x_n}, z_n) < 1/n$이 성립한다. $\{\widetilde{x_n}\}$이 Y에서 Cauchy 수열임을 보이자.

실수 $\varepsilon > 0$을 생각하자. 양의 정수 N이 존재해서 $n, m > N$에 대하여, $d_1(z_n, z_m) < \varepsilon/2$이다. 이제 $1/n_1 < \varepsilon/4$을 만족하는 양의 정수 n_1을 택하자. $n, m > n_1 + N$에 대하여, 다음을 얻는다:

$$d_1(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) < d_1(\widetilde{x_n}, z_n) + d_1(z_n, z_m) + d_1(z_m, \widetilde{x_m}) < 1/n + \varepsilon/2 + 1/m < \varepsilon.$$

따라서 $\{\widetilde{x_n}\}$는 Y에서 Cauchy 수열이다. 이것은 $\{x_n\}$이 (X, d)에서 Cauchy 수열임을 의미한다. 따라서 어떤 $z \in \widetilde{X}$에 대하여 $\{x_n\} \in z$이다. 이제 첫번째로 $\widetilde{x_n} \to z$임을 보이고 그 다음에 $z_n \to z$임을 보이는 것은 쉽다. 이것으로 증명이 끝난다. $\square$

6.3.24 명제. (A, d_1)과 (B, d_2)를 완비거리공간이라 하자. X를 유도된 거리 d_3를 갖는 (A, d_1)의 부분집합이라 하고, Y를 유도된 거리 d_4를 갖는 (B, d_2)의 부분집합이라 하자. 더욱이, X는 (A, d_1)에서 조밀하고 Y는 (B, d_2)에서 조밀하다고 하자. 만약 등거리 함수 $f : (X, d_3) \to (Y, d_4)$가 존재하면, 어떤 등거리 함수 $g : (A, d_1) \to (B, d_2)$가 존재해서 모든 $x \in X$에 대하여 $g(x) = f(x)$이다.

증명 개요. $a \in A$라 하자. X가 (A, d_1)에서 조밀하므로, 어떤 수열 $x_n \in X$이 존재하여 $x_n \to a$이다. 따라서 $\{x_n\}$은 Cauchy 수열이다. f가 등거리 함수이므로, $\{f(x_n)\}$은 (Y, d_4)에서 Cauchy 수열이다. 그러므로 그것은 또한 (B, d_2)에서 Cauchy 수열이다. (B, d_2)가 완비거리공간이므로, 어떤 $b \in B$가 존재하여 $f(x_n) \to b$이다. 그래서 우리는 $g(a) = b$로 정의한다.

g가 A로부터 B로의 잘 정의된 함수임을 보이기 위해서는, 만약 $\{z_n\}$이 a로 수렴하는 X의 임의의 다른 수열이면, $f(z_n) \to b$임을 반드시 입증해야 한다. 이것은 $d_1(x_n, z_n) \to 0$이므로 $d_2(f(x_n), f(z_n)) = d_4(f(x_n), f(z_n)) \to 0$라는 사실로부터 나온다.

다음으로 $g : A \to B$가 단사이고 전사임을 보여야 한다. 이것은 일상적인 것이기 때문에 연습문제로 남겨둔다.

마지막으로, X 안에 있는 각각의 a_{1n}과 각각의 a_{2n}에 대하여 $a_1, a_2 \in A$ 그리고 $a_{1n} \to a_1$ 그리고 $a_{2n} \to a_2$라 하자. 그러면

$$d_1(a_1, a_2) = \lim_{n\to\infty} d_3(a_{1n}, a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} d_4(f(a_{1n}), f(a_{2n})) = d_2(g(a_1), g(a_2))$$

이다. 그러므로 g는 실제로 우리가 원하는 등거리 함수이다. □

명제 6.3.24는, 등거리 함수에 이르기까지, 거리공간의 완비화는 유일하다는 것을 말한다.

우리는 다른 개념으로 이 절을 마무리한다. 보기 6.1.9에서 노름벡터공간을 소개했던 것을 기억하자. 이제 노름벡터공간들의 매우 중요한 집합류를 정의하자.

6.3.25 정의. $(N, \|\ \|)$을 노름벡터공간 그리고 d를 집합 N 위에 관련된 거리라 하자. 만약 (N, d)가 완비거리공간이면 $(N, \|\ \|)$을 **Banach 공간**이라 부른다.

6.3.26 보기. 연습문제 6.1 #7과 #8에서 우리는 거리공간 (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), (ℓ_∞, d_∞), 그리고 (c_0, d_0)을 소개했고, 각각은 자연스러운 방법으로 노름벡터공간으로 만들 수 있다고 했다. 우리는 이러한 노름공간을 나타내기 위하여 표기법 $\boldsymbol{\ell_1}$, $\boldsymbol{\ell_\infty}$, $\boldsymbol{\ell_2}$, 그리고 $\boldsymbol{c_0}$를 사용했다. 사실상 이 모든 것은 Banach 공간이고, ℓ_1, ℓ_2, 그리고 c_0는 가분 Banach 공간이다. (연습문제 6.3 #11을 보시오.) □

명제 6.3.23으로부터 우리는 모든 노름벡터공간은 완비화를 갖는다는 것을 알고 있다. 그러나, 보다 즐거운 특징은, 사실상 이 완비화가 또한 노름벡터공간이고, 따라서 Banach 공간이라는 것이다. (연습문제 6.3 #12를 보시오.)

연습문제 6.3

1. 수열 $\{x_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\}$은 유클리드 거리를 갖는 $\mathbb{Q}$에서 Cauchy 수열임을 입증하시오. [이 수열은 $\mathbb{Q}$ 안으로 수렴하지 않는다. $\mathbb{R}$에서 그 수열은 무리수로 알려진 e에 수렴한다. e가 무리수, 사실상 초월수라는 증명에 대해서는 Jones et al. [174]을 보시오.]

2. Cauchy 수열의 모든 부분수열은 Cauchy 수열임을 증명하시오.

3. 유클리드 공간 $\mathbb{R}$의 부분수열이 Cauchy 수열이 아닌 수열의 보기를 드시오.

4. 따름정리 6.3.11을 이용하여, 각각의 양의 정수 m에 대하여, 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^m$은 완비거리공간임을 증명하시오.

   [힌트. $\{< x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn} >: n = 1, 2, \dots\}$을 $\mathbb{R}^m$에서 Cauchy 수열이라 하자. 각각의 $i = 1, 2, \dots, m$에 대하여, 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}$의 수열 $\{x_{in} : n = 1, 2, \dots\}$은 Cauchy 수열이다. 따라서 어떤 점 a_i에 수렴한다. 그 다음에 수열 $\{< x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn} >: n = 1, 2, \dots\}$은 점 $< a_1, a_2, \dots, a_m >$에 수렴한다는 것을 보이시오.]

5. **완비거리공간의 모든 닫힌 부분공간은 완비거리공간이다** 그리고 **거리공간의 모든 완비거리부분공간은 닫힌공간이다**라는 것을 증명하시오.

6. 각각의 양의 정수 n에 대하여, $\mathbb{R}^n$은 Polish 공간임을 증명하시오.

7. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$라 하자. 모든 이산공간 그리고 유도위상을 갖는 각각의 공간 $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, 그리고 $\{a\}$은 Polish 공간임을 증명하시오.

8. 만약 (X, d)가 거리공간이고 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 Cauchy 수열이면, $\{d(x_n, y_n)\}$는 $\mathbb{R}$의 Cauchy 수열임을 증명하시오.

9. 명제 6.3.23의 증명에서 빠진 자세한 사항을 채우시오.

10. 명제 6.3.24의 증명에서 빠진 자세한 사항을 채우시오.

11*. 연습문제 6.1 #7의 각각의 공간 (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), (c_0, d_0), 그리고 (ℓ_∞, d_∞)는 완비거리공간임을 보이시오. 사실상, 이러한 각각의 공간은 자연스러운 방법으로 Banach 공간임을 보이시오.

12*. X를 임의의 노름벡터공간이라 하자. 명제 6.3.23에서 만든 완비거리공간 $\widetilde{X}$ 위에 노름벡터공간 구조를 주는 것이 가능함을 증명하시오. 따라서 **모든 노름벡터공간은 완비화를 갖는데, 이것은 Banach 공간이다.**

13. (X, d)를 거리공간 그리고 S를 X의 부분집합이라 하자. 만약 어떤 양의 정수 M이 존재하여 모든 $x, y \in S$에 대하여 $d(x, y) < M$이면, 집합 S를 **유계(bounded)**집합이라고 한다 .

   (i) 만약 S가 (X, d)에서 유계인 집합이고 $S = X$이면, (X, d)는 유계 거리공간임을 보이시오. (연습문제 6.1 #2를 보시오.)

   (ii) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$을 거리공간 (X, d)에서 수렴하는 수열이라 하자. 만약 S가 이 수열의 (서로 다른) 점으로 이루어진 집합이면, S는 유계집합임을 보이시오.

   (iii) $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$을 완비거리공간 (X, d)에서 Cauchy 수열이라 하자. 만약 T가 이 수열의 점으로 이루어진 집합이면, T는 유계집합임을 보이시오.

   (iv) (X, d)가 완비가 아니라는 주장을 할지라도 위의 (iii)은 참인가?

14. 거리공간 (X, d)가 가분일 필요충분조건은 관련된 위상공간 (X, τ)가 제2가산공리를 만족함을 증명하시오. (연습문제 2.2 #4를 보시오.)

15. 위의 연습문제 14로부터 만약 (X, d)가 가분인 거리공간, 그리고 d_1이 d에 의하여 X의 부분집합 Y 위에 유도된 거리이면, (Y, d_1)은 가분임을 유도하시오; 다른 말로 말하면, **가분인 거리공간의 모든 부분공간은 가분이다**. (가분인 위상공간의 부분공간은 가분이라는 것은 반드시 참이 아님을 주목해야 한다.)

6.4 축소함수

우리는 5장에서 고정점 정리에 대하여 공부하였다. 이 절에서는 또 다른 형태의 고정점 정리에 대하여 알아보겠다. 이 절의 대부분은 일반위상보다는 거리공간에 관한 것이다. 하지만 이 주제는 응용에 있어서 중요하다.

6.4.1 정의. f가 집합 X로부터 자기자신으로의 함수라고 하자. 이때, $f(x) = x$인 점 $x \in X$를 f의 **고정점(fixed point)**이라고 말한다.

6.4.2 정의. (X, d)가 거리공간이고 f가 X로부터 자기자신으로의 함수라고 하자. 다음을 만족하는 $r \in (0, 1)$이 존재할 때, f를 **축소함수(contraction mapping)**라고 말한다:

$$\text{모든 } x_1, x_2 \in X\text{에 대하여,} \quad d(f(x_1), f(x_2)) \leq r.d(x_1, x_2).$$

6.4.3 명제. f가 거리공간 (X, d)의 축소함수라고 하자. 그러면 f는 연속함수이다.

증명. 연습문제 6.4 #1을 보시오. □

6.4.4 정리. (축소함수 정리(Contraction Mapping Theorem) 혹은 Banach 고정점 정리(Banach Fixed Point Theorem)) (X,d)가 완비거리공간이고 f가 (X,d)로부터 자기자신으로의 축소함수라고 하자. 그러면 f는 정확히 한 개의 고정점을 갖는다.

증명. x가 X의 임의의 점이라 하고 수열

$$x,\ f(x),\ f^2(x)=f(f(x)),\ f^3(x)=f(f(f(x))),\ \ldots,\ f^n(x),\ldots$$

을 생각하자. 우리는 이 수열이 Cauchy 수열임을 보이겠다. $a=d(x,f(x))$이라 놓자. f는 축소함수이기 때문에, 다음을 만족하는 $r\in(0,1)$이 존재한다:

$$\text{모든 } x_1,x_2\in X\text{에 대하여,}\qquad d(f(x_1),f(x_2))\le r.d(x_1,x_2).$$

분명히 $d(f(x),f^2(x))\le r.d(x,f(x))=r.a$, $d(f^2(x),f^3(x))\le r^2.d(x,f(x))=r^2.a$이고, 귀납법에 의하여 다음을 얻는다: 각각의 $k\in\mathbb{N}$에 대하여 $d(f^k(x),f^{k+1}(x))\le r^k.d(x,f(x))=r^k.a$.

m과 n이 양의 정수들로서 $n>m$이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}
d(f^m(x),f^n(x)) &= d(f^m(x),f^m(f^{n-m}(x)))\\
&\le r^m.d(x,f^{n-m}(x))\\
&\le r^m.[d(x,f(x))+d(f(x),f^2(x))+\cdots+d(f^{n-m-1}(x),f^{n-m}(x))]\\
&\le r^m.d(x,f(x))[1+r+r^2+\cdots+r^{n-m-1}]\\
&\le \frac{r^m.a}{1-r}
\end{aligned}$$

이다. $r<1$이므로, 분명히 $\{f^n(x)\}$는 Cauchy 수열이다. (X,d)가 완비이므로, $f^n(x)\to z$을 만족하는 $z\in X$가 존재한다.

명제 6.4.3에 의해, f는 연속이므로

$$f(z)=f\left(\lim_{n\to\infty}f^n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}f^{n+1}(x)=z \tag{6.1}$$

이다. 따라서 z는 f의 고정점이다.

마지막으로 t가 f의 임의의 고정점이라고 하자. 그러면

$$d(t,z)=d(f(t),f(z))\le r.d(t,z) \tag{6.2}$$

이다. $r<1$이므로 $d(t,z)=0$이다. 그러므로 $t=z$이고 f는 오직 한 개의 고정점을 갖는다. □

특히 언급할 만한 것은 축소함수 정리가 고정점의 존재성 증명 뿐만 아니라 그것을 찾는 방법을 제공해 준다는 것이다; 즉, x가 X의 임의의 점이고 수열 $\{f^n(x)\}$의 극한을 찾는다. 이 방법은 우리가 원하는 정확도로 극한의 근삿값을 구하기 위해 컴퓨터 프로그램을 쓸 수 있도록 해준다.

연습문제 6.4

1. 명제 6.4.3을 증명하시오.

2. 축소함수 정리 6.4.4의 확장인 다음을 보이시오: f가 완비거리공간 (X, d)로부터 자기자신으로의 함수이고 어떤 양의 정수 N에 대하여 f^N이 축소함수이면, f는 정확히 한 개의 고정점을 갖는다.

3. **평균값 정리(Mean Value Theorem)**란 다음을 말한다: **f가 닫힌 단위구간 $[a, b]$ 위의 실숫값 함수로 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분가능하다고 하자. 그러면**

   $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

   을 만족하는 점 $c \in [a, b]$가 존재한다. (f가 점 s에서 **미분가능(differentiable)**하다는 것은 $\lim\limits_{x \to s} \frac{f(x) - f(s)}{x - s} = f'(s)$가 존재할 때임을 상기하자.)
   평균값 정리를 이용하여 다음을 증명하시오:

   $f : [a, b] \to [a, b]$가 미분가능하다고 하자. 그러면 f가 축소함수일 필요충분조건은 $r \in (0, 1)$이 존재해서 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $|f'(x)| \leq r$이다.

4. 위의 연습문제 3과 2를 이용하여 다음을 보이시오: $f(x) = \cos x$로 주어진 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 축소함수 정리의 조건을 만족하지 않지만 유일한 고정점을 갖는다.

6.5 Baire 공간

6.5.1 정리. (Baire 범주 정리(Baire Category Theorem)) (X,d)가 완비거리공간이라고 하자. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$이 X의 조밀하면서 열린 부분집합들의 수열이라면, 집합 $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ 또한 X에서 조밀하다.

증명. (X,d)의 임의의 열린 부분집합 U에 대하여 $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$을 보이는 것으로 충분하다.

X_1이 X에서 조밀하고 열려 있으므로, 집합 $U \cap X_1$은 (X,d)의 공집합이 아닌 열린 부분집합이다. 열린공 U_1의 반경이 기껏해야 1이고 $\overline{U_1} \subset U \cap X_1$을 만족한다고 하자.

귀납적으로 각각의 양의 정수 $n > 1$에 대하여, 열린공 U_n의 반경이 기껏해야 $1/n$이고 $\overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap X_n$을 만족하도록 정의하자.

각각의 양의 정수 n에 대하여, x_n이 U_n의 임의의 점이라고 하자. 분명히 그 수열 $\{x_n\}$은 Cauchy 수열이다. (X,d)가 완비거리공간이므로, 이 수열은 한 점 $x \in X$로 수렴한다.

모든 양의 정수 m에 대하여 그 수열 $\{x_n\}$의 모든 항들은 닫힌집합 $\overline{U_m}$에 속함을 관찰하자. 따라서 극한 x는 집합 $\overline{U_m}$에 속한다.

그러면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x \in \overline{U_n}$이다. 그러므로 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$이다.

한편 $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \ni x$이기 때문에, $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$이 성립한다. 이것으로 정리의 증명이 완료되었다. □

연습문제 3.2 #5에서 우리는 위상공간의 한 부분집합의 내부의 개념을 소개했었다. 우리는 이제 외부 뿐만 아니라 경계라는 용어를 정식으로 정의한다.

6.5.2 정의. $(X,\mathcal{T})$가 위상공간이고 A가 X의 부분집합이라고 하자. A에 포함되는 가장 큰 열린집합을 A의 **내부(interior)**라고 부르고 **Int(A)**으로 나타낸다. 각각의 점 $x \in \text{Int}(A)$를 A의 **내점(interior point)**이라고 부른다. A의 여집합의 내부인 집합 $\text{Int}(X \setminus A)$는 **Ext$(A)$**으로 나타내고, A의 **외부(exterior)**라고 부른다. 그리고 $\text{Ext}(A)$에 있는 각각의 점을 A의 **외점(exterior point)**이라고 부른다. 집합 $\overline{A} \setminus \text{Int}(A)$을 A의 **경계(boundary)**라고 부르고 A의 경계에 있는 각각의 점을 A의 **경계점(boundary point)**이라고 부른다.

정의 6.5.2에서, 집합 X는 A의 내부, A의 외부, A의 경계의 합집합이고 이러한 세 집합들 각각은 다른 두 집합들의 각각과 서로소이다.

6.5.3 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 A에 대하여 $\overline{A}$의 내부가 공집합(empty interior)일 때, A를 **조밀한 곳이 없는(nowhere dense)** 집합이라고 말한다.

이 정의들은 정리 6.5.1을 다음처럼 바꾸어 표현할 수 있도록 해준다.

6.5.4 따름정리. **(Baire 범주 정리(Baire Category Theorem))** (X, d)가 완비거리공간이라고 하자. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$이 X의 부분집합들의 수열로서 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$이면, 적어도 하나의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, 집합 $\overline{X_n}$은 공집합이 아닌 내부를 갖는다; 즉, X_n은 조밀한 곳이 없는 집합이 아니다.

증명. 연습문제 6.5 #2. □

6.5.5 정의. 위상공간 X의 조밀하면서 열린 부분집합들로 이루어진 모든 수열 $\{X_n\}$에 대하여 $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$이 X에서 조밀할 때, X를 **Baire 공간(Baire space)**이라고 말한다.

6.5.6 따름정리. 모든 완비거리화가능공간은 Baire 공간이다. □

6.5.7 주목. 따름정리 6.5.6은 거리공간 이론보다는 위상에서의 결과임을 주목하는 것이 중요하다.

또한 완비거리화가능하지 않은 Baire 공간이 존재함을 주목하자. (연습문제 6.5 #6 (iv)를 보시오.) □

6.5.8 보기. 위상공간 $\mathbb{Q}$는 Baire 공간이 아니므로 완비거리화가능하지 않다. 이것을 보이기 위해서 유리수들의 집합은 가산임을 주목하고 $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$이라고 하자. 각각의 집합 $X_n = \mathbb{Q} \setminus \{x_n\}$은 $\mathbb{Q}$에서 조밀하고 열려 있지만, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$이다. 그러므로 $\mathbb{Q}$는 Baire 공간이 아니다. □

6.5.9 주목. 우리가 주목해야 할 것은 (Baire 범주 정리 6.5.4를 얻었듯이) $\mathbb{Q}$가 Baire 공간이 아니라는 더 일반적인 결과보다 $\mathbb{Q}$가 완비거리화가능하지 않다는 것을 증명하는 것이 더 어려웠다.

위상 뿐만 아니라 수학에서 놀랍고 중요한 특징은 **더 일반적인 결과를 증명하기가 때때로 더 쉽다는 것이다.** □

6.5.10 정의. Y가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라고 하자. Y가 X의 조밀한 곳이 없는 부분집합들의 가산개의 합집합일 때, Y를 $(X, \mathcal{T})$에서 **제1범주(first category)** 집합 또는 **meager** 집합이라고 말한다. Y가 제1범주가 아니면, 그것을 $(X, \mathcal{T})$에서 **제2범주(second category)** 집합이라고 말한다.

Baire 범주 정리 6.5.4는 해석학에서 많은 응용을 갖지만, 이것들은 우리의 위상 공부 바깥에 놓여 있다. 하지만 우리는 Banach 공간 이론에서 중요한 정리인 열린함수 정리(Open Mapping Theorem)를 다루고 이 절을 마무리짓겠다. 이 정리는 Baire 범주 정리 6.5.4의 결과이다.

명제. Y가 Baire 공간 $(X, \mathcal{T})$의 제1범주 집합이면, Y의 내부는 공집합이다.

증명. Y가 제1범주이기 때문에, 조밀한 곳이 없는 Y_n, $n \in \mathbb{N}$들에 대하여 $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$이다.

$U \in \mathcal{T}$가 $U \subseteq Y$을 만족한다고 하자. 그러면 $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}$이다.

그래서 $X \setminus U \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{Y_n})$이고, 각각의 $X \setminus \overline{Y_n}$들은 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀한 열린 부분집합이다. $(X, \mathcal{T})$가 Baire이기 때문에, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{Y_n})$은 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀하다. 따라서 닫힌집합 $X \setminus U$는 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀하다. 이것은 $X \setminus U = X$를 함의한다. 그러므로 $U = \emptyset$이다. 이것으로 증명을 완료하였다.□

6.5.12 따름정리. Y가 Baire 공간 $(X, \mathcal{T})$의 제1범주 부분집합이면, $X \setminus Y$는 제2범주 집합이다.

증명. 그렇지 않다면, Baire 공간 $(X, \mathcal{T})$는 조밀한 곳이 없는 집합들의 가산개의 합집합일 것이다. □

6.5.13 주목. $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$의 제1범주 부분집합이므로, 따름정리 6.5.12로부터 무리수들의 집합 $\mathbb{P}$는 제2범주 집합이다. □

6.5.14 정의. S가 실벡터공간 V의 부분집합이라고 하자. 각각의 $x, y \in S$와 모든 실수 $0 < \lambda < 1$에 대하여, 점 $\lambda x + (1 - \lambda)y$가 S에 속할 때, 그 집합 S를 **볼록(convex)**이라고 말한다.

명백히 벡터공간의 모든 부분공간은 볼록이다. 또한 임의의 노름벡터공간에서 모든 열린구와 모든 닫힌구도 볼록이다.

6.5.15 정리. (열린함수 정리(Open Mapping Theorem)) $(B, || \ ||)$와 $((B_1, || \ ||_1)$ 이 Banach 공간이고 $L : B \to B_1$이 B로부터 B_1 위로의 (벡터공간 의미에서) 연속인 선형함수라고 하자. 그러면 L은 열린함수이다.

증명. 연습문제 6.5 #1 (iv)에 의하여, $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 어떤 $s > 0$에 대하여 $L(B_N(0)) \supset B_s(0)$임을 보이는 것으로 충분하다.

명백히 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0)$이고 L는 전사이므로, $B_1 = L(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B_n(0))$이다.

B_1이 Banach 공간이므로, Baire 범주 정리의 따름정리 6.5.4에 의하여 $\overline{L(B_N(0))}$가 공집합이 아닌 내부를 갖게 되는 $N \in \mathbb{N}$이 존재한다.

그래서 $B_t(z) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$을 만족하는 $z \in B_1$와 $t > 0$가 존재한다.

연습문제 6.5 #3에 의해, 일반성을 잃지 않고 $z \in L(B_N(0))$을 가정할 수 있다.

반면에 $B_t(z) = B_t(0) + z$이고

$$B_t(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} - z = \overline{L(B_N(0)) - z} \subseteq \overline{L(B_N(0)) - L(B_N(0))} \subseteq \overline{L(B_{2N}(0))}$$

이므로, L의 선형성에 의하여 $B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$이다.

우리는 이제 이것이 $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$을 함의함을 보일 것이다.

$w \in B_{t/2}(0)$라고 하자. 그러면 $||w - L(x_1)||_1 < \frac{t}{4}$을 만족하는 $x_1 \in B_N(0)$이 존재한다.

L의 선형성에 의하여, 각각의 정수 $k > 0$에 대하여

$$B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} \Longrightarrow B_{t/(2k)}(0) \subseteq \overline{L(B_{N/k}(0))}$$

임을 주목하자.

따라서

$$||(w - L(x_1)) - L(x_2)||_1 = ||w - L(x_1) - L(x_2)||_1 < \frac{t}{8}$$

을 만족하는 $x_2 \in B_{N/2}(0)$가 존재한다.

이 방법을 계속함으로써, 우리는 귀납법에 의하여 $||x_m|| < \frac{N}{2^{m-1}}$과

$$||w - L(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)||_1 = ||w - L(x_1) - L(x_2) - \cdots - L(x_m)||_1 < \frac{t}{2^m}$$

을 만족하는 수열 $\{x_m\}$을 얻는다.

B가 완비이므로, 급수 $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$은 극한 a로 수렴한다.

명백히 $||a|| < 2N$이고 L의 연속성에 의하여, $w = L(a) \in L(B_{2N}(0))$이다.

따라서 $B_{t/2}(0) \subseteq L(B_{2N}(0))$이고, 그러므로 $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$은 그 증명을 완료한다. □

열린함수 정리의 따름정리인 다음은 바로 얻어지며 매우 중요한 특별한 경우이다.

6.5.16 따름정리. 한 Banach 공간으로부터 또 다른 Banach 공간으로의 일대일이고 연속인 선형함수는 위상동형함수이다. 특히, 한 Banach 공간으로부터 자기자신 위로의 일대일이고 연속인 선형함수는 위상동형함수이다. □

연습문제 6.5

1. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이라고 하자. 함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$를 **열린함수(open mapping)**라고 함은 $(X, \mathcal{T})$의 각각의 열린 부분집합 A에 대하여 집합 $f(A)$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$에서 열려 있음을 말한다.

   (i) f가 열린함수일 필요충분조건은 각각의 $U \in \tau$와 각각의 $x \in U$에 대하여, 집합 $f(U)$가 $f(x)$의 근방임을 보이시오.

   (ii) (X, d)와 (Y, d_1)이 거리공간이고 f가 X로부터 Y 위로의 함수라고 하자. f가 열린함수일 필요충분조건은 각각의 $n \in \mathbb{N}$과 각각의 $x \in X$에 대하여, $f(B_{1/n}(x)) \supseteq B_r(f(x))$을 만족하는 $r > 0$이 존재함을 증명하시오.

   (iii) $(N, \|\ \|)$과 $(N_1, \|\ \|_1)$이 노름벡터공간이고 f가 N으로부터 N_1으로의 선형함수라고 하자. f가 열린함수일 필요충분조건은 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(B_{1/n}(0)) \supseteq B_r(0)$을 만족하는 $r > 0$이 존재함을 증명하시오.

   (iv) $(N, \|\ \|)$과 $(N_1, \|\ \|_1)$이 노름벡터공간이고 f가 N으로부터 N_1으로의 선형함수라고 하자. f가 열린함수일 필요충분조건은 어떤 $s > 0$에 대하여 $f(B_s(0)) \supseteq B_r(0)$을 만족하는 $r > 0$이 존재함을 증명하시오.

2. Baire 범주 정리 6.5.1을 이용하여 따름정리 6.5.4를 증명하시오.

3. A가 Banach 공간 B의 부분집합이라고 하자. 다음이 동치임을 증명하시오:

   (i) 집합 $\overline{A}$는 공집합이 아닌 내부를 갖는다;

   (ii) $B_t(z) \subseteq \overline{A}$을 만족하는 $z \in \overline{A}$와 $t > 0$가 존재한다;

   (ii) $B_r(y) \subseteq \overline{A}$을 만족하는 $y \in A$와 $r > 0$이 존재한다.

4. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 점 x가 **고립점(isolated point)**이라 함은 $\{x\} \in \mathcal{T}$임을 말한다. S가 X의 부분집합일 때, S의 모든 극한점들의 집합을 S'으로 나타내고, S의 **도집합(derived set)**이라고 말한다. $S' = S$일 때, S를 **완전집합(perfect set)**이라고 말하고, $S = X$인 경우 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **완전공간(perfect space)**이라고 말한다.

   (i) $(X, \mathcal{T})$가 고립점이 없는 가산인 T_1-공간이면 Baire 공간이 아님을 증명하시오.

   (ii) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에서 S가 완전집합일 필요충분조건은 S가 닫힌집합이고 고립점을 갖지 않음을 증명하시오. $(X, \mathcal{T})$가 완전공간일 필요충분조건은 그것이 고립점을 갖지 않음을 증명하시오.

   (iii) $(X, \mathcal{T})$가 완전공간이고 A가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합이거나 조밀한 집합이면, A가 고립점을 갖지 않음을 증명하시오.

5. (i) 따름정리 6.5.4에 있는 Baire 범주 정리를 이용하여, $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{P}$가 F_σ-집합이 아니고 $\mathbb{Q}$가 G_δ-집합이 아님을 증명하시오.
   [힌트. $\mathbb{R}$의 각각의 닫힌 부분집합 F_n에 대하여 $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$이라고 가정하고, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$에 따름정리 6.5.4를 적용하시오.]

   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$로부터 자기자신으로의 함수라고 하자. f가 **점 $a \in \mathbb{R}$에서 연속(continuous at a point $a \in \mathbb{R}$)**이라 함은 $f(a)$를 포함하는 각각의 열린집합 U에 대하여, a를 포함하는 열린집합 V가 존재하여 $f(V) \subseteq U$를 만족함을 말한다. f가 연속이 되게 하는 $\mathbb{R}$에 있는 점들의 집합이 G_δ-집합임을 증명하시오.

   (iii) (i)과 (ii)로부터 모든 유리수들의 집합에서만 연속인 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 존재하지 않음을 유도하시오.

6. (i) $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고, Y와 S가 X의 조밀한 부분집합이라고 하자. 또한 S가 $(X, \mathcal{T})$에서 열려 있을 때, $S \cap Y$가 X와 Y 둘 다에서 조밀함을 증명하시오.

   (ii) $\mathcal{T}_1$이 X 위의 $\mathcal{T}$에 의해 Y 위에 유도된 위상이라고 하자. $\{X_n\}$이 Y의 조밀한 열린 부분집합들의 수열이라고 하자. (i)을 이용하여, $\{X_n \cap Y\}$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 조밀한 열린 부분집합들의 수열임을 보이시오.

   (iii) 정의 6.5.5와 위의 (ii)로부터, $(Y, \mathcal{T}_1)$이 Baire 공간이면 $(X, \mathcal{T})$ 또한 Baire 공간임을 유도하시오. [따라서 **Baire 공간의 폐포는 Baire 공간이다**.]

   (iv) (iii)을 이용하여, 다음과 같이 주어진 $\mathbb{R}^2$의 부분공간 $(Z, \mathcal{T}_2)$가 Baire 공간임을 보이시오:

$$Z = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\} \cup \{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{Q}\},$$

   하지만, 완비거리화가능하지 않은 $\mathbb{Q}$와 위상동형인 닫힌 부분공간 $\{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{Q}\}$으로서 완비거리화가능하지 않다는 것을 보이시오. 이것은 또한 **Baire 공간의 닫힌 부분공간이 반드시 Baire 공간인 것은 아님을 보여준다**.

7. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 위상공간이고 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 연속인 열린함수라고 하자. $(X, \mathcal{T})$가 Baire 공간일 때, $(X, \mathcal{T}_1)$이 Baire 공간임을 증명하시오. [따라서 **Baire 공간의 연속인 열린 상은 Baire 공간이다.**]

8. $(Y, \mathcal{T}_1)$이 Baire 공간 $(X, \mathcal{T})$의 열린 부분공간이라고 하자. $(Y, \mathcal{T})$가 Baire 공간임을 증명하시오. [따라서 **Baire 공간의 열린 부분공간은 Baire 공간이다.**]

9. $(X,\mathcal{T})$가 위상공간이라고 하자. 함수 $f:(X,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$가 **하반연속(lower semicontinuous)** 이라 함은 각각의 $r\in\mathbb{R}$에 대하여, 집합 $f^{-1}((-\infty,r])$이 $(X,\mathcal{T})$에서 닫혀 있음을 말한다. 함수 $f:(X,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$가 **상반연속(upper semicontinuous)**이라 함은 각각의 $r\in\mathbb{R}$에 대하여, 집합 $f^{-1}((-\infty,r))$이 $(X,\mathcal{T})$에서 열려 있음을 말한다.

   (i) f가 연속일 필요충분조건은 그것이 하반연속이고 상반연속임을 증명하시오.

   (ii) $(X,\mathcal{T})$가 Baire 공간, I가 첨수집합, 그리고 각각의 $x\in X$에 대하여, 집합 $\{f_i(x):i\in I\}$이 위로유계라고 하자. 여기서 각각의 함수 $f_i:(X,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$는 하반연속이다. Baire 범주 정리를 이용하여 다음을 증명하시오: $(X,\mathcal{T})$의 열린 부분집합 O가 존재해서 집합 $\{f_i(x):x\in O,\, i\in I\}$은 위로유계이다.
   [힌트. $X_n=\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}((-\infty,n])$이라고 하자.]

10. B가 Banach 공간으로서 기본이 되는 벡터공간(underlying vector space)이 가산이라고 하자. Baire 범주 정리를 이용하여 기본이 되는 벡터공간의 차원이 사실 유한임을 증명하시오.

11. $(N,\|\ \|)$이 노름벡터공간이고 $(X,\mathcal{T})$가 $(N,\|\ \|)$의 볼록인 부분집합으로서 그것의 유도된 위상을 가지고 있다고 하자. $(X,\mathcal{T})$가 길연결임을 보이시오. 따라서 그것은 또한 연결이다. $(N,\|\ \|)$ 자기자신이 길연결인 것처럼 $(N,\|\ \|)$에 있는 모든 열린구가 길연결임을 유도하시오.

12. S가 S의 경계의 진부분집합인 $\mathbb{R}$의 부분집합 S를 찾으시오.

6.6 후기

여러분이 아직 보지 않았다면, 수열과 그물에 관한 YouTube 비디오들을 보아야 한다. 이것들은
"Topology Without Tears – Video 3a & 3b– Sequences and Nets"
이라 불리고 YouTube의
http://youtu.be/wXkNgyVg0JE와 http://youtu.be/xNqLF8GsRFE
그리고 중국의 Youku 사이트
http://tinyurl.com/kxdefsm와 http://tinyurl.com/kbh93so
또는 다음 링크
http://www.topologywithouttears.net
에서 찾을 수 있다.

거리공간 이론은 그 자체만으로도 중요한 주제이다. 뿐만 아니라 거리공간들은 위상을 공부하는 데 있어서 중요한 위치에 자리잡고 있다. 실제로 위상에 관한 많은 서적들은 거리공간으로 시작하고, 그것들로 하여금 위상을 공부하는 것에 동기를 부여한다.

우리는 같은 집합 위의 서로 다른 거리들이 같은 위상을 생성하는 것을 보았다. 그러한 거리들을 동치인 거리(equivalent metrics)라고 부른다. 함수공간의 공부에서 특히 C$[0,1]$에서 소개하였다. 도중에 우리는 함수해석에서의 중심주제인 노름벡터공간을 접했다.

모든 위상공간이 거리공간으로부터 생성되는 것은 아니다. 우리는 거리에 의해 유도된 위상들이 Hausdorff라는 것을 관찰함으로써 이것을 보았다.

우리는 거리공간의 위상이 그것의 수렴하는 수열들로 완전히 묘사될 수 있음을 보았고 또한 거리공간들 사이의 연속함수들로 묘사될 수 있음을 보았다.

연습문제 6.2 #9에서는 거리공간에서 집합들 사이의 흥미로운 거리개념을 소개하였다.

우리는 Cauchy 수열, 완비거리공간, 완비거리화가능공간, Banach 공간, Polish 공간, 그리고 Souslin 공간들의 개념을 접했다. 완비화는 해석학에서의 응용에 중심역할을 하기 때문에 거리공간 이론에서 중요한 주제이다. Banach 공간들은 완비인 노름벡터공간들이고 해석학의 많은 문맥에 사용되며 풍부한 구조 이론을 가지고 있다. 우리는 모든 거리공간이 완비화를 가지고 있음을 보았고,

그것이 완비거리공간에 등거리적으로 묻힐(embedded isometrically) 수 있음을 보았다. 예를 들어 모든 노름벡터공간은 Banach 공간인 완비화를 가지고 있다.

축소함수는 고정점의 개념에서 소개되었으며 우리는 Banach 고정점 정리 6.4.4로도 알려져 있는 축소함수 정리 6.4.4의 증명을 보았다. 이것은 응용에서 예를 들어 미분방정식의 해의 존재성 증명에서 매우 유용한 정리이다.

이 장에서 증명된 또 다른 강력한 정리는 Baire 범주 정리 6.5.1이다. 우리는 Baire 공간의 위상적 개념을 소개하였고 모든 완비거리화가능 공간은 Baire 공간임을 알았다. 도중에 제1범주 혹은 meager의 개념을 소개하였다. 그리고 나서 우리는 Banach 공간으로부터 또 다른 Banach 공간 위로의 연속인 선형함수가 열린함수여야 한다는 것을 의미하는 열린함수 정리 6.5.15를 증명하였다.

$\alpha = 1, 2, \ldots N + 1$

제 7 장

컴팩트성

소개

위상의 가장 중요한 성질은 컴팩트성이다. 컴팩트성은 수학의 여러 분야에서 중요한 역할을 한다. **컴팩트성을 이해할 때까지는 위상수학을 이해하지 못했다!**라고 말하는 것이 타당할 것이다.

그러면 컴팩트성이 무엇인가? 위상수학자들은 컴팩트성을 유한성의 일반화로 서술한다. 컴팩트 위상공간의 공식적인 정의는 위상공간이 무한개의 열린집합의 합집합의 부분집합일 때 그 위상공간이 또한 이러한 열린집합들 중 유한개의 합집합의 부분집합일 때를 말한다. 분명히 위상공간의 모든 유한 부분집합은 컴팩트이다. 그리고 이산위상공간의 부분집합이 컴팩트일 필요충분조건은 유한 부분집합임을 빨리 알 수 있다. 예를 들어 $\mathbb{R}$과 같은 보다 풍부한 위상적 구조를 갖는 위상공간으로 이동하면 무한집합이 컴팩트가 될 수 있음을 발견한다. 사실상 $\mathbb{R}$에서 모든 닫힌구간 $[a, b]$는 컴팩트이다. 그러나 이런 형태의 구간만이 $\mathbb{R}$의 유일한 컴팩트 부분집합이다.

그래서 다음 질문을 하게 된다: 정확하게 $\mathbb{R}$의 어느 부분집합이 컴팩트인가? Heine-Borel 정리 7.2.9에서 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합은 정확하게 유계이고 닫힌 부분집합임을 말할 것이다.

위상수학을 더 깊이 공부하면, 컴팩트성이 결정적인 역할을 하게 됨을 볼 것이다. 특히 위상수학을 해석학에 응용할 때 그렇다.

7.1 컴팩트 공간

7.1.1 정의. A를 위상공간 $(X,\mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 임의의 첨자집합 I와 $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$를 만족하는 모든 열린집합족 $\{O_i : i \in I\}$에 대하여 어떤 유한 부분집합족 $\{O_{i_1}, O_{i_2} \dots, O_{i_n}\}$이 존재하여 $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$를 만족하면, A를 **컴팩트**라고 부른다.

7.1.2 보기. 만약 $(X,\mathcal{T}) = \mathbb{R}$ 그리고 $A = (0,\infty)$이면, A는 컴팩트가 아니다.

증명. 각각의 양의 정수 i에 대하여, O_i를 열린구간 $(0,i)$라 놓자. 그러면, 분명히, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$이다. 그러나 $A \subseteq (0,i_1) \cup (0,i_2) \cup \cdots \cup (0,i_n)$를 만족하는 $i_1, i_2, \dots i_n$가 존재하지 *않는다*. 그러므로 A는 컴팩트가 아니다. □

7.1.3 보기. $(X,\mathcal{T})$를 임의의 위상공간 그리고 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$를 $(X,\mathcal{T})$의 임의의 유한 부분집합이라 하자. 그러면 A는 컴팩트이다.

증명. $\{O_i : i \in I\}$를 열린부분집합족이라 하고 $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$를 만족한다고 하자. 그러면 각각의 $x_j \in A$에 대하여, 어떤 O_{i_j}가 존재하여 $x_j \in O_{i_j}$를 만족한다. 그러므로 $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$이 성립한다. 따라서 A는 컴팩트이다. □

7.1.4 주목. 그러므로 보기 7.1.3으로부터 (위상공간에서) 모든 유한집합은 컴팩트임을 보았다. 실제로 "컴팩트성"은 "유한성"의 위상적 일반화로 생각할 수 있다. □

7.1.5 보기. 이산위상공간 $(X,\mathcal{T})$의 부분집합 A가 컴팩트일 필요충분조건은 A가 유한집합이다.

증명. A가 유한집합이면, 보기 7.1.3에 의하여 A는 컴팩트이다.

역으로, A를 컴팩트라 하자. 이때 각각의 $x \in A$에 대하여 $O_x = \{x\}$라 하면, $\{O_x : x \in A\}$는 단집합으로 이루어진 열린집합족이고 $A \subseteq \bigcup_{x\in A} O_x$를 만족한다. A가 컴팩트이므로 어떤 $O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_n}$가 존재하여 $A \subseteq O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_n}$이 성립한다; 즉, $A \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$이다. 그러므로 A는 유한집합이다. □

물론 모든 컴팩트 집합이 유한이면 "컴팩트성"에 대한 연구는 흥미가 없을 것이다. 그러나 곧바로 알게 될 것은, 예를 들어, 모든 닫힌구간 $[a, b]$는 컴팩트이다. 먼저, 몇 가지 용어를 소개한다.

7.1.6 정의. I를 첨자집합, $\{O_i : i \in I\}$를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 열린부분집합족, 그리고 A를 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합이라 하자. 만약 $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$가 성립하면 $\{O_i : i \in I\}$를 A의 **열린 덮개(open covering)**라고 부른다. $\{O_i : i \in I\}$의 유한 부분집합족 $\{O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_n}\}$이 $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$를 만족하면 A의 **유한 부분덮개(finite subcovering)**라고 불린다.

따라서 컴팩트의 정의를 다음과 같이 바꾸어 말할 수 있다:

7.1.7 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 A의 모든 열린덮개가 유한 부분덮개를 가지면 A를 **컴팩트(compact)**라고 부른다. 만약 컴팩트 부분집합 A가 X와 같으면, $(X, \mathcal{T})$를 **컴팩트 공간(compact space)**이라고 부른다.

7.1.8 주목. 다음 명제의 입증은 연습문제로 남겨 둔다:
A를 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 그리고 $\mathcal{T}_1$을 $\mathcal{T}$에 의하여 A 위에 유도된 위상이라 하자. 그러면 A가 $(X, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분집합일 필요충분조건은 $(A, \mathcal{T}_1)$이 컴팩트 공간이다.

[이 명제는 처음 볼 때는 자명한 것 같지만 그렇지는 않다.] $\square$

7.1.9 명제. 닫힌구간 $[0,1]$은 컴팩트이다.

증명. $\{O_i : i \in I\}$를 $[0,1]$의 임의의 열린덮개라 하자. 그러면 임의의 $x \in [0,1]$에 대하여, 어떤 O_i가 존재하여 $x \in O_i$이다. O_i가 x를 포함하는 열린집합이므로, $[0,1]$에서 열린집합인 어떤 구간 U_x가 존재하여 $x \in U_x \subseteq O_i$가 성립한다.

이제 $[0,1]$의 부분집합 S를 다음과 같이 정의하자:

$$S = \{z : [0,z]\text{는 유한개의 집합 } U_x\text{에 의하여 덮혀진다}\}.$$

[따라서 어떤 $x_1, x_2, \ldots, x_n$에 대하여, $z \in S \Rightarrow [0,z] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$이 성립한다.]

이제 $x \in S$ 그리고 $y \in U_x$이라 하자. 그러면 U_x가 x와 y를 포함하는 구간이므로, $[x,y] \subseteq U_x$이다. (여기서, 일반성을 잃지 않고 $x \leq y$임을 가정하고 있다.) 따라서

$$[0,y] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n} \cup U_x$$

이다. 그러므로 $y \in S$이다.

따라서 각각의 $x \in [0,1]$에 대하여, $U_x \cap S = U_x$ 또는 $\emptyset$이다.

이 사실로부터

$$S = \bigcup_{x \in S} U_x$$

그리고

$$[0,1] \setminus S = \bigcup_{x \notin S} U_x$$

이다. 그러므로 S는 $[0,1]$에서 열린집합이고 또한 S는 $[0,1]$에서 닫힌집합이다. 그러나 $[0,1]$은 연결공간이므로, $S = [0,1]$ 또는 $\emptyset$이다.

그런데 $0 \in S$이므로 $S = [0,1]$이다; 즉, $[0,1]$은 유한개의 U_x에 의하여 덮혀진다. 따라서 $[0,1] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots U_{x_m}$이다. 그러나 $i \in I$에 대하여, 각각의 U_{x_i}가 O_i에 포함된다. 그러므로 $[0,1] \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_m}$이고 $[0,1]$이 컴팩트임을 증명하였다. $\square$

연습문제 7.1

1. $(X, \mathcal{T})$를 비이산공간이라 하자. X의 *모든* 부분집합이 컴팩트임을 증명하시오.

2. $\mathcal{T}$를 임의의 집합 X 위의 여유한위상이라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 모든 부분집합이 컴팩트임을 증명하시오.

3. 아래의 각각의 위상공간은 컴팩트가 *아님을* 보이시오.

   (i) $(0, 1)$;

   (ii) $[0, 1)$;

   (iii) $\mathbb{Q}$;

   (iv) $\mathbb{P}$;

   (v) $\mathbb{R}^2$;

   (vi) $\mathbb{R}^2$의 부분공간으로 간주된 열린 원판 $D = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$;

   (vii) Sorgenfrey 직선;

   (viii) 보기 6.1.5의 거리 d에 의하여 유도된 위상을 갖는 $C[0, 1]$;

   (ix) 연습문제 6.1 #7의 거리 d_1, d_2, d_∞, 그리고 d_0에 의하여 유도된 위상을 갖는 각각의 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞, c_0.

4. $[0, 1]$은 Sorgenfrey 직선의 컴팩트 부분집합인가?

5. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$는 $\mathbb{Q}$의 컴팩트 부분집합인가?

6. $S = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$는 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합이지만, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$는 컴팩트 부분집합이 아님을 입증하시오.

7*. **위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트일 필요충분조건은 모든 부분기저 덮개가 유한 부분덮개를 갖는다**는 **Alexander 부분기저 정리**를 증명하시오. 다른 말로 말하면, 만약 $\mathcal{S}$가 위상 $\mathcal{T}$의 부분기저이고, $\{O_i \in \mathcal{S} : i \in I\}$가 $\mathcal{S}$의 원소로 이루어진 집합족, 그리고 $X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$이면, $O_i \in I$의 원소로 이루어진 X의 $\boxed{\text{유한}}$ 부분덮개가 존재한다.

   [힌트. Zorn의 보조정리 10.2.16를 이용하여 유한 부분덮개를 갖지 않는 열린 부분기저 덮개를 찾아라. 그러한 덮개 중에 최대인 것을 찾아라.]

7.2 Heine-Borel 정리

다음 명제는 **"컴팩트 공간의 연속인 상은 컴팩트이다"**는 것을 말한다.

7.2.1 명제. $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$를 연속인 전사함수라 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 컴팩트이다.

증명. $\{O_i : i \in I\}$를 Y의 임의의 열린덮개라 하자; 즉, $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$이다.

그러면 $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i)$이다; 즉, $X \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$이다.

그러므로 $\{f^{-1}(O_i) : i \in I\}$는 X의 열린덮개이다.

X가 컴팩트이므로, I에 속하는 어떤 $i_1, i_2, \ldots, i_n$이 존재하여

$$\begin{aligned} X &\subseteq f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{i_n}) \text{이다.} \\ \text{그래서} \quad Y &= f(X) \\ &\subseteq f(f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(O_{i_1})) \cup f(f^{-1}(O_{i_2})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(O_{i_n})) \\ &= O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n} \qquad (\text{왜냐하면 } f\text{가 전사이기 때문이다}). \end{aligned}$$

따라서 $Y \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$을 얻는다; 즉, Y는 유한개의 O_i로 덮혀졌다.

따라서 Y는 컴팩트이다. □

7.2.2 따름정리. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 위상동형인 위상공간이라 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$도 컴팩트이다. □

7.2.3 따름정리. $a < b$인 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 $[a, b]$는 컴팩트이지만, (a, b)는 컴팩트가 아니다.

증명. 위상공간 $[a, b]$는 컴팩트 공간 $[0, 1]$과 위상동형이다. 그러므로 명제 7.2.1에 의하여, $[a, b]$는 컴팩트이다.

위상공간 (a, b)는 $(0, \infty)$와 위상동형이다. 만약 (a, b)가 컴팩트라면, $(0, \infty)$도 컴팩트일 것이다, 그러나 우리는 보기 7.1.2에서 $(0, \infty)$는 컴팩트가 아니라는 것을 보았다. 따라서 (a, b)는 컴팩트가 아니다. □

7.2.4 명제. 컴팩트 공간의 모든 닫힌 부분집합은 컴팩트이다.

증명. A를 컴팩트 공간 $(X, \mathcal{T})$의 닫힌 부분집합이라 하자. $\{U_i \in \mathcal{T} : i \in I\}$를 A의 임의의 열린덮개라 하자. 그러면

$$X \subseteq (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X \setminus A);$$

즉, $\{U_i : i \in I\} \bigcup \{X \setminus A\}$는 X의 열린덮개이다. 그러므로 유한 부분덮개 $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}$, $X \setminus A$가 존재한다. [만약 $X \setminus A$가 유한 부분덮개에 속해 있지 않으면, 그것을 포함시켜도 X의 유한 부분덮개를 얻는다.]

따라서

$$X \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A)$$

이다. 그러므로,

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A)$$

이 성립한다. 이것으로부터 분명히

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k}$$

을 얻는다. (왜냐하면 $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$이기 때문에) 따라서 A는 유한 부분덮개를 갖는다. 그러므로 A는 컴팩트이다. □

7.2.5 명제. Hausdorff 공간의 컴팩트 부분집합은 닫힌집합이다.

증명. A를 Hausdorff 공간 $(X, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분집합이라 하자. 우리는 A가 그것의 모든 극한점을 포함함을 보일 것이다. 그러므로 A는 닫힌집합이 된다. $p \in X \setminus A$라 하자. 그러면 각각의 $a \in A$에 대하여, 어떤 열린집합 U_a와 V_a가 존재하여 $a \in U_a$, $p \in V_a$ 그리고 $U_a \cap V_a = \emptyset$를 만족한다.

그러면 $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$이다. A가 컴팩트이므로, A 안의 어떤 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 존재하여

$$A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$$

을 만족한다. $U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ 그리고 $V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_n}$이라 하자. 그러면 $p \in V$ 그리고 $V_a \cap U_a = \emptyset$이다. 이것으로부터 $V \cap U = \emptyset$이 성립하고 차례로 $V \cap A = \emptyset$이 성립한다. 그래서 p는 A의 극한점이 아니다. 그리고 V는 p를 포함하는 열린집합으로 A와 만나지 않는다.

따라서 A는 그것의 모든 극한점을 포함한다. 그러므로 A는 닫힌집합이다. □

7.2.6 따름정리. 거리화가능 공간의 컴팩트 부분집합은 닫힌집합이다. □

7.2.7 보기. $a < b$인 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여, 구간 $[a, b)$와 $(a, b]$는 컴팩트가 아니다. 왜냐하면 그것은 거리화가능 공간 $\mathbb{R}$의 닫힌 부분집합이 아니기 때문이다. □

7.2.8 명제. $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합은 유계이다.

증명. $A \subseteq \mathbb{R}$를 유계가 아니라고 하자. 그러면 $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$이 성립한다. 그러나 A는 유계가 아니기 때문에, $\{(-n, n) : n = 1, 2, 3, \ldots\}$는 A의 유한 부분덮개를 갖지 않는다. 그러므로 A는 컴팩트가 아니다. 따라서 $\mathbb{R}$의 모든 컴팩트 부분집합은 유계이다. □

7.2.9 정리. (Heine-Borel 정리) $\mathbb{R}$의 모든 유계인 닫힌 부분집합은 컴팩트이다.

증명. 만약 A가 $\mathbb{R}$의 유계인 닫힌 부분집합이면, $\mathbb{R}$의 적당한 원소 a와 b에 대하여 $A \subseteq [a, b]$이다. $[a, b]$가 컴팩트이고 A가 닫힌 부분집합이므로, A는 컴팩트이다. □

Heine-Borel 정리 7.2.9는 중요한 결과이다. 위의 증명이 짧은 이유는 명제 7.1.9를 먼저 증명했고 거기서 발췌했기 때문이다.

7.2.10 명제. (Heine-Borel 정리의 역) $\mathbb{R}$의 모든 컴팩트 부분집합은 유계이고 닫힌집합이다.

증명. 이것은 명제 7.2.8과 7.2.5로부터 바로 나온다. □

7.2.11 정의. A를 거리공간 (X, d)의 부분집합이라 하자. 어떤 실수 r이 존재하여 A에 속하는 모든 a_1, a_2에 대하여 $d(a_1, a_2) \leq r$를 만족할 때 A를 **유계(bounded)**라고 부른다.

7.2.12 명제. A를 거리공간 (X, d)의 컴팩트 부분집합이라 하자. 그러면 A는 유계이고 닫힌집합이다.

증명. 따름정리 7.2.6에 의하여, A는 닫힌집합이다. 이제 $x_0 \in X$를 고정하고 함수 $f : (A, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자:

$$\text{모든 } a \in A\text{에 대하여, } f(a) = d(a, x_0).$$

여기서 $\mathcal{T}$는 A 위에 유도된 위상이다. 그러면 f는 연속이고, 그래서 명제 7.2.1에 의하여 $f(A)$는 컴팩트이다. 그러므로 명제 7.2.10에 의하여 $f(A)$는 유계이다; 즉, 어떤 실수 M이 존재하여

$$\text{모든 } a \in A\text{에 대하여 } f(a) \leq M$$

이 성립한다. 그러므로 모든 $a \in A$에 대하여 $d(a, x_0) \leq M$이다. $r = 2M$이라 놓으면, 삼각부등식에 의하여, A 안의 모든 a_1과 a_2에 대하여 $d(a_1, a_2) \leq r$이다. □

$\mathbb{R}^n$은 유클리드 거리에 의하여 유도된 위상을 갖는 n-차원 유클리드 공간을 나타냄을 기억하여, $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}^n (n > 1)$으로의 Heine-Borel 정리와 그 역정리의 일반화가 가능하다. 우리는 여기서 그 결과를 서술하지만 증명은 다음 장까지 미루겠다.

7.2.13 정리. (일반화된 Heine-Borel 정리) $n \geq 1$에 대하여 $\mathbb{R}^n$의 부분집합이 컴팩트일 필요충분조건은 그것이 유계이고 닫힌 부분집합이다.

경고. 정리 7.2.13이 말하는 것은 비록 $\mathbb{R}^n$의 모든 유계인 닫힌 부분집합이 컴팩트라 할지라도, 다른 거리공간의 유계인 닫힌 부분집합이 컴팩트일 필요는 없다는 것이다. (연습문제 7.2 #9를 보시오.)

7.2.14 명제. $(X, \mathcal{T})$를 컴팩트 공간 그리고 f를 $(X, \mathcal{T})$에서 $\mathbb{R}$로의 연속함수라 하자. 그러면 집합 $f(X)$는 최대원과 최소원을 갖는다.

증명. f가 연속이기 때문에, $f(X)$는 컴팩트이다. 그러므로 $f(X)$는 $\mathbb{R}$의 유계인 닫힌 부분집합이다. $f(X)$가 유계이므로, $f(X)$는 상한을 갖는다. $f(X)$가 닫힌집합이므로, 보조정리 3.3.2에 의하여, 상한은 $f(X)$에 속한다. 그러므로 $f(X)$는 최대원(즉, 상한)을 갖는다. 비슷한 방법으로 $f(X)$가 최소원을 가짐을 보일 수 있다. $\square$

7.2.15 명제. a와 b를 $\mathbb{R}$에 속하는 실수라 하고 f를 $[a, b]$에서 $\mathbb{R}$로의 연속함수라 하자. 그러면 $\mathbb{R}$에 속하는 어떤 c와 d에 대하여, $f([a, b]) = [c, d]$이다.

증명. $[a, b]$가 연결이므로, $f([a, b])$는 $\mathbb{R}$의 연결 부분집합이다. 그러므로 $f([a, b])$는 하나의 구간이다. $[a, b]$가 컴팩트이므로, $f([a, b])$는 컴팩트이다. 따라서 $f([a, b])$는 유계인 닫힌구간이다. 따라서 $\mathbb{R}$에 속하는 어떤 c와 d에 대하여,

$$f([a, b]) = [c, d]$$

가 성립한다. $\square$

연습문제 7.2

1. $\mathbb{R}$의 다음 부분집합 중에서 어느 것이 컴팩트인가? (답변을 정당화 하시오.)

   (i) $\mathbb{Z}$;

   (ii) $\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$;

   (iii) $\{x : x = \cos y,\ y \in [0, 1]\}$;

   (iv) $\{x : x = \tan y,\ y \in [0, \pi/2)\}$.

2. $\mathbb{R}^2$의 다음 부분집합 중에서 어느 것이 컴팩트인가? (답변을 정당화 하시오.)

   (i) $\{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 4\}$;

   (ii) $\{\langle x, y\rangle : x \geq y + 1\}$;

   (iii) $\{\langle x, y\rangle : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 4\}$;

   (iv) $\{\langle x, y\rangle : 0 < x < 2,\ \ 0 \leq y \leq 4\}$.

3. $(X, \mathcal{T})$를 컴팩트 공간이라 하자. 만약 $\{F_i : i \in I\}$가 $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$를 만족하는 X의 닫힌 부분집합족이면, 어떤 유한 부분집합족

$$F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}\text{이 존재하여 } F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \emptyset$$

   임을 증명하시오.

4. 따름정리 4.3.7은 $a < b$, $c < d$인 실수 a, b, c, 그리고 d에 대하여,

   (i) $(a, b) \not\cong [c, d]$

   (ii) $[a, b) \not\cong [c, d]$.

   임을 말한다. (따름정리 4.3.7에서 했었던 연결성을 이용한 주장보다는) 컴팩트성을 이용하여 각각을 증명하시오.

5. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 위상공간, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$을 함수라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌 부분집합 A에 대하여, $f(A)$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$에서 닫한집합이면 함수 f를 **닫힌함수(closed mapping)** 라고 한다. $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린부분집합 A에 대하여, $f(A)$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$에서 열린집합이면 함수 f를 **열린함수(open mapping)**라고 한다.

   (a) 다음 조건을 만족하는 함수 f의 예를 드시오.

      (i) 열린함수이지만 닫힌함수가 아니다.

      (ii) 닫힌함수이지만 열린함수가 아니다.

      (iii) 열린함수이지만 연속함수는 아니다.

      (iv) 닫힌함수이지만 연속함수는 아니다.

      (v) 연속함수이지만 열린함수가 아니다.

      (vi) 연속함수이지만 닫힌함수가 아니다.

   (b) 만약 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$가 컴팩트 Hausdorff 공간, 그리고 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 연속함수이면, f는 닫힌함수임을 증명하시오.

6. $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$을 연속인 전단사함수라 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트 그리고 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 Hausdorff이면, f는 위상동형함수임을 증명하시오.

7. $\{C_j : j \in J\}$를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 닫힌 컴팩트 부분집합들의 집합족이라 하자. $\bigcap_{j \in J} C_j$는 컴팩트임을 증명하시오.

8. n을 양의 정수, d를 $\mathbb{R}^n$ 위의 유클리드 거리, 그리고 X를 $\mathbb{R}^n$의 부분집합이라 하자. X가 $(\mathbb{R}^n, d)$에서 유계일 필요충분조건은 어떤 양의 실수 M이 존재하여 모든 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in X$에 대하여, $-M \leq x_i \leq M (i = 1, 2, \ldots, n)$임을 증명하시오.

9. $(C[0,1], d^*)$를 보기 6.1.6에서 정의된 거리공간이라 하자. $B = \{f : f \in C[0,1]$ 그리고 $d^*(f,0) \leq 1\}$라 하자. 여기서 0은 모든 원소를 0에 대응시키는 $[0,1]$로부터 $\mathbb{R}$로의 상수함수를 나타낸다. (집합 B를 **닫힌 단위구(closed unit ball)**라고 부른다.)

   (i) B는 $(C[0,1], d^*)$에서 유계인 닫힌집합임을 입증하시오.

   (ii) B는 컴팩트가 아님을 증명하시오.

   [힌트: $\{B_i : i \in I\}$를 반경이 $\frac{1}{2}$인 $(C[0,1], d^*)$의 모든 열린구들의 집합족이라 하자. 그러면 $\{B_i : i \in I\}$는 B의 열린덮개이다. 유한 부분덮개 $B_1, B_2, \ldots B_N$이 존재한다고 가정하시오. $\alpha = 1, 2, \ldots N+1$에 대하여 $f_\alpha(x) = \sin(2^{N-\alpha}\pi x)$로 정의된 $(N+1)$개의 함수 $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$를 생각하시오.]

   (a) 각각 $f_\alpha \in B$임을 입증하시오.

   (b) $f_{N+1}(1) = 1$ 그리고 모든 $m \leq N$에 대하여 $f_m(1) = 0$임을 관찰하여, $f_{N+1} \in B_1$이면 $f_m \notin B_1 (m = 1, \ldots, N)$임을 유도하시오.

   (c) $f_N(\frac{1}{2}) = 1$과 모든 $m \leq N-1$에 대하여 $f_m(\frac{1}{2}) = 0$임을 관찰하여, $f_N \in B_2$이면 $f_m \notin B_2 (m = 1, \ldots, N-1)$임을 유도하시오.

   (d) 이 과정을 계속하여, $f_1, f_2, \ldots, f_{N+1}$이 서로 다른 B_i에 속함을 보이시오 – 이것은 모순이다.]

10. 모든 컴팩트 Hausdorff 공간은 정규공간임을 증명하시오.

11.* A와 B를 Hausdorff 공간 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 컴팩트 부분집합이라 하자. 서로소인 두 열린집합 G와 H가 존재하여 $A \subseteq G$ 그리고 $B \subseteq H$를 만족함을 증명하시오.

12. $(X, \mathcal{T})$를 무한 위상공간이라 하고 모든 부분공간이 컴팩트성을 만족한다고 하자. $(X, \mathcal{T})$는 Hausdorff 공간이 아님을 증명하시오.

13. 컴팩트가 아닌 모든 비가산 위상공간은 컴팩트인 비가산개의 부분집합과 컴팩트가 아닌 비가산개의 부분집합을 가지고 있음을 증명하시오.

14. $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 공간이고 X가 아닌 모든 닫힌 부분공간이 컴팩트이면, $(X, \mathcal{T})$는 컴팩트임을 증명하시오.

15. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 A의 폐포 $\overline{A}$가 컴팩트이면, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **상대컴팩트 (relatively compact)**라고 부른다. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 공간이면, 다음이 성립함을 입증하시오:

 (i) $(X, \mathcal{T})$의 모든 컴팩트 부분집합은 상대컴팩트이다;

 (ii) $(X, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분집합의 모든 부분집합은 상대컴팩트이다;

 (iii) $(X, \mathcal{T})$가 유클리드 위상을 갖는 $\mathbb{R}$이면, 열린구간 $(0, 1)$은 상대컴팩트이다;

 (iv) $(X, \mathcal{T})$가 유클리드 위상을 갖는 $\mathbb{R}$이면, $\mathbb{Z}$는 상대컴팩트 부분집합이 아니다;

 (v) 집합 $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$의 상대컴팩트 부분집합인가?

 (vi) $\mathbb{R}$의 컴팩트가 아닌 비가산개의 상대컴팩트 부분집합이 존재한다;

 (vii) 무한 이산공간은 컴팩트 Hausdorff 공간의 상대컴팩트 부분집합이 될 수 있다.

 [힌트: $\mathbb{R}$의 수렴하는 무한수열을 생각하거나 정의 10.4.1을 이용하시오.]

 (viii) 무한 이산 부분군은 Hausdorff 위상군의 상대컴팩트 부분집합이 될 수 없다.

 [힌트: 명제 A5.2.8을 이용하시오.]

16.* $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 위상 $\mathcal{T}$에 대한 부분기저 $\mathcal{S}$가 존재해서 S의 원소로 이루어진 X의 열린덮개 $\{O_i \in \mathcal{S} : i \in I\}$에 대하여, 어떤 $j, k \in I$가 존재하여 $X = O_j \cup O_k$를 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **초컴팩트(supercompact) 공간**이라고 불린다. 유클리드 위상을 갖는 $[0, 1]$은 초컴팩트임을 증명하시오.

17. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 가산 열린덮개가 유한 부분덮개를 가지면, $(X, \mathcal{T})$를 **가산컴팩트 (countably compact)**라고 부른다.

    (i) 모든 컴팩트 공간은 가산컴팩트임을 보이시오.

    (ii) 거리화가능 공간이 가산컴팩트일 필요충분조건은 컴팩트임을 증명하시오.

    (iii) 국소컴팩트 Hausdorff 공간이지만 가산컴팩트가 아닌 예를 찾으시오.

    (iv) 가산컴팩트 공간의 연속인 상은 가산컴팩트임을 보이시오.

    (v) 위의 (iv)와 (ii) 그리고 명제 7.2.14를 이용하여, 만약 f가 가산컴팩트 공간 $(X, \mathcal{T})$에서 $\mathbb{R}$로의 연속함수이면, $f(X)$가 최대원과 최소원을 가짐을 증명하시오.

    (vi) 가산컴팩트 공간의 닫힌 부분공간은 가산컴팩트임을 보이시오.

    (vii) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 가산컴팩트일 필요충분조건은 유한 교집합 성질을 갖는 닫힌 부분집합들의 가산집합족의 교집합이 공집합이 아님을 증명하시오.

    (viii) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 가산컴팩트일 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$의 공집합이 아닌 닫힌 부분집합들의 감소수열 $S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$ 에 대하여 교집합 $\bigcap_{n=i}^{\infty} S_i$은 공집합이 아님을 증명하시오.

    (ix) (vii)을 이용하여, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 가산컴팩트일 필요충분조건은 X의 가산 무한 부분집합은 극한점을 갖는다는 것임을 증명하시오.

18. 정의 6.2.1로부터 거리공간에서 수렴하는 수열의 개념을 정의했다. 이제 이 개념을 위상공간에서 수렴하는 수열로 일반화하자. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$를 X의 수열이라 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$의 점 x를 포함하는 각각의 열린집합 U에 대하여, 어떤 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 모든 $n \geq N$에 대하여 $x_n \in U$이면, 이 수열이 x로 **수렴한다(converge)**고 한다; 이것을 $\boldsymbol{x_n \to x}$로 나타낸다. $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$을 X의 수열이라 하자. 만약 어떤 점 $y \in Y$가 존재하여 $y_n \to y$이면, **수렴하는(convergent)** 수열이라고 말한다.

    (i) $(X, \mathcal{T})$를 Hausdorff 공간이라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 모든 수렴하는 수열은 오직 하나의 극한을 가짐을 증명하시오.

    (ii) 어떤 위상공간 $(Z, \mathcal{T})$에서는 무수히 많은 극한을 갖는 수열의 예를 드시오.

19. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 수열이 수렴하는 부분수열을 가지면 $(X, \mathcal{T})$를 **점렬컴팩트(sequentially compact)**라고 부른다. **모든 점렬컴팩트 공간은 가산컴팩트**임을 증명하시오.

20. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$ 위의 모든 연속함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$가 유계이면, $(X, \mathcal{T})$를 **유사컴팩트 (pseudocompact)** 공간이라고 부른다.

    (i) 모든 컴팩트 공간은 유사컴팩트임을 입증하시오.

    (ii) 위의 연습문제 #17을 이용하여, 임의의 가산컴팩트 공간은 유사컴팩트임을 보이시오.

    (iii) 유사컴팩트 공간의 연속인 상은 유사컴팩트임을 보이시오.

21.* $(X, \mathcal{T})$를 가산컴팩트가 아닌 정규 Hausdorff 위상공간이라 하자.

(i) 위의 연습문제 17 (ix)을 이용하여, X의 어떤 부분집합 $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$가 존재해서 $i \neq j$에 대하여 $x_i \neq x_j$이고, A는 $(X, \mathcal{T})$에서 극한점을 갖지 않음을 보이시오. 그리고 유도위상 $\mathcal{T}_A$를 갖는 A는 $(X, \mathcal{T})$의 이산 닫힌 부분공간임을 유도하시오.

(ii) 10장에서 증명된 Tietze 확장정리 10.3.51를 이용하여, 어떤 연속함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$가 존재해서 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(x_n) = n$임을 보이시오.

(iii) 위의 (ii)로부터 가산컴팩트가 아닌 정규 Hausdorff 위상공간은 유사컴팩트도 아님을 유도하시오. 따라서 **임의의 유사컴팩트 Hausdorff 정규공간은 가산컴팩트**임을 유도하시오.

22. 거리화가능 공간에 대하여 다음을 입증하시오.

$$\text{점렬컴팩트} \iff \text{컴팩트} \iff \text{가산컴팩트} \iff \text{유사컴팩트}.$$

7.3 후기

컴팩트성은 위상수학을 해석학의 모든 분야에 응용하는데 핵심적인 역할을 한다. 주목 7.1.4에서 주목했던 것처럼 컴팩트성은 유한성의 위상적 일반화로 생각할 수 있다.

일반화된 Heine-Borel 정리 7.2.13은 $\mathbb{R}^n$의 컴팩트 부분집합을 유계이고 닫힌집합으로 특징짓는다.

컴팩트성은 위상적 성질이다. 사실상 컴팩트 공간의 연속인 상은 컴팩트이다.

컴팩트 공간의 닫힌 부분집합은 컴팩트이고 Hausdorff 공간의 컴팩트 부분공간은 닫힌집합이다.

연습문제 7.2 #5는 열린함수와 닫힌함수를 소개한다. 연습문제 7.2 #10은 컴팩트 Hausdorff 공간은 정규공간 (사실은 T_4-공간)임을 주목한다. 각각의 $\mathbb{R}^n$에서 닫힌 단위구가 컴팩트라는 것은 연습문제 7.2 #9와 대비된다. 이 연습문제는 거리공간 $(C[0,1], d^*)$의 닫힌 단위구는 컴팩트가 아니다라는 것을 지적한다. 비록 우리는 여기서 증명은 안하겠지만, 노름 벡터공간이 유한차원일 필요충분조건은 그 공간의 닫힌 단위구가 컴팩트임을 보일 수 있다.

연습문제 7.2 #17, 19 그리고 20에서 가산컴팩트, 점렬컴팩트 그리고 유사컴팩트 개념이 소개되었고 연습문제 7.2 #22에서 거리공간상에서는 그들이 컴팩트 개념과 동치임을 보였다.

경고. 불행히도 "컴팩트"는 서로 다른 책에서 서로 다른 방법으로 정의되고 이들 중에 어떤 것은 여기에 표현된 정의와 동치가 아니다. 첫번째로 어떤 책은 컴팩트 정의에서 Hausdorff를 내포하고 우리가 컴팩트라고 불렀던 것을 표시하기 위하여 의사컴팩트(quasicompact)를 사용한다. 어떤 책, 특히 오래된 책에서 "컴팩트"는 점렬컴팩트를 의미한다. 마지막으로 용어 "bikompakt"는 주로 우리가 의미하는 컴팩트 또는 컴팩트 Hausdorff 공간을 말한다. 그러므로 독자는 저자가 실제로 무엇을 의미하는지 주의를 기울일 필요가 있다.

제 8 장

유한 곱공간

소개

기존 공간으로부터 새로운 공간을 만드는 중요한 세 가지 방법이 있다. 그것들은 "부분공간", "상공간(quotient spaces)", 그리고 "곱공간(product spaces)"에 의하여 만들어진다. 다음 세개의 장은 곱공간의 연구에 기여한다. 상공간은 11장에서 다룬다. 이 장에서는 유한 곱공간을 살펴보고 Tychonoff 정리를 증명한다. 이 외견상으로 무해한 정리는 컴팩트 공간의 임의의 곱공간은 컴팩트임을 말한다. 따라서 우리는 다음 질문을 하게 된다: 정확히 $n \in \mathbb{N}$인 $\mathbb{R}^n$의 어느 부분집합이 컴팩트인가? 일반화된 Heine-Borel 정리 8.3.3은 우리에게 $\mathbb{R}^n$의 컴팩트 부분집합은 정확하게 유계이고 닫힌집합임을 말하게 될 것이다.

위상수학을 더 깊이 공부를 하다 보면, 컴팩트성이 중요한 역할을 한다는 것을 알게 될 것이다. 이것은 특히 위상수학을 해석학에 응용할 때 그렇다.

8.1 곱위상

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 집합일 때, **곱집합(product)** $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$은 모든 n-중 순서쌍 $\langle x_1, x_2 \ldots, x_n \rangle$으로 이루어진 집합이다. 여기서 $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$이다.

이제 우리가 논의할 문제는 다음과 같다:

주어진 위상공간 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$에 대하여 곱집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위에 타당한 위상 $\mathcal{T}$를 어떻게 정의하는가?

$\mathcal{T}$에 대한 하나의 분명한 (그러나 잘못된) 후보는 모든 집합들 $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$의 집합족이다. 여기서 $O_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, \ldots, n$이다. 불행히도 이것은 위상이 아니다.

예를 들어, 만약 $n = 2$ 그리고 $(X, \mathcal{T}_1) = (X, \mathcal{T}_2) = \mathbb{R}$이면 $\mathcal{T}$는 사각형 $(0,1) \times (0,1)$ 그리고 $(2,3) \times (2,3)$를 포함하나 집합 $[(0,1) \times (0,1)] \cup [(2,3) \times (2,3)]$은 포함하지 않는다. 왜냐하면 이것은 O_1과 O_2의 어느 선택에 대해서도 $O_1 \times O_2$가 아니기 때문이다.

[만약 어떤 O_1과 O_2에 대하여 그것이 $O_1 \times O_2$였다면, $\frac{1}{2} \in (0,1) \subseteq O_1$ 그리고 $2\frac{1}{2} \in (2,3) \subseteq O_2$이다. 그러므로 순서쌍 $\langle \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2} \rangle \in O_1 \times O_2$이지만 $\langle \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2} \rangle \notin [(0,1) \times (0,1)] \cup [(2,3) \times (2,3)]$이다.] 그러므로 $\mathcal{T}$는 합집합하에서 닫혀있지 않다. 그러므로 $\mathcal{T}$는 위상이 아니다.

그러나 우리는 이미 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 위에 하나의 위상 (유클리드 위상)을 어떻게 주는지를 보았다. 이것은 보기 2.2.9에서 했다. 실제로 이 보기는 일반적으로 곱위상을 어떻게 정의하는지를 제시한다.

8.1.1 정의. $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\ldots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. 이때 집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위의 **곱위상(product topology)** $\mathcal{T}$는 집합족 $\{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n : O_i \in \mathcal{T}_i,\ \ i = 1, \ldots, n\}$을 기저로 갖는 위상이다. 위상 $\mathcal{T}$를 갖는 집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$을 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$의 **곱위상 공간(product of the spaces)**이라고 부르고 $(\boldsymbol{X_1 \times X_2 \times \ldots X_n}, \mathcal{T})$ 또는 $(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{\mathcal{T}_1}) \times (\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{T}_2}) \times \cdots \times (\boldsymbol{X_n}, \mathcal{T}_n)$으로 나타낸다.

물론 집합족 $\{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n : O_i \in \mathcal{T}_i,\ \ i = 1, \ldots, n\}$은 하나의 위상에 대한 기저임이 입증되어야 한다. 즉, 명제 2.2.8의 조건을 만족함을 입증해야 한다. (이것은 연습문제로 남겨둔다.)

8.1.2 명제. $\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$을 각각 위상공간 $(X_1, \mathcal{T}_1),\ (X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$의 기저라 하자. 그러면 집합족 $\{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n : O_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, \dots, n\}$은 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위의 곱위상에 대한 기저이다.

명제 8.1.2의 증명은 간단하고 독자를 위해서 연습문제로 남겨둔다.

8.1.3 관찰 (i) 우리는 이제 $n \geq 2$에 대하여 $\mathbb{R}^n$ 위의 유클리드 위상은 바로 집합 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ 위의 곱위상임을 알았다. (보기 2.2.9 그리고 주목 2.2.10을 보시오.)

(ii) 정의 8.1.1로부터 열린집합의 임의의 곱은 열린집합임은 분명하다. 더 자세히 말하자면: 만약 $O_1,\ O_2, \dots, O_n$이 각각 위상공간 $(X_1, \mathcal{T}_1),\ (X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$의 열린부분집합이면, $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$은 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$의 열린부분집합이다. 다음 명제는 닫힌집합의 임의의 곱은 닫힌집합임을 말한다.

8.1.4 명제. $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$을 각각 위상공간 $(X_1, \mathcal{T}_1),\ (X_2, \mathcal{T}_2), \dots,\ (X_n, \mathcal{T}_n)$의 닫힌부분집합이라 하자. 그러면 $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$는 곱공간 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$의 닫힌부분집합이다.

증명.

$$
\begin{aligned}
& (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \setminus (C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n) \\
= \ & [(X_1 \setminus C_1) \times X_2 \times \cdots \times X_n] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus C_2) \times X_3 \times \cdots \times X_n] \cup \\
& \qquad \cdots \cup [X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times (X_n \setminus C_n)]
\end{aligned}
$$

임을 관찰하자. 이것은 (열린집합의 곱은 열린집합으로서) 열린집합의 합집합이다. 그러므로 이것은 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$에서 열린집합이다. 따라서 그것의 여집합 $C_1 \times C_2 \times \dots C_n$은 우리가 원했던 닫힌집합이다. □

연습문제 8.1

1. 명제 8.1.2를 증명하시오.

2. 만약 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$이 이산위상공간이면, 곱공간 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$도 역시 이산공간임을 증명하시오.

3. X_1과 X_2를 무한집합 그리고 $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$를 각각 X_1과 X_2 위의 여유한위상이라 하자. $X_1 \times X_2$ 위의 곱위상 $\mathcal{T}$는 여유한위상이 아님을 보이시오.

4. 비이산위상공간의 임의의 유한곱은 비이산공간임을 보이시오.

5. Hausdorff 공간의 임의의 유한곱은 Hausdorff 공간임을 증명하시오.

6. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 $D = \{(x, x) : x \in X\}$를 곱공간 $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) = (X \times X, \mathcal{T}_1)$의 대각선(diagonal)이라 하자. $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 공간일 필요충분조건은 D가 $(X \times X, \mathcal{T}_1)$에서 닫힌집합임을 증명하시오.

7. $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ 그리고 $(X_3, \mathcal{T}_3)$를 위상공간이라 하자.
$[(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)] \times (X_3, \mathcal{T}_3) \cong (X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times (X_3, \mathcal{T}_3)$ 임을 증명하시오.

8. (i) $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 그리고 $(X_2, \mathcal{T}_2)$를 위상공간이라 하자.

$$(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \cong (X_2, \mathcal{T}_2) \times (X_1, \mathcal{T}_1)$$

임을 증명하시오.

(ii) 위의 결과를 유한개의 위상곱으로 일반화하시오.

9. $C_1, C_2, \ldots, C_n$을 각각 위상공간 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$의 부분집합이라 하면 $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$은 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$의 부분집합이다. 다음 각각의 명제를 증명하시오.

   (i) $(C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n)' \supseteq C_1' \times C_2' \times \cdots \times C_n'$;

   (ii) $\overline{C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n} = \overline{C_1} \times \overline{C_2} \times \cdots \times \overline{C_n}$;

   (iii) 만약 $C_1, C_2, \ldots, C_n$이 각각 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, ... , $(X_n, \mathcal{T}_n)$에서 조밀하면, $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$은 곱공간 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$에서 조밀하다;

   (iv) $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$이 가분공간이면, $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$은 가분공간이다;

   (v) 각각의 $n \geq 1$에 대하여, $\mathbb{R}^n$은 가분공간이다.

10. T_1-공간의 유한개의 곱은 T_1-공간임을 보이시오.

11. $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$이 제2가산공리를 만족하면, $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$도 제2가산공리를 만족함을 증명하시오.

12. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$을 연습문제 3.2 #11에서 정의한 Sorgenfrey 직선, 그리고 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_2)$를 곱공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$이라 하자. 다음 명제를 증명하시오.

   (i) $\{\langle x, y\rangle : a \leq x < b,\ c \leq y < d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$은 위상 $\mathcal{T}_2$에 대한 기저이다.

   (ii) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_2)$는 정칙, 가분, 완전비연결 Hausdorff 공간이다.

   (iii) $L = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{R}$ 그리고 $x+y=0\}$이라 하자. 그러면 직선 L은 평면 위의 보통위상에서 닫힌집합이고, 따라서 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_2)$에서도 그렇다.

   (iv) 만약 $\mathcal{T}_3$가 $\mathcal{T}_2$에 의해서 직선 L 위에 유도된 부분위상이면, $\mathcal{T}_3$는 이산위상이고, 따라서 $(L, \mathcal{T}_3)$는 가분공간이 아니다. [$(L, \mathcal{T}_3)$는 가분공간 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_2)$의 닫힌부분공간으로서, 우리는 **가분공간의 닫힌부분공간이 반드시 가분일 필요는 없다**는 사실을 안다]

   [힌트: $L \cap \{\langle x, y\rangle : a \leq x < a+1,\ -a \leq y < -a+1,\ a \in \mathbb{R}\}$는 단집합임을 보이시오.]

8.2 곱공간에서 좌표공간 위로의 사영함수

계속해서 다음 결과로 진행하기 전에 몇 가지 정의가 필요하다.

8.2.1 정의. $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$를 집합 X 위의 위상이라 하자. $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$일 때 $\mathcal{T}_1$은 $\mathcal{T}_2$보다 **섬세한 위상(finer topology)**이라고 불린다 (그리고 $\mathcal{T}_2$는 $\mathcal{T}_1$보다 **엉성한 위상(coarser topology)**이라고 불린다).

8.2.2 보기. 집합 X 위의 이산위상은 X 위의 어느 위상보다도 섬세하다. X 위의 비이산위상은 X 위의 어느 위상보다도 엉성하다. [연습문제 5.1 #10을 보시오.] □

8.2.3 정의. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 위상공간이라 하고 f를 X에서 Y로의 함수라 하자. 만약 모든 $A \in \mathcal{T}$에 대하여 $f(A) \in \mathcal{T}_1$이면 f는 **열린함수(open mapping)**라고 불린다. 만약 $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌집합 B에 대하여 $f(B)$가 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 닫힌 부분집합이면, f를 **닫힌함수(closed mapping)**라고 부른다.

8.2.4 주목. 연습문제 7.2 #5에서, 조건 "연속함수", "열린함수", "닫힌함수"가 다른 어느 두 조건도 함의하지 않음을 보이도록 요구했다. 사실상 이 조건 중 어느 두 가지 조건을 택하여도 세번째 조건을 함의하지 않는다. (이것을 입증할 보기를 찾으시오.) □

8.2.5 명제. $(X_1, \mathcal{T}_1,), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하고 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$을 곱공간이라 하자.
각각의 $i \in \{1, \ldots, n\}$에 대하여, $p_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$를 사영함수라 하자; 즉, 각각의 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n \rangle \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$에 대하여, $p_i(\langle x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n \rangle) = x_i$이다. 그러면

(i) 각각의 p_i는 연속 전사 열린함수이고,

(ii) $\mathcal{T}$는 p_i가 연속인 조건을 만족하는 집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위의 가장 엉성한 위상이다.

증명. 분명히 각각의 p_i는 전사함수이다. 각각의 p_i가 연속임을 보이기 위하여, U를 $(X_i, \mathcal{T}_i)$에서 임의의 열린집합이라 하자. 그러면

$$p_i^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

이다. 이것은 열린집합의 곱집합이므로 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$에서 열린집합이다. 따라서 각각의 p_i는 연속이다.

p_i가 열린함수임을 보이기 위하여, 각각의 열린 기저집합 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$에 대하여 (여기서, $j = 1, \ldots, n$에 대하여, U_j는 $(X_j, \mathcal{T}_j)$에서 열린집합), 집합 $p_i(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n)$은 $(X_i, \mathcal{T}_i)$에서 열린집합임을 입증하면 충분하다. 그러나 $p_i(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) = U_i$이다. 이것은 물론 $(X_i, \mathcal{T}_i)$에서 열린집합이다. 따라서 각각의 p_i는 열린함수이다. 우리는 이제 명제의 (i)을 입증했다.

이제 $\mathcal{T}'$를 각각의 사영함수 $p_i : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속인 조건을 만족하는 집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위의 임의의 위상이라고 하자. 우리는 $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$임을 보여야 한다.

(정의 8.1.1에 주어진) 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저의 정의를 기억하여, 만약 $O_1, O_2, \ldots, O_n$이 각각 $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$에서 열린집합이면, $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \mathcal{T}'$임을 보이면 충분하다. 이것을 보이기 위하여, $i = 1, \ldots, n$에 대하여 p_i가 연속으로서, $p_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}'$임을 관찰하자. 이제

$$p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

이므로

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$$

이다. 그러면 $i = 1, \ldots, n$에 대하여, $p_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}'$이므로 $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}'$ 이다; 즉, 우리에게 요구된 $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \mathcal{T}'$이 성립한다. $\square$

8.2.6 주목. 명제 8.2.5 (ii)는 곱위상을 정의하는 또 다른 방법을 제시한다. **주어진 위상공간 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$에 대하여 곱위상은 각각의 사영함수**

$$p_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$$

가 연속인 조건을 만족하는 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위의 가장 엉성한 위상으로 정의될 수 있다. 이 관찰은 다음 절에서 무한개의 위상공간의 곱공간을 논의할 때 더 중요할 것이다. □

8.2.7 따름정리. $n \geq 2$에 대하여, $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}$ 위로의 사영함수는 연속인 열린함수이다. □

8.2.8 명제. $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간 그리고 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$를 곱공간이라 하자. 그러면 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$의 부분공간과 위상동형이다.

증명. 각각의 j에 대하여, a_j를 임의의 (고정된) X_j의 원소라 하자. 각각의 i에 대하여, 함수 $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T})$를 다음과 같이 정의하자:

$$f_i(x) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n \rangle.$$

f_i: $(X_i, \mathcal{T}_i) \to (f_i(X_i), \mathcal{T}')$가 위상동형임을 주장하자. 여기서 $\mathcal{T}'$는 $\mathcal{T}$에 의하여 $f_i(X_i)$ 위에 유도된 위상이다. 분명히 이 함수는 전단사 함수이다. $U \in \mathcal{T}_i$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f_i(U) &= \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times U \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\} \\ &= (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n) \cap \\ &\qquad (\{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times X_i \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}) \\ &= (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n) \cap f_i(X_i) \\ &\in \mathcal{T}' \end{aligned}$$

이 성립한다. (왜냐하면 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \in \mathcal{T}$이기 때문이다.) 따라서 $U \in \mathcal{T}_i$이면 $f_i(U) \in \mathcal{T}'$이 성립한다.

마지막으로, 집합족

$$\{(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i(X_i) : U_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

은 $\mathcal{T}'$에 대한 기저임을 관찰하자. 그래서 f_i가 연속임을 증명하기 위해서는 이 집합족의 모든 원소의 f_i에 의한 역상이 $(X_i, \mathcal{T}_i)$에서 열린집합임을 입증하면 충분하다. 그러나

$$\begin{aligned} f_i^{-1}[(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i(X_i)] &= f_i^{-1}(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i^{-1}(f_i(X_i)) \\ &= \begin{cases} U_i \cap X_i, & a_j \in U_j,\ j \neq i\text{일 때} \\ \emptyset, & \text{어떤 } j \neq i\text{에 대하여 } a_j \notin U_j\text{일 때} \end{cases} \end{aligned}$$

이다. $U_i \cap X_i = U_i \in \mathcal{T}_i$ 그리고 $\emptyset \in \mathcal{T}_i$이므로 f_i는 연속임을 주장했고, 따라서 우리가 원했던 결과를 얻었다. □

표기. 만약 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 집합이면, 곱 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$을 $\prod_{i=1}^n X_i$으로 나타낸다. 만약 $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$이 위상공간이면, 곱공간 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$을 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$으로 나타낸다. □

연습문제 8.2

1. $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상은 여유한위상보다 섬세함을 증명하시오.

2. $i = 1, \dots, n$에 대하여, $(X_i, \mathcal{T}_i)$를 위상공간이라 하자. 다음을 증명하시오.
   (i) 만약 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연결이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 연결이다;
   (ii) 만약 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이다;
   (iii) 만약 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 길-연결이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 길-연결이다;
   (iv) 만약 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 Hausdorff이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 Hausdorff이다;
   (v) 만약 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 T_1-공간이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 T_1-공간이다.

3. $(Y, \mathcal{T})$와 $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$를 위상공간이라 하자. 더욱이 각각의 i에 대하여, f_i를 $(Y, \mathcal{T})$에서 $(X_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수라 하자.

$$f(y) = \langle f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y) \rangle$$

   로 정의된 함수 $f\colon (Y, \mathcal{T}) \to \prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속일 필요충분조건은 모든 f_i가 연속임을 증명하시오.
   [힌트: $f_i = p_i \circ f$임을 관찰하시오. 여기서 p_i는 $\prod_{j=1}^n (X_j, \mathcal{T}_j)$에서 $(X_i, \mathcal{T}_i)$ 위로의 사영함수이다.]

4. (X, d_1)과 (Y, d_2)를 거리공간이라 하자. 더욱이 e를 연습문제 6.1 #4에서 정의된 $X \times Y$ 위의 거리라 하자. 또한 $\mathcal{T}$를 e에 의하여 $X \times Y$ 위에 유도된 위상이라 하자. 만약 d_1과 d_2가 각각 X와 Y 위에 위상 $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$를 유도하고, $\mathcal{T}_3$은 $(X, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$ 위의 곱위상이면, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3$임을 증명하시오. [이것은 **임의의 두 거리화가능 공간의 곱공간은 거리화가능**임을 보여준다.]

5. $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 거리화가능 공간일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 거리화가능임을 증명하시오.
   [힌트: 거리화가능 공간의 모든 부분공간은 거리화가능임을 말하는 연습문제 6.1 #6과, 위의 연습문제 4를 이용하시오.]

8.3 유한 곱공간에 대한 Tychonoff 정리

8.3.1 정리. (유한 곱공간에 대한 Tychonoff 정리) 만약 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\ldots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$이 컴팩트 공간이면, $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$는 컴팩트 공간이다.

증명. 먼저 두 컴팩트 공간 $(X, \mathcal{T}_1)$과 $(Y, \mathcal{T}_2)$의 곱을 생각하자. $\{U_i : i \in I\}$를 $X \times Y$의 임의의 열린덮개라 하자. 그러면 각각의 $x \in X$와 $y \in Y$에 대하여, 어떤 $i \in I$가 존재하여 $\langle x, y \rangle \in U_i$이다. 따라서 어떤 열린 기저집합 $V(x, y) \times W(x, y)$가 존재하여 $V(x, y) \in \mathcal{T}_1$, $W(x, y) \in \mathcal{T}_2$ 그리고 $\langle x, y \rangle \in V(x, y) \times W(x, y) \subseteq U_i$를 만족한다.

$\langle x, y \rangle$가 $X \times Y$의 모든 점을 다루기 때문에 $X \times Y$의 어떤 열린덮개 $\{V(x, y) \times W(x, y) : x \in X, y \in Y\}$가 존재하여 각각의 $V(x, y) \times W(x, y)$가 어떤 U_i $(i \in I)$의 부분집합이다. 그러므로 $(X, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$가 컴팩트임을 보이기 위하여 열린덮개 $\{V(x, y) \times W(x, y) : x \in X, y \in Y\}$의 유한 부분덮개를 찾으면 충분하다.

이제 $x_0 \in X$를 고정하고 $X \times Y$의 부분공간 $\{x_0\} \times Y$를 생각하자. 명제 8.2.8에서 본 것처럼 이 부분공간은 $(Y, \mathcal{T}_2)$와 위상동형이다. 그러므로 $\{x_0\} \times Y$는 컴팩트이다. $\{V(x_0, y) \times W(x_0, y) : y \in Y\}$가 $\{x_0\} \times Y$의 열린덮개이기 때문에 유한 부분덮개

$$V(x_0, y_1) \times W(x_0, y_1),\ V(x_0, y_2) \times W(x_0, y_2), \ldots, V(x_0, y_m) \times W(x_0, y_m)$$

를 갖는다. $V(x_0) = V(x_0, y_1) \cap V(x_0, y_2) \cap \cdots \cap V(x_0, y_m)$이라 놓자. 그러면 집합 $V(x_0) \times Y$는 $\{V(x_0, y) \times W(x_0, y) : y \in Y\}$ 형태의 유한개의 집합의 합집합에 포함된다.

그러므로 $X \times Y$가 컴팩트임을 증명하기 위해서는 $X \times Y$가 $V(x) \times Y$ 형태의 유한개의 집합의 합집합에 포함됨을 보이면 충분하다. 각각의 $V(x)$가 $x \in X$를 포함하는 열린집합이므로, 집합족 $\{V(x) : x \in X\}$가 컴팩트 공간 $(X, \mathcal{T}_1)$의 열린덮개이다. 그러므로 $x_1, x_2, \ldots, x_k$가 존재하여 $X \subseteq V(x_1) \cup V(x_2) \cup \ldots V(x_k)$이다. 그러므로 우리가 원했던 $X \times Y \subseteq (V(x_1) \times Y) \cup (V(x_2) \times Y) \cup \cdots \cup (V(x_k) \times Y)$을 얻었다. 따라서 $(X, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$는 컴팩트이다.

증명은 수학적 귀납법에 의하여 완성된다. 임의의 N개의 컴팩트 공간의 곱공간이 컴팩트라고 가정하자. $i = 1, \ldots, N+1$에 대하여, 컴팩트 공간 $(X_i, \mathcal{T}_i)$의 곱 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_{N+1}, \mathcal{T}_{N+1})$을 생각하자. 그러면

$$(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_{N+1}, \mathcal{T}_{N+1}) \cong [(X_1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (X_N, \mathcal{T}_N)] \times (X_{N+1}, \mathcal{T}_{N+1})$$

이다. 수학적 귀납법 가정에 의하여 $(X_1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (X_N, \mathcal{T}_N)$는 컴팩트이다. 그러므로 오른쪽은 두 컴팩트 공간의 곱이므로 컴팩트이다. 따라서 왼쪽도 역시 컴팩트이다. 이것으로 귀납법이 완성되었고 정리의 증명이 끝났다. □

명제 7.2.1 그리고 8.2.5 (i)을 이용하여 다음을 얻는다:

8.3.2 명제. (Tychonoff 정리의 역) $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\ldots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. 만약 $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이다. □

이제 우리는 이전에 서술한 정리 7.2.13을 증명할 수 있다.

8.3.3 정리. (일반화된 Heine-Borel 정리) $n \geq 1$에 대하여, $\mathbb{R}^n$의 부분집합이 컴팩트일 필요충분조건은 그것이 유계이고 닫힌집합이다.

증명. $\mathbb{R}^n$의 임의의 컴팩트 부분집합이 유계라는 것은 명제 7.2.8과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. 그러므로 명제 7.2.5에 의하여, $\mathbb{R}^n$의 임의의 컴팩트 부분집합은 유계이고 닫힌집합이다.

역으로 S를 $\mathbb{R}^n$의 임의의 유계이고 닫힌 부분집합이라 하자. 그러면, 연습문제 7.2 #8에 의하여, 어떤 양의 실수 M에 대하여 S는 곱집합

$$\overbrace{[-M, M] \times [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]}^{n\ terms}$$

의 닫힌 부분집합이다. 따름정리 7.2.3에 의하여, 각각의 닫힌구간 $[-M, M]$은 컴팩트이므로, Tychonoff 정리에 의하여 곱공간

$$[-M, M] \times [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$$

도 역시 컴팩트이다. S가 컴팩트 집합의 닫힌 부분집합으로서 S도 컴팩트이다. □

8.3.4 보기. $\mathbb{R}^2$의 부분공간 $\mathbf{S}^1$을

$$\mathbf{S}^1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$$

로 정의하자. 그러면 $\mathbf{S}^1$는 $\mathbb{R}^2$의 유계인 닫힌 부분집합이므로 컴팩트이다.

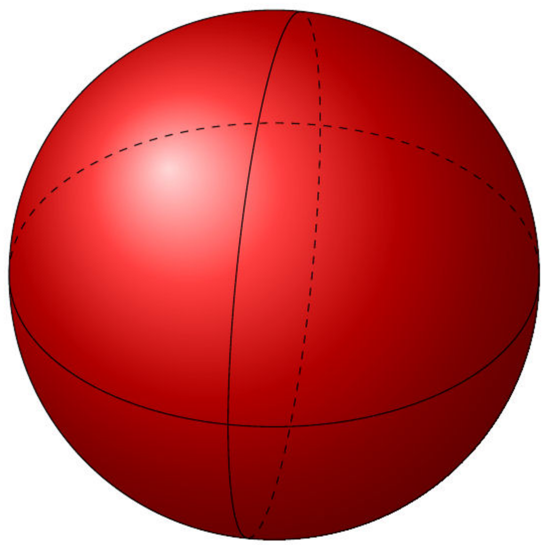
비슷한 방법으로 $\mathbb{R}^{n+1}$의 부분공간 **n-차원 구(n-sphere) $\mathbf{S}^n$**을

$$\mathbf{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

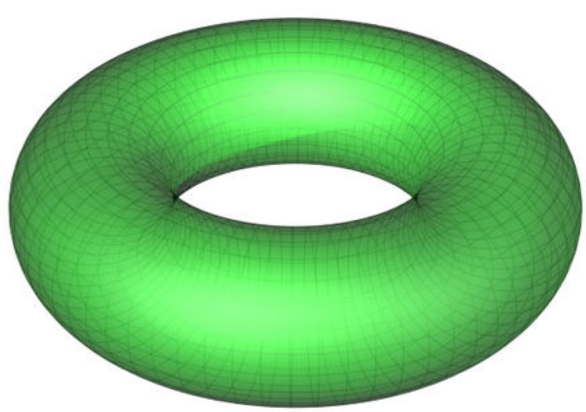
로 정의하자. 그러면 $\mathbf{S}^n$은 $\mathbb{R}^{n+1}$의 유계인 닫힌 부분집합이므로 컴팩트이다.

다음은 $\mathbf{S}^2$의 그림이다.

$\mathbf{S}^2$

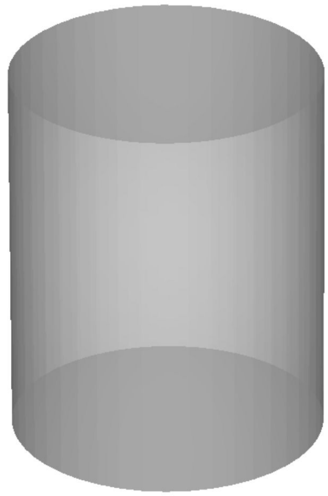


우리는 $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$을 **원환체(torus)**라고 정의한다.



□

8.3.5 보기. $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $\mathbf{S}^1 \times [0,1]$은 두개의 컴팩트 공간의 곱이므로 컴팩트이다. ($\mathbf{S}^1 \times [0,1]$은 원기둥(cylinder)의 표면(surface)임을 확신하시오.)



□

연습문제 8.3

1. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 각 점 $x \in X$가 적어도 하나의 컴팩트 근방을 가지면 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **국소컴팩트(locally compact)** 공간이라고 부른다. 다음을 증명하시오.

    (i) 모든 컴팩트 공간은 국소컴팩트이다.

    (ii) $\mathbb{R}$과 $\mathbb{Z}$는 국소컴팩트이다 (그러나 컴팩트는 아니다).

    (iii) 모든 이산공간은 국소컴팩트이다.

    (iv) 만약 $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $\dots$, $(X_n, \mathcal{T}_n)$이 국소컴팩트 공간이면, $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$는 국소컴팩트이다.

    (v) 국소컴팩트 공간의 닫힌 부분공간은 국소컴팩트이다.

    (vi) 국소컴팩트 공간의 연속인 상은 반드시 국소컴팩트는 아니다.

    (vii) 만약 f가 국소컴팩트 공간 $(X, \mathcal{T})$에서 위상공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$ 위로의 연속인 열린함수이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$은 국소컴팩트이다.

    (viii) 만약 $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$이 위상공간이고 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 국소컴팩트이면, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 국소컴팩트이다.

2.* $(Y, \mathcal{T}_1)$을 Hausdorff 공간 $(X, \mathcal{T})$의 국소컴팩트 부분공간이라 하자. 만약 Y가 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀하면, Y는 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합임을 증명하시오.

[힌트: 연습문제 3.2 #9를 이용하시오.]

8.4 곱공간과 연결성

8.4.1 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 x를 X의 임의의 점이라 하자. **X 안에서 x의 성분 (component), $C_X(x)$**는 x를 포함하는 X의 모든 연결 부분집합의 합집합으로 정의한다.

8.4.2 명제. x를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 점이라 하면 $C_X(x)$는 연결이다.

증명. $\{C_i : i \in I\}$를 x를 포함하는 $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린 부분집합들의 집합족이라 하자. $(\{x\} \in \{C_i : i \in I\}$임을 관찰하시오.) 그러면 $C_X(x) = \bigcup_{i \in I} C_i$이다.

O를 $\mathcal{T}$에 의하여 $C_X(x)$ 위에 유도된 위상에 관하여 열린닫힌 부분집합이라 하자. 그러면 각각의 i에 대하여 $O \cap C_i$는 C_i 위에 유도된 위상에 관하여 열린닫힌집합이다.

그러나 각각의 C_i는 연결이기 때문에 각각의 i에 대하여 $O \cap C_i = C_i$ 또는 $\emptyset$이다. 만약 어떤 $j \in I$에 대하여 $O \cap C_j = C_j$이면, $x \in O$이다. 따라서 이 경우에 각각의 C_i가 x를 포함하고 있기 때문에, 모든 $i \in I$에 대하여 $O \cap C_i \neq \emptyset$이다. 그러므로 모든 $i \in I$에 대하여 $O \cap C_i = C_i$이거나 $O \cap C_i = \emptyset$이다; 즉, $O = C_X(x)$ 또는 $O = \emptyset$이다.

그러므로 $C_X(x)$는 공집합이 아닌 열린닫힌 진부분집합을 갖지 않는다. 따라서 $C_X(x)$는 연결이다. □

8.4.3 주목. 정의 8.4.1 그리고 명제 8.4.2로부터 $C_X(x)$는 x를 포함하는 X의 $\boxed{\text{가장 큰}}$ 연결 부분집합임을 알았다 . □

8.4.4 보조정리. a와 b를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 점이라 하자. 만약 a와 b를 동시에 포함하는 연결집합 C가 존재하면, $C_X(a) = C_X(b)$이다.

증명. 정의 8.4.1에 의하여, $C_X(a) \supseteq C$ 그리고 $C_X(b) \supseteq C$이다. 그러므로 $a \in C_X(b)$이다.

명제 8.4.2에 의하여, $C_X(b)$는 연결이므로 a를 포함하는 연결집합이다. 따라서, 정의 8.4.1에 의하여, $C_X(a) \supseteq C_X(b)$이다.

비슷하게 $C_X(b) \supseteq C_X(a)$이다. 우리는 $C_X(a) = C_X(b)$임을 보였다. □

8.4.5 명제. $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. 그러면 $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 연결일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 연결이다.

증명. 유한개의 연결공간의 곱공간이 연결임을 보이기 위해서는 임의의 두개의 연결공간의 곱집합이 연결임을 보이면 충분하다. 그 다음은 수학적 귀납법을 따르면 되기 때문이다.

그러므로 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 연결공간이라 하고 $\langle x_0, y_0 \rangle$를 곱공간 $(X \times Y, \mathcal{T}_2)$의 임의의 점이라 하자. $\langle x_1, y_1 \rangle$를 $X \times Y$의 또 다른 점이라 하자. 그러면 $(X \times Y, \mathcal{T})$의 부분공간 $\{x_0\} \times Y$는 연결공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$과 위상동형이므로 연결이다.

비슷하게 부분공간 $X \times \{y_1\}$은 연결이다. 더욱이, $\langle x_0, y_1 \rangle$는 연결공간 $\{x_0\} \times Y$ 안에 있으므로, $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_1 \rangle) \supseteq \{x_0\} \times Y \ni \langle x_0, y_0 \rangle$이지만, $\langle x_0, y_1 \rangle \in X \times \{y_1\}$이다. 그러므로 $C_{X \times Y}((x_0, y_1)) \supseteq X \times \{y_1\} \ni (x_1, y_1)$이다.

따라서 $\langle x_0, y_0 \rangle$ 그리고 $\langle x_1, y_1 \rangle$는 연결집합 $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_1 \rangle)$ 안에 있다. 그러므로 보조정리 8.4.4에 의하여, $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_0 \rangle) = C_{X \times Y}(\langle x_1, y_1 \rangle)$이다. 특히, $\langle x_1, y_1 \rangle \in C_{X \times Y}(\langle x_0, y_0 \rangle)$이다. $\langle x_1, y_1 \rangle$이 $X \times Y$안의 임의의 점이었기 때문에, $C_{X \times Y}(\langle x_0, y_0 \rangle) = X \times Y$를 얻는다. 따라서 $(X \times Y, \mathcal{T}_2)$는 연결이다.

역으로, 만약 $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 연결이면, 명제 8.2.5 그리고 5.2.1에 의하여 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 연결이다. □

8.4.6 주목. 연습문제 5.2 #9에서 다음 결과가 나타났다: **임의의 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 점 x에 대하여, 성분 $C_X(x)$는 닫힌집합이다.** □

8.4.7 정의. 컴팩트이고 연결인 위상공간을 **연속체(continuum)**라고 부른다.

정리 8.3.1과 명제 8.4.5 그리고 8.3.2의 직접적인 결과로 다음 명제를 얻는다.

8.4.8 명제. $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. 그러면 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속체일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속체이다. $\square$

연습문제 8.4

1. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트이고 거리화가능이면 **컴팩텀(compactum)**이라고 불린다. $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. 연습문제 8.2 #5를 이용하여, $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩텀일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩텀임을 증명하시오.

2. (X, d)를 거리공간 그리고 $\mathcal{T}$를 d에 의하여 X 위에 유도된 위상이라 하자.
   (i) 곱공간 $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$에서 $\mathbb{R}$로의 함수 d는 연속임을 증명하시오.
   (ii) (i)을 이용하여, 만약 거리화가능 공간 $(X, \mathcal{T})$가 연결이고 X가 적어도 두 점을 가지고 있으면, X는 비가산개의 점을 가지고 있음을 보이시오.

3. 만약 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 길-연결공간이면, 곱공간 $(X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T}_1)$은 길-연결임을 증명하시오.

4. (i) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$을 곱공간 $(Y, \mathcal{T}) = \prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$의 임의의 점이라 하자. $C_Y(x) = C_{X_1}(x_1) \times C_{X_2}(x_2) \times \cdots \times C_{X_n}(x_n)$임을 증명하시오.
   (ii) (i)과 연습문제 5.2 #10으로부터 $\prod_{i=1}^n (X_i, \mathcal{T}_i)$는 완전비연결일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 완전비연결임을 유도하시오.

5. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 연결(열린)집합으로 이루어진 기저 B를 가지고 있으면 **국소연결(locally connected)**이라고 불린다.

   (i) $\mathbb{Z}$는 국소연결이지만 연결공간이 아님을 입증하시오.

   (ii) 모든 $n \geq 1$에 대하여 $\mathbb{R}^n$과 $\mathbf{S}^n$은 국소연결임을 보이시오.

   (iii) $(X, \mathcal{T})$를 $\mathbb{R}^2$의 부분공간으로서 $\langle 0, 1\rangle$에서 $\langle 0, 0\rangle$에 연결한 선분과 그리고 $\langle 0, 1\rangle$에서 모든 점 $\langle \frac{1}{n}, 0\rangle$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$에 연결한 선분의 점들로 이루어져 있다고 하자. $(X, \mathcal{T})$는 연결이지만 국소연결이 아님을 보이시오.

   (iv) 국소연결 공간의 모든 열린 부분집합은 국소연결임을 증명하시오.

   (v) $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$을 위상공간이라 하자. $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 국소연결일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 국소연결임을 증명하시오.

6. A와 B를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 연결 부분집합이고 $A \cap B \neq \emptyset$이라 하자.

   (i) 만약 $(X, \mathcal{T}) = \mathbb{R}$이면, $A \cap B$는 연결임을 증명하시오.

   (ii) 만약 $(X, \mathcal{T}) = \mathbb{R}^2$이면, $A \cap B$는 반드시 연결인가?

8.5 대수학의 기본정리

이 절에서 우리는 위상수학을 수학의 다른 분야로의 응용을 제공한다. 우리는 컴팩트성과 일반화된 Heine-Borel 정리 8.3.3을 어떻게 이용하여 대수학의 기본정리를 증명하는지를 보여준다.

8.5.1 정리. (대수학의 기본정리) 모든 다항식 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 는 근(root)을 갖는다. 여기서 각각의 a_i는 복소수, $a_n \neq 0$, 그리고 $n \geq 1$이다; 즉, 어떤 복소수 z_0가 존재하여 $f(z_0) = 0$이다.

증명.

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}}\right] \\ &\geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|\right] \quad (|z| \geq 1\text{일 때}) \\ &= |z|^{n-1}[|a_n||z| - R] \quad (|z| \geq 1 \text{ 그리고 } R = |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| \text{ 일 때}) \\ &\geq |z|^{n-1} \quad \left(|z| \geq \max\left\{1, \frac{R+1}{|a_n|}\right\} \text{ 일 때}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

만약 $p_0 = |f(0)| = |a_0|$라 놓으면, 식 (1)에 의하여, 어떤 $T > 0$가 존재해서

$$\text{모든 } |z| > T\text{에 대하여} \quad |f(z)| > p_0\text{이다.} \tag{2}$$

다음 집합 $D = \{z : z \in \text{복소평면 그리고 } |z| \leq T\}$를 생각하자. 이것은 복소평면 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$의 유계인 닫힌 부분집합이므로, 일반화된 Heine-Borel 정리에 의하여, D는 컴팩트이다. 그러므로, 명제 7.2.14에 의하여, 연속함수 $|f| : D \to \mathbb{R}$는 어떤 점 z_0에서 최솟값을 갖는다. 그러므로

$$\text{모든 } z \in D\text{에 대하여} \quad f(z_0)| \leq |f(z)|\text{이다.}$$

(2)에 의하여, 모든 $z \notin D$에 대하여 $|f(z)| > p_0 = |f(0)| \geq |f(z_0)|$이다. 그러므로

$$\text{모든 } z \in \mathbb{C}\text{에 대하여} \quad |f(z_0)| \leq |f(z)|\text{이다.} \tag{3}$$

그러므로 $f(z_0) = 0$을 증명해야 한다. 이것을 위해서 '평행이동'을 수행하는 것이 편리하다. $P(z) = f(z + z_0)$라 놓자. 그러면 (2)에 의하여,

$$\text{모든 } z \in \mathbb{C}\text{에 대하여} \quad |P(0)| \leq |P(z)|\text{이다.} \tag{4}$$

$f(z_0) = 0$을 보이는 문제는 이제 $P(0) = 0$을 증명하는 동치인 문제로 전환되었다.

이제 $P(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0$ $(b_i \in \mathbb{C})$이다. 따라서 $P(0) = b_0$이다. 우리는 $b_0 = 0$임을 보인다.

$b_0 \neq 0$이라 가정하자. 그러면

$$P(z) = b_0 + b_k z^k + z^{k+1} Q(z), \tag{5}$$

여기서 $Q(z)$는 다항식이고 k는 $b_i \neq 0$를 만족하는 가장 작은 $i > 0$이다.

예를 들어, 만약 $P(z) = 10z^7 + 6z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 2z^2 + 1$이면, $b_0 = 1,\ b_k = 2,\ (b_1 = 0)$, 그리고

$$P(z) = 1 + 2z^2 + z^3 \overbrace{(4 + 3z + 6z^2 + 10z^4)}^{Q(z)}$$

이다.

$w \in \mathbb{C}$를 수 $-b_0/b_k$의 k-번째 근이라 하자. 즉, $w^k = -b_0/b_k$이라 하자.
$Q(z)$가 다항식이기 때문에, 실수 t에 대하여,

$$t \to 0\text{에 따라} \quad t\,|Q(tw)| \to 0$$

이다. 이것은 $t \to 0$에 따라 $\quad t\,|w^{k+1}Q(tw)| \to 0$임을 함의한다.
그러므로 $0 < t_0 < 1$인 실수 t_0가 존재하여

$$t_0\,|w^{k+1}Q(t_0w)| < |b_0| \tag{6}$$

이다. 그러므로 (5)에 의하여

$$\begin{aligned} P(t_0w) &= b_0 + b_k(t_0w)^k + (t_0w)^{k+1}Q(t_0w) \\ &= b_0 + b_k\left[{t_0}^k\left(\frac{-b_0}{b_k}\right)\right] + (t_0w)^{k+1}Q(t_0w) \\ &= b_0(1 - {t_0}^k) + (t_0w)^{k+1}Q(t_0w) \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} |P(t_0w)| &\leq (1 - {t_0}^k)|b_0| + {t_0}^{k+1}|w^{k+1}Q(t_0w)| \\ &< (1 - {t_0}^k)\,|b_0| + {t_0}^k\,|b_0|, \quad \text{(6)에 의하여} \\ &= |b_0| \\ &= |P(0)| \end{aligned} \tag{7}$$

이다. 그러나 (7)은 (4)에 모순이다. 따라서 가정 $b_0 \neq 0$은 거짓이다; 즉, 우리가 원했던 $P(0) = 0$이 성립한다. $\square$

8.6 후기

소개에서 언급했던 것처럼, 이 장은 곱공간에 관한 세 개의 장 중의 하나이다. 가장 쉬운 경우가 유한 곱공간이다. 다음 장에서 가산무한 곱공간을 공부하고, 10장에서는 일반적인 경우를 공부한다. 이 장에서 증명한 가장 중요한 결과는 Tychonoff 정리 8.3.1[1]이다. 10장에서 이 정리는 임의의 크기의 곱집합으로 일반화된다.

여기서 정리라고 불리는 두번째 결과는 $\mathbb{R}^n$의 컴팩트 부분집합을 유계인 닫힌집합으로 특성화한 일반화된 Heine-Borel 정리 8.3.3이다.

연습문제 8.3 #1에서 국소컴팩트 공간을 소개했다. 이 공간은 위상군론에서 중심 역할을 한다. (부록 5를 보시오.)

연결성에 대한 공부는 점에 관한 성분을 정의함으로서 더 깊이 발전되었다. 성분으로 임의의 위상공간을 연결집합들로 분할을 할 수 있다. $\mathbb{R}^n$과 같은 연결공간에서는 임의의 점의 성분은 전체 공간이다. 반대로, 예를 들어 $\mathbb{Q}$와 같은, 완전비연결 공간에서 성분은 단집합이다.

위에서 언급한 것처럼, 컴팩트성은 국소 버젼을 갖는다. 연결성도 그렇다. 연습문제 8.4 #5에서 국소연결성을 정의했다. 그러나, 모든 컴팩트 공간은 국소컴팩트이지만, 모든 연결공간이 국소연결은 아니다. 사실상 많은 성질 $\mathcal{P}$는 **국소(locally)** $\mathcal{P}$라고 불리는 국소 버젼을 가지고 있다. 그리고 $\mathcal{P}$가 항상 국소 $\mathcal{P}$임을 의미하는 것은 아니다. 그리고 국소 $\mathcal{P}$가 항상 $\mathcal{P}$를 의미하지는 않는다.

이 장의 끝무렵에서 대수학의 기본정리 8.5.1의 위상적 증명을 제공했다. 수학의 한 분야에 있는 정리를 다른 분야의 방법을 이용해서 증명할 수 있다는 사실은 수학을 분야별로 구분하지 말아야 되는 이유를 암시하고 있다. 여러분은 대수학, 복소해석학, 그리고 정수론 과목을 구분하려고 할지 모르겠지만 이러한 주제는 사실상 서로 밀접한 관계가 있다.

부록 5에서 위상군의 개념을 소개했다. 즉, 위상공간의 구조와 군의 구조를 동시에 가지고 있는 집합이고, 두 구조가 적절한 방법으로 관계되어 있다. 위상군론은 풍부하고 관심있는 수학의 한 분야이다. 부록 5는 이 장의 선수지식을 통해서 공부할 수 있다.

약간의 범주론을 알고 있는 독자를 위해서, 우리는 위상공간과 연속함수의 범주는 곱과 쌍대곱을 둘다 가지고 있음을 관찰하자. 범주론에서 곱은 사실상 위상공간의 곱이다. 독자는 쌍대곱을 알아보기 위해 신경쓸 수 있다.

[1] "정리"라는 단어를 얼마나 드물게 사용하는지, 언제 사용했는지를 주목해야 한다. 결과가 중요하기 때문에 정리라는 단어를 사용한다.

제 9 장

가산 곱공간

소개

우리는 직관적으로 곡선의 면적이 0이라고 말한다. 그러므로 여러분은 공간채움곡선(space-filling curve)의 존재성을 배우게 된다면 깜짝 놀랄 것이다. 우리는 Cantor 공간으로 알려진 기이한 공간을 이용함으로써 이 주제를 공략한다. 이 공간의 조사는 단위구간 $[0,1]$의 성질들을 우리로 하여금 더 많이 이해하도록 해준다.

앞에서 우리는 위상공간들의 유한곱을 공부했다. 이 장에서는 위상공간들의 가산무한곱으로 우리의 공부를 확장한다. 이것은 하나의 보기 외에 경이롭게도 풍부한 영역인 공간채움곡선으로 우리를 이끈다.

9.1 Cantor 집합

9.1.1 주목. 우리는 지금 Cartor 집합으로 알려진 매우 기이한 (하지만 유용한) 집합을 만들 것이다. 닫힌 단위구간 $[0,1]$을 생각하고 삼등분중간집합인 열린구간 $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$을 제거하자. 그리고 남은 닫힌집합을 G_1이라고 표기하자. 그러면

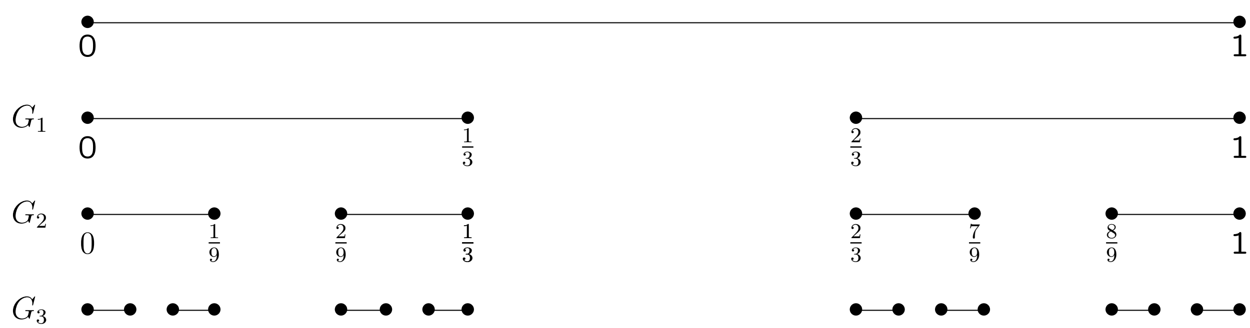
$$G_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1]$$

이다.

다음으로 G_1에서 두 조각들의 삼등분중간집합인 열린구간들 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$와 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$을 지우고 남은 닫힌 집합을 G_2라고 표기하자. 그러면

$$G_2 = [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}|,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1]$$

이다.



이러한 방법, 즉 이전 단계로부터 남은 각각의 닫힌구간의 삼등분중간집합을 각 단계에서 지우는 방법을 계속 진행하면 닫힌집합들의 감소수열

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

을 얻는다. **Cantor 집합**G는

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

으로 정의되고, 이것은 닫힌집합들의 교집합이므로 $[0,1]$의 닫힌 부분집합이다. $[0,1]$은 컴팩트이기 때문에, **Cantor 공간** $(G,\mathcal{T})$ (즉, 부분공간 위상을 갖는 G)는 컴팩트이다. [Cantor 집합은 유명한 집합론 학자 Georg Cantor (1845–1918)의 이름을 따서 명명되었다.]

삼진수로 쓰여진 실수들로 Cartor 집합을 표현하는 것은 유용하다. 여러분은 실수들을 십진수로 표현한 소수전개에 익숙하다. 오늘날 우리는 이진수를 사용하는 컴퓨터를 피할 수 없다. 하지만 Cantor 집합에 대해서는 삼진수가 가장 좋은 것이다.

삼진법에서 $76\frac{5}{81}$는 2211.0012으로 쓰여진다. 왜냐하면 이것은

$$2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4}$$

으로 표현되기 때문이다.

따라서 $[0,1]$에서 수 x는 삼진수 $.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots$으로 표현된다. 여기서

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0,1,2\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

이다. $\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, 그리고 $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$이기 때문에, 이들 수의 삼진수 표현은 다음처럼 주어진다:

$$\frac{1}{2} = 0.11111\cdots; \quad \frac{1}{3} = 0.02222\cdots; \quad 1 = 0.2222\cdots.$$

(물론 $\frac{1}{3}$의 또 다른 삼진수 표현은 $0.10000\cdots$이고 1의 또 다른 삼진수 표현은 $1.0000\cdots$이다.)

Cantor 집합 G로 다시 돌아오자. $[0,1]$의 원소가 G에 속할 필요충분조건은 그것이 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $a_n \neq 1$인 삼진수로 쓰여질 수 있는 것임이 명백하다. 따라서 $\frac{1}{2} \notin G$, $\frac{5}{81} \notin G$, $\frac{1}{3} \in G$, 그리고 $1 \in G$이다.

그러므로 우리는 Cantor 집합으로부터 다음 수열들로 구성된 집합으로의 함수 f를 갖는다: 각각의 $a_i \in \{0,2\}$에 대하여

$$\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \rangle \text{ 형태의 수열.}$$

여기서 f는 일대일대응이다. 우리는 이 함수 f를 나중에 이용할 것이다. □

연습문제 9.1

1. (a) 다음 수들을 삼진수로 쓰시오:

   (i) $21\frac{5}{243}$; (ii) $\frac{7}{9}$; (iii) $\frac{1}{13}$.

   (b) 어떤 실수들이 다음 삼진수 표현을 갖는가?

   (i) $0.\overline{02} = 0.020202\cdots$; (ii) $0.\overline{110}$; (iii) $0.\overline{012}$.

   (c) (a)와 (b)에 있는 수들 중 어떤 것이 Cantor 집합에 속하는가?

2. x가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 한 점이라고 하자. 이때 x가 **고립점(isolated point)**이라 함은 $x \in X \setminus X'$이다. 즉, x가 X의 극한점이 아님을 말한다. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 **완전(perfect)**이라 함은 그것이 고립점을 갖지 않을 때를 말한다. Cantor 공간이 컴팩트이고 완전비연결인 완전공간임을 증명하시오.

   [공집합이 아닌 컴팩트이고 완전비연결인 거리화가능 완전공간은 Cantor 공간과 위상동형임을 증명할 수 있다. 예를 들어, Engelking [105]의 연습문제 6.2A(c)를 보시오.

9.2 곱위상

9.2.1 정의. $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n), \ldots$가 위상공간들의 가산무한족이라고 하자. 이때 집합 X_i $(i \in \mathbb{N})$들의 **곱(product) $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$** 은 모든 i에 대하여 $x_i \in X_i$인 모든 무한수열 $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \rangle$들로 구성된다. (무한수열 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$은 때때로 $\prod_{i=1}^{\infty} x_i$와 같이 쓰여질 수 있다.) **곱공간(product space) $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$**은 곱 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$과 다음을 기저로 갖는 위상 $\mathcal{T}$로 구성된다:

$$B = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \mathcal{T}_i \text{이고 유한개를 제외한 모든 } i\text{에 대하여 } O_i = X_i. \right\}$$

위상 $\mathcal{T}$를 **곱위상(product topology)**이라고 부른다.

따라서 기본열린집합(basic open set)은

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots$$

의 형태이다.

경고. **열린집합들의 곱이 곱위상 $\mathcal{T}$에서 열린집합일 필요가 없다**는 것은 분명하다. 특히, $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n, \ldots$가 모든 i에 대하여 $O_i \in \mathcal{T}_i$이고 $O_i \neq X_i$이면 $\prod_{i=1}^{\infty} O_i$은 $\mathcal{B}$의 원소들의 합집합으로 표현할 수 없다. 따라서 이것은 곱공간 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$에서 열린집합이 아니다.

9.2.2 주목. 왜 정의 9.2.1처럼 곱위상을 정의할까? 그 해답은 단지 이 정의를 가지고 컴팩트 공간들의 곱은 컴팩트라는 (무한곱에 대한) Tychonoff 정리를 얻기 때문이다. 그리고 이 결과는 응용에 있어서 매우 중요하다.

9.2.3 보기. $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n), \ldots$가 위상공간들의 가산무한족이라고 하자. 이때 곱 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 위의 **상자위상(box topology)** $\mathcal{T}'$은 다음을 기저로 갖는 위상이다:

$$B' = \Big\{ \prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \mathcal{T}_i \Big\}.$$

각 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 이산공간이면, 상자곱 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}')$은 이산공간임은 바로 알 수 있다. 따라서 각 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 이산위상을 갖는 유한집합이면, $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}')$은 무한 이산공간이고 분명히 컴팩트이지 않다. 그러므로 우리는 컴팩트 공간 $(X_i, \mathcal{T}_i)$들의 상자곱으로서 컴팩트이지 않는 상자곱을 갖는다. □

우리가 선택한 곱위상의 정의에 대한 또 다른 이유는 다음 명제로서 명제 8.2.5와 유사한 가산무한곱에 대한 명제이다.

9.2.4 명제. $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n), \ldots$이 위상공간들의 가산무한족이라 하고 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$는 그것들의 곱공간이라고 하자. 각각의 i에 대하여, $p_i\colon \prod_{j=1}^{\infty} X_j \to X_i$가 사영함수라고 하자; 즉, 각각의 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j$에 대하여 $p_i(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle) = x_i$이라고 하자. 그러면

(i) 각각의 p_i는 연속이고 전사인 열린함수이고;

(ii) $\mathcal{T}$는 각각의 p_i가 연속이 되게 하는 집합 $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ 위의 가장 엉성한 위상이다.

증명. 이 증명은 명제 8.2.5와 유사하므로 연습문제로 남겨둔다. □

다음 명제는 나중에 이용할 것이다.

9.2.5 명제. $i \in \mathbb{N}$인 $(X_i, \mathcal{T}_i)$와 $(Y_i, \mathcal{T}'_i)$가 각각 곱공간 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$와 $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \mathcal{T}')$을 갖는 위상공간들의 가산무한족이라고 하자. 만약 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 함수 $h_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y_i, \mathcal{T}'_i)$가 연속이라면, 다음과 같이 주어진 함수 $h\colon (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}) \to (\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \mathcal{T}')$도 연속이다: $h\colon (\prod_{i=1}^{\infty} x_i) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i)$; 즉, $h(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle) = \langle h_1(x_1), h_2(x_2), \ldots, h_n(x_n), \ldots \rangle$.

증명. O가 $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \mathcal{T}')$에서 기본열린집합일 때 $h^{-1}(O)$가 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T})$에서 열린집합임을 보이는 것으로 충분하다. 각각의 $i = 1, \ldots, n$에 대하여 $U_i \in \mathcal{T}'_i$인 기본열린집합 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots$을 생각하자. 그러면

$$h^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots) = h_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times h_n^{-1}(U_n) \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots$$

이고 우변의 집합은 $\mathcal{T}$에 속한다. 왜냐하면 각각의 $i = 1, \ldots, n$에 대하여 h_i의 연속성은 $h_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_i$을 함의하기 때문이다. 그러므로 h는 연속이다. □

연습문제 9.2

1. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 C_i가 위상공간 $(X_i, \mathcal{T}_i)$의 닫힌 부분집합이라고 하자. $\prod_{i=1}^{\infty} C_i$가 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$의 닫힌 부분집합임을 증명하시오.

2. 명제 9.2.5에서 각각의 함수 h_i가 또한

   (a) 단사,

   (b) 전사,

   (c) 전사이고 열린함수,

   (d) 위상동형함수

   이면 h는 각각

   (a) 단사,

   (b) 전사,

   (c) 전사이고 열린함수,

   (d) 위상동형함수

   임을 증명하시오.

3. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이라고 하자. 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$의 부분공간과 위상동형임을 증명하시오.
   [힌트: 명제 8.2.8을 보시오.]

4. (a) 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이라고 하자. 만약 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 (i) Hausdorff 공간, (ii) T_1-공간, (iii) T_0-공간이면, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 각각 (i) Hausdorff 공간, (ii) T_1-공간, (iii) T_0-공간 임을 증명하시오.

   (b) 위의 연습문제 3을 이용하여 (a)에 있는 명제의 역을 증명하시오.

5. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이라고 하자. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 이산공간일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 이산공간이고 X_i $(i \in \mathbb{N})$의 유한개를 제외한 모두가 단집합임을 증명하시오.

6. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이라고 하자. 다음을 증명하시오:

   (i) $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이면 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 컴팩트이다;

   (ii) $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 연결이면 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 연결이다;

   (iii) $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 국소 컴팩트이면 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 국소 컴팩트이고 유한개를 제외한 모든 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이다.

9.3 Cantor 공간과 Hilbert 큐브

9.3.1 주목. 우리는 이제 Cantor 공간이 두 점 공간들의 가산무한곱과 위상동형임을 증명하겠다.

각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(A_i, \mathcal{T}_i)$가 이산위상을 갖는 집합 $\{0, 2\}$라 하고 곱공간 $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$을 생각하자. 우리는 다음 명제에서 그것이 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$와 위상동형임을 보인다.

9.3.2 명제. $(G, \mathcal{T})$가 Cantor 공간이고 $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$이 주목 9.3.1에서와 같은 곱공간이라고 하자. 그러면 $f(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$으로 정의된 함수 $f\colon (G, \mathcal{T}) \longrightarrow (\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$는 위상동형함수이다.

증명. 우리는 주목 9.1.1에서 이미 f가 일대일대응임을 알았다. $(G, \mathcal{T})$가 컴팩트이고 $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \mathcal{T}')$이 Hausdorff이므로 (연습문제 9.2 #4) 연습문제 7.2 #6은 f가 연속이면 f가 위상동형함수임을 말한다.

f의 연속성을 증명하기 위해 임의의 기본열린집합 $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N \times A_{N+1} \times A_{N+2} \times \cdots$과 임의의 점 $a = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle \in U$에 대하여 $f(W) \subseteq U$인 열린집합 $W \ni \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$가 존재함을 보이는 것으로 충분하다.

열린구간 $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{3^{N+2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{N+2}})$을 생각하고 W가 이 열린구간과 G의 교집합이라고 하자. 그러면 W는 $(G, \mathcal{T})$에서 열린집합이고, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in W$이면 $i = 1, 2, \dots, N$에 대하여 $x_i = a_i$이다. 따라서 $f(x) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N \times A_{N+1} \times A_{N+2} \times \cdots$이고 그러므로 $f(W) \subseteq U$이다. □

위에서 지적했듯이, 우리는 적절한 때에 컴팩트 공간들의 임의의 곱은 컴팩트이다 – 즉, Tychonoff 정리를 증명할 것이다. 그러나 명제 9.3.2에 의하여 Cantor 공간과 위상동형인 카피들의 가산개의 곱이 Cantor 공간과 위상동형임을 평범하게 보일 수 있다. 따라서 그것은 컴팩트이다.

9.3.3 명제. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(G_i, \mathcal{T}_i)$가 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$와 위상동형인 위상 공간들이라고 하자. 그러면 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$(G, \mathcal{T}) \cong \prod_{i=1}^{\infty} (G_i, \mathcal{T}_i) \cong \prod_{i=1}^{n} (G_i, \mathcal{T}_i)$$

이다.

증명. 우선 $(G, \mathcal{T}) \cong (G_1, \mathcal{T}_1) \times (G_2, \mathcal{T}_2)$임을 입증하겠다. 이것은 명제 9.3.2에 의하여 다음을 보이는 것과 동치이다:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i) \cong \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i)$$

여기서 각각의 $(A_i, \mathcal{T}_i)$는 이산위상을 갖는 집합 $\{0, 2\}$이다.

이제 집합 $\prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i)$로부터 $\prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수 θ를 다음과 같이 정의한다:

$$\theta(\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle, \langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle) \longrightarrow \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots \rangle.$$

θ가 위상동형함수인 것은 손쉽게 입증된다. 따라서 $(G_1, \mathcal{T}_1) \times (G_2, \mathcal{T}_2) \cong (G, \mathcal{T})$이다. 그러면 귀납법에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 $(G, \mathcal{T}) \cong \prod_{i=1}^{n} (G_i, \mathcal{T}_i)$이다.

무한곱의 경우로 돌아와서 함수

$$\phi : \left[\prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i) \times \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i) \times \cdots \right] \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, \mathcal{T}_i)$$

를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \phi(\langle a_1, a_2, \dots \quad &\rangle, \langle b_1, b_2, \dots \rangle, \langle c_1, c_2, \dots \rangle, \langle d_1, d_2, \dots \rangle, \langle e_1, e_2, \dots \rangle, \dots) \\ &= \langle a_1, a_2, b_1, a_3, b_2, c_1, a_4, b_3, c_2, d_1, a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, \dots \rangle. \end{aligned}$$

다시 ϕ가 위상동형함수임은 손쉽게 입증된다. 이것으로 증명을 끝마친다. □

9.3.4 주목. 명제 9.3.3에 있는

$$(G, \mathcal{T}) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(G_i, \mathcal{T}_i)$$

를 다음과 같이 쓰면 아마도 더욱 명료할 것이다:

$$(A, \mathcal{T}) \times (A, \mathcal{T}) \times \cdots \ \cong \ [(A, \mathcal{T}) \times (A, \mathcal{T}) \times \cdots] \times [(A, \mathcal{T}) \times (A, \mathcal{T}) \times \cdots] \times \cdots$$

여기서 $(A, \mathcal{T})$는 이산위상을 갖는 집합 $\{0, 2\}$이다. □

9.3.5 명제. 위상공간 $[0, 1]$은 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$의 연속인 상이다.

증명. 명제 9.3.2에서처럼 $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i)$로부터 $[0, 1]$로의 전사인 연속함수 ϕ를 찾는 것으로 충분하다. 그러한 함수는

$$\phi(\langle a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\rangle) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

으로 주어진다. 각각의 i에 대하여 $a_i \in \{0, 2\}$이고 각각의 수 $x \in [0, 1]$는 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j}$ $(b_j \in \{0, 1\})$와 같은 유형의 이진수 전개를 가짐을 회상하면, ϕ가 전사함수임을 알 수 있다. 명제 5.1.7에 의해 ϕ가 연속임을 증명하는 것은 다음을 검증하는 것으로 충분하다:

U가 열린구간

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} - \varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} + \varepsilon\right) \ni \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}, \qquad \varepsilon > 0$$

이면, $\phi(W) \subseteq U$인 열린집합 $W \ni \langle a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\rangle$가 존재한다. $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} < \varepsilon$을 만족하는 충분히 큰 N을 선택하고

$$W = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_N\} \times A_{N+1} \times A_{N+2} \times \cdots$$

라 놓자. 그러면 W는 $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \mathcal{T}_i)$에서 열린집합이고, $\phi(W) \subseteq U$이다. □

9.3.6 주목. 명제 9.3.5에 의해 "멋진" 공간 [0,1]이 매우 특이한 Cantor 공간의 연속인 상이라고 말하는 것에 다소 놀랄 것이다. 그러나 우리는 적절한 때에 모든 컴팩트 거리공간이 Cantor 공간의 연속인 상임을 보게 될 것이다. □

9.3.7 정의. 각각의 양의 정수 n에 대하여, 위상공간 $(I_n, \mathcal{T}_n)$이 $[0,1]$과 위상동형이라고 할 때, 곱공간 $\prod_{n=1}^{\infty}(I_n, \mathcal{T}_n)$을 **Hilbert 입방체(Hilbert cube)**라 부르고 I^∞로 나타낸다. 그리고 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, 곱공간 $\prod_{i=1}^{n}(I_i, \mathcal{T}_i)$을 **$n$-입방체($n$-cube)**라 부르고 I^n으로 나타낸다.

유한곱에 대한 Tychonoff 정리 8.3.1로부터 각각의 n에 대하여 I^n이 컴팩트인 것은 알고 있다. 우리는 이제 I^∞가 컴팩트인 것을 증명하겠다. (물론 이 결과는 무한곱에 대한 Tychonoff 정리 10.3.4로부터 얻어질 수도 있다. 이것은 10장에서 증명된다.)

9.3.8 정리. Hilbert 입방체는 컴팩트이다.

증명. 명제 9.3.5에 의하여, 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $(G_n, \mathcal{T}_n)$으로부터 $(I_n, \mathcal{T}'_n)$으로의 연속인 전사함수 ϕ_n이 존재한다. 여기서 $(G_n, \mathcal{T}_n)$과 $(I_n, \mathcal{T}'_n)$은 각각 Cantor 공간과 $[0,1]$에 위상동형이다. 그러므로 명제 9.2.5와 연습문제 9.2 #2 (b)에 의하여, $\prod_{n=1}^{\infty}(G_n, \mathcal{T}_n)$으로부터 $\prod_{n=1}^{\infty}(I_n, \mathcal{T}'_n) = I^\infty$으로의 연속인 전사함수 ψ가 존재한다. 또한 명제 9.3.3은 $\prod_{n=1}^{\infty}(G_n, \mathcal{T}_n)$이 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$와 위상동형임을 말한다. 그러므로 I^∞는 컴팩트 공간 $(G, \mathcal{T})$의 연속인 상이고, 따라서 컴팩트이다. □

9.3.9 명제. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 거리화가능 공간이라고 하자. 그러면 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$은 거리화가능이다.

증명. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여, d_i가 위상 $\mathcal{T}_i$를 유도하는 X_i 위의 거리라고 하자. X_i에 있는 모든 a와 b에 대하여 $e_i(a,b) = \min(1, d_i(a,b))$라 놓으면, 연습문제 6.1 #2에 의하여, e_i는 X_i 위의 거리이고 위상 $\mathcal{T}_i$를 유도한다. 그래서 우리는 일반성을 잃지 않고 X_i $(i \in \mathbb{N})$에 있는 모든 a와 b에 대하여 $d_i(a,b) \le 1$라고 가정할 수 있다.

$d\colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자: X_i에 있는 모든 a_i와 b_i에 대하여

$$d\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \prod_{i=1}^{\infty} b_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i}.$$

각각의 i에 대하여 $d_i(a_i, b_i) \le 1$이고 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$이므로 우변의 급수는 위로 유계가 되어 수렴함을 관찰하자.

d가 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 위의 거리임은 쉽게 증명할 수 있다. $d_i'(a,b) = \frac{d_i(a,b)}{2^i}$으로 정의된 d_i'은 X_i 위의 거리이고 d_i처럼 같은 위상 $\mathcal{T}_i$를 유도함을 관찰하자. 우리는 d가 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 위의 곱위상을 유도함을 주장할 것이다.

이것을 알기 위해 다음을 생각하자:

$$d\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_i\,, \prod_{i=1}^{\infty} b_i\right) \ge \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} = d_i'(a_i, b_i)$$

이기 때문에, 각각의 i에 대하여 사영함수 $p_i : (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, d) \longrightarrow (X_i, d_i')$는 연속이다. d_i'는 위상 $\mathcal{T}_i'$을 유도하기 때문에, 명제 9.2.4 (ii)는 d에 의해 유도된 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 위의 위상이 곱위상보다 더 섬세하다.

d에 의해 유도된 위상이 또한 곱위상보다 엉성하다는 것을 증명하기 위하여, $B_\varepsilon(a)$가 중심이 $a = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$이고 반지름이 $\varepsilon > 0$인 열린공이라고 하자. 그래서 $B_\varepsilon(a)$는 d에 의해 유도된 위상에서 기본열린집합이다. 우리는 $a \in W \subseteq B_\varepsilon(a)$을 만족하고 곱위상에서 열린집합인 W가 존재하는 것을 보여야 한다. N이 양의 정수로서 $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$을 만족한다고 하고, O_i가 (X_i, d_i)에서 중심이 a_i $(i = 1, \dots, N)$이고 반지름이 $\frac{\varepsilon}{2N}$인 열린공이라고 하고, 다음과 같이 정의하자:

$$W = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \cdots.$$

그러면 W는 곱위상에서 열린집합이며, $a \in W$이고 명백히 $W \subseteq B_\varepsilon(a)$이다. □

9.3.10 따름정리. Hilbert 입방체는 거리화가능이다. □

명제 9.3.9의 증명은 다음 결과를 얻도록 개선될 수 있다:

9.3.11 명제. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 완비거리화가능 공간이라고 하자. 그러면 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$은 완비거리화가능이다.

증명. 연습문제 9.3 #10. □

9.3.12 주목. 명제 9.3.11로부터 이산공간의 가산무한곱은 완비거리화가능이라는 것을 안다. 이러한 것들 중 가장 흥미로운 것은 $\mathbb{N}^{\aleph_0}$으로 이것은 이산공간 $\mathbb{N}$과 각각이 위상동형인 위상공간들의 가산무한곱이다. 6장에서 언급된 바와 같이 훨씬 더 놀라운 것은 **$\mathbb{N}^{\infty}$가 유클리드 위상을 갖는 모든 유리수들의 위상공간인 $\mathbb{P}$와 위상동형이다**는 사실이다. Engelking [105]의 연습문제 4.3.G와 연습문제 6.2.A를 보시오.

9.3.13 주목. 완비거리화가능인 가산곱의 또 다른 중요한 보기는 $\mathbb{R}^{\infty}$이다. 이것은 $\mathbb{R}$과 각각이 위상동형인 위상공간들의 가산무한곱이다. Engelking [105]의 따름정리 4.3.25는 다음을 보여준다: **가분인 거리화가능 공간이 완비거리화가능일 필요충분조건은 그것이 $\mathbb{R}^{\infty}$의 닫힌 부분공간과 위상동형인 것이다.** 특히 우리는 **모든 가분인 Banach 공간은 $\mathbb{R}^{\infty}$의 닫힌 부분공간과 위상동형**임을 안다.

하나의 아름답고 깊은 결과는 다음과 같다: **모든 가분인 무한차원 Banach 공간은 $\mathbb{R}^{\infty}$와 위상동형이다.** Bessaga and Pelczynski [36]을 보시오.

연습문제 9.3

1. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여, (X_i, d_i)가 거리공간으로 X_i에 있는 모든 a와 b에 대하여 $d_i(a,b) \leq 1$이라 하고 $e : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자:
$$e\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \prod_{i=1}^{\infty} b_i\right) = \sup\{d_i(a_i, b_i) : i \in \mathbb{N}\}.$$
e가 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 위의 거리임을 증명하고 명제 9.3.9에 있는 거리 d와 동치임을 증명하시오. ("동치"의 의미가 "같은 위상을 유도한다"임을 상기하자.)

2. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여, $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 $[0,1]$의 컴팩트 부분공간일 때, 정리 9.3.8과 연습문제 9.2 #1로부터 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$이 컴팩트임을 추론하시오.

3. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간들의 가산무한족의 곱이라고 하자. $(Y, \mathcal{T})$가 위상공간이고 f가 $(Y, \mathcal{T})$로부터 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수라고 하자. f가 연속일 필요충분조건은 각각의 함수 $p_i \circ f : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속임을 증명하시오. 여기서 p_i는 사영함수를 나타낸다.

4. (a) X가 유한집합이고 $\mathcal{T}$가 X 위의 Hausdorff 위상이라고 하자. 다음을 증명하시오:
   (i) $\mathcal{T}$는 이산위상이다;
   (ii) $(X, \mathcal{T})$는 $[0,1]$의 부분공간과 위상동형이다.

   (b) (a)와 위 연습문제 3을 이용하여, 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 유한 Hausdorff 공간일 때, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이고 거리화가능임을 증명하시오.

   (c) 모든 유한 위상공간은 유한 이산공간의 연속인 상임을 보이시오.

   (d) (b)와 (c)를 이용하여, 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 유한 위상공간일 때, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트임을 증명하시오.

5. (i) Sierpinski 공간 (연습문제 1.3 #5 (iii))이 $[0,1]$의 연속인 상임을 증명하시오.
   (ii) (i)과 명제 9.2.5를 이용하여, 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 Sierpinski 공간과 위상동형이면 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트임을 보이시오.

6. (i) 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 제2가산공리를 만족하는 위상공간이라고 하자. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 제2가산공리를 만족함을 증명하시오.

   (ii) 연습문제 3.2 #4 (viii)과 연습문제 4.1 #14를 이용하여, Hilbert 입방체와 그것의 모든 부분공간들이 가분임을 추론하시오.

7. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이라고 하자. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 완전비연결일 필요충분조건이 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 완전비연결임을 증명하시오. Cantor 공간이 완전비연결임을 추론하시오.

8. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고 각각의 $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_{ij}, \mathcal{T}_{ij})$가 $(X, \mathcal{T})$와 위상동형이라고 하자.
$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(X_{ij}, \mathcal{T}_{ij})\right) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(X_{i1}, \mathcal{T}_{i1})$$
임을 증명하시오.
[힌트: 이 결과는 명제 9.3.3을 일반화하고 그 증명은 ϕ와 유사한 함수를 사용한다.]

9. (i) 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 Hilbert cube와 위상동형인 위상공간이라고 하자. 위 연습문제 8로부터 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 Hilbert 입방체와 위상동형임을 추론하시오.

   (ii) 이런 이유로 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 Hilbert 입방체의 컴팩트 부분공간일 때 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트임을 보이시오.

10. 명제 9.3.11을 증명하시오.
[힌트. 명제 9.3.9의 증명의 표기법에서, $a_n = \prod_{i=1}^{\infty} a_{in}$ $(n \in \mathbb{N})$이 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, d)$에 있는 Cauchy 수열이면, 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여, $\{a_{in} : n \in \mathbb{N}\}$이 (X_i, d_i)에 있는 Cauchy 수열임을 보이시오.]

9.4 Urysohn 정리

9.4.1 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 가산이고 조밀한 부분집합을 가질 때 $(X, \mathcal{T})$를 **가분 (separable)**이라고 말한다.

가분공간이 소개되었던 연습문제 3.2 #4와 연습문제 8.1 #9를 보시오.

9.4.2 보기. $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$에서 조밀하므로 $\mathbb{R}$은 가분이다. □

9.4.3 보기. 모든 가산인 위상공간은 가분이다. □

9.4.4 명제. $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트인 거리화가능 공간이라고 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$는 가분이다.

증명. d가 위상 $\mathcal{T}$를 유도하는 X 위의 거리라고 하자. 각각의 양의 정수 n에 대하여, $\mathcal{S}_n$을 중심이 X에 있고 반지름이 $\frac{1}{n}$인 모든 열린공들의 족이라고 하자. 그러면 $\mathcal{S}_n$은 X의 열린덮개이므로 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 유한 부분덮개 $\mathcal{U}_n = \{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}\}$이 존재한다. y_{n_j}가 U_{n_j} $(j = 1, \dots, k)$의 중심이라 하고 $Y_n = \{y_{n_1}, y_{n_2}, \dots, y_{n_k}\}$이라고 한 다음, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$이라고 놓자. 그러면 Y는 X의 가산인 부분집합이다. 우리는 이제 Y가 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀함을 보이겠다.

V가 $(X, \mathcal{T})$의 공집합이 아닌 열린집합이면, 임의의 $v \in V$에 대하여 V는 중심이 v이고 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 반지름이 $\frac{1}{n}$인 열린공 B를 포함한다. $\mathcal{U}_n$이 X의 열린덮개이기 때문에, 어떤 j에 대하여 $v \in U_{n_j}$이다. 그러므로 $d(v, y_{n_j}) < \frac{1}{n}$이고 그래서 $y_{n_j} \in B \subseteq V$이다. 이런 이유로 $V \cap Y \neq \emptyset$이고 그래서 Y는 X에서 조밀하다. □

9.4.5 따름정리. Hilbert 입방체는 가분공간이다. □

모든 컴팩트 거리화가능 공간이 Hilbert 입방체의 부분공간과 위상동형임을 보여주는 매우 두드러진 Urysohn 정리를 우리는 간략하게 증명할 것이다. 도중에 우리는 (가산 버전인) 묻기 보조정리 (Embedding Lemma)를 증명한다.

우선 우리는 다음 명제를 적어 놓는다. 이것은 연습문제 9.3 #3으로 그 증명은 여기에 포함되지 않는다.

9.4.6 명제. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이고 f가 한 위상공간 $(Y, \mathcal{T})$로부터 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수라고 하자. 그러면 f가 연속일 필요충분조건은 각각의 함수 $p_i \circ f \colon (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속이다. 여기서 p_i는 $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$로부터 $(X_i, \mathcal{T}_i)$ 위로의 사영함수이다.

9.4.7 보조정리. **(묻기 보조정리(The Embedding Lemma))** 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(Y_i, \mathcal{T}_i)$가 위상공간이고 f_i가 한 위상공간 $(X, \mathcal{T})$로부터 $(Y_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수라고 하자. 더욱이, $e\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(Y_i, \mathcal{T}_i)$가 **값매김 함수(evaluation map)**라고 하자; 즉, 모든 $x \in X$에 대하여 $e(x) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(x)$이라고 하자. 만약 다음 조건

(i) 각각의 f_i가 연속이다,

(ii) 족 $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$가 X의 **점들을 분리한다(separates points)**; 즉, x_1과 x_2가 X에 있고 $x_1 \neq x_2$이면, 어떤 i에 대하여 $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$이다, 그리고

(iii) 족 $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$가 **점과 닫힌집합을 분리한다(separates points and closed sets)**; 즉, $x \in X$이고 A가 $(X, \mathcal{T})$의 x를 포함하지 않는 닫힌 부분집합이면, 어떤 i에 대하여 $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$이다

를 만족한다면 e는 $(X, \mathcal{T})$로부터 $(e(X), \mathcal{T}')$로의 위상동형함수이다. 여기서 $\mathcal{T}'$는 $e(X)$ 위의 부분위상이다.

증명. 명백히 함수 $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (e(X), \mathcal{T}')$는 전사이다. 한편, 조건 (ii)에 의해 이 함수는 단사이다.

각각의 i에 대하여 $p_i \circ e = f_i$는 $(X, \mathcal{T})$로부터 $(Y_i, \mathcal{T}_i)$로의 연속함수이기 때문에, 명제 9.4.6에 의해 함수 $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(Y_i, t_i)$는 연속이다. 따라서 $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (e(X), \mathcal{T}')$는 연속이다.

$e\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (e(X), \mathcal{T}')$가 열린함수임을 보이는 것은 각각의 $U \in \mathcal{T}$와 $x \in U$에 대하여, $e(x) \in W \subseteq e(U)$을 만족하는 집합 $W \in \mathcal{T}'$가 존재하는 것을 검증하는 것으로 충분하다. 족 $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}$는 점과 닫힌집합을 분리하기 때문에, $f_j(x) \notin \overline{f_j(X \setminus U)}$을 만족하는 $j \in \mathbb{N}$가 존재한다.

$$W = (Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_{j-1} \times [Y_j \setminus \overline{f_j(X \setminus U)}] \times Y_{j+1} \times Y_{j+2} \times \cdots) \cap e(X)$$

라고 놓자. 그러면 분명히 $e(x) \in W$이고 $W \in \mathcal{T}'$이다. 이제 $W \subseteq e(U)$을 보이는 것만 남았다. $e(t) \in W$이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} & f_j(t) \in Y_j \setminus \overline{f_j(X \setminus U)} \\ \Rightarrow\quad & f_j(t) \notin \overline{f_j(X \setminus U)} \\ \Rightarrow\quad & f_j(t) \notin f_j(X \setminus U) \\ \Rightarrow\quad & t \notin X \setminus U \\ \Rightarrow\quad & t \in U \end{aligned}$$

이다. 그래서 $e(t) \in e(U)$이고 따라서 $W \subseteq e(U)$이다. 그러므로 e는 위상동형함수이다. □

9.4.8 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 $x \in X$에 대하여 단집합 $\{x\}$가 닫힌집합일 때, 이 위상공간을 ***T_1*-공간(T_1-space)**이라고 말한다.

9.4.9 주목. **모든 Hausdorff 공간 (즉, T_2-공간)은 T_1-공간**임은 쉽게 검증된다. 하지만 그 역은 거짓이다. (연습문제 4.1 #13과 연습문제 1.3 #3을 보시오.) 특히, **모든 거리화가능 공간은 T_1-공간이다.**

9.4.10 따름정리. 보조정리 9.4.7에 있는 $(X, \mathcal{T})$가 $\boldsymbol{T_1}$-공간이면, 조건 (ii)는 조건 (iii)에 의해 함의된다. (따라서 조건 (ii)는 불필요하다.)

증명. x_1과 x_2가 X에 있는 서로 다른 점이라고 하자. A를 닫힌집합 $\{x_2\}$로 놓으면, 조건 (iii)은 다음을 함의한다: 어떤 i에 대하여, $f_i(x_1) \notin \overline{\{f_i(x_2)\}}$이다. 따라서 $f_i(x_i) \neq f_i(x_2)$이고 조건 (ii)를 만족한다. $\square$

9.4.11 정리. (Urysohn 정리(Urysohn's Theorem)) 모든 가분인 거리공간 (X,d)는 Hilbert 입방체의 한 부분공간과 위상동형이다.

증명. 따름정리 9.4.10에 의하여, (i) 연속이고, (ii) 점과 닫힌집합을 분리하는 함수 $f_i\colon (X,d) \longrightarrow [0,1]$들의 가산무한족을 찾을 수 있다면 이 결과는 얻어진다.

모든 거리는 유계인 거리와 동치이기 때문에, 일반성을 잃지 않고 X에 있는 모든 a와 b에 대하여 $d(a,b) \le 1$이라고 가정할 수 있다.

(X,d)는 가분이기 때문에, 가산이고 조밀한 부분집합 $Y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$가 존재한다. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $f_i\colon X \longrightarrow [0,1]$를 $f_i(x) = d(x,y_i)$로 정의하자. 분명히 각각의 함수 f_i는 연속이다.

$\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$가 점과 닫힌집합을 분리한다는 것을 보이기 위해, $x \in X$이고 A가 x를 포함하지 않는 닫힌집합이라고 하자. 그러면 $X \setminus A$는 x를 포함하는 열린집합이므로 중심이 x이고 어떤 $\varepsilon > 0$에 대하여 반지름이 ε인 열린공 B를 포함한다.

더욱이, Y가 X에서 조밀하기 때문에, $d(x,y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$을 만족하는 y_n가 존재한다. 그러므로 모든 $a \in A$에 대하여, $d(y_n,a) \ge \frac{\varepsilon}{2}$이다.

그래서 $[0,\frac{\varepsilon}{2})$은 $[0,1]$에서 열린집합이고 $f_n(x)$을 포함한다. 그러나 모든 $a \in A$에 대하여, $f_n(a) \notin [0,\frac{\varepsilon}{2})$이다. 따라서 $f_n(A) \subseteq [\frac{\varepsilon}{2},1]$이다. 집합 $[\frac{\varepsilon}{2},1]$은 닫힌집합이기 때문에, $\overline{f_n(A)} \subseteq [\frac{\varepsilon}{2},1]$이다.

따라서 $f_n(x) \notin \overline{f_n(A)}$이고 그러므로 족 $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$은 점과 닫힌집합을 분리한다. □

9.4.12 따름정리. 모든 컴팩트 거리화가능 공간은 Hilbert 입방체의 한 닫힌 부분공간과 위상동형이다. □

9.4.13 따름정리. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여, $(X_i,\mathcal{T}_i)$가 컴팩트 거리화가능 공간이라면, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$는 컴팩트이고 거리화가능이다.

증명. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$가 거리화가능이라는 것은 명제 9.3.9에서 증명되었다. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$가 컴팩트라는 것은 따름정리 9.4.12와 연습문제 9.3 #9 (ii)로부터 얻어진다. □

우리의 다음 과제는 Urysohn 정리의 역을 검증하는 것이다. 이를 위해 새로운 개념을 소개한다. (연습문제 2.2 #4를 보시오.)

9.4.14 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 **제2가산공리(second axiom of countability)**를 만족한다 (또는 **제2가산(second countable)**이다)고 말하는 것은 가산개의 집합들로만 구성된 $\mathcal{T}$에 대한 기저 $\mathcal{B}$가 존재하는 것을 의미한다.

9.4.15 보기. $\mathcal{B} = \{(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$이라고 하자. 그러면 $\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 위상에 대한 기저이다. (이것을 검증하시오.) 그러므로 $\mathbb{R}$은 제2가산이다. □

9.4.16 보기. $(X, \mathcal{T})$가 이산위상을 갖는 비가산집합이라고 하자. 그러면 모든 단집합은 $\mathcal{T}$에 대한 임의의 기저에 속하기 때문에, $(X, \mathcal{T})$는 가산기저를 갖지 않는다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 제2가산이 아니다. □

9.4.17 명제. (X, d)가 거리공간이고 $\mathcal{T}$가 유도된 위상이라고 하자. 이때, $(X, \mathcal{T})$가 가분공간일 필요충분조건은 그것이 제2가산공리를 만족하는 것이다.

증명. $(X, \mathcal{T})$가 가분이라고 하자. 그러면 가산이고 조밀한 부분집합 $Y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$가 존재한다. $\mathcal{B}$가 어떤 i에 대하여 중심이 y_i이고 어떤 양의 정수 n에 대하여 반지름이 $\frac{1}{n}$인 (거리 d에서) 모든 열린공들로 구성되어 있다고 하자. 분명히 $\mathcal{B}$는 가산이고 우리는 이것이 $\mathcal{T}$에 대한 기저임을 보일 것이다.

$V \in \mathcal{T}$라고 하자. 그러면 임의의 $v \in V$에 대하여, V는 중심이 v이고 어떤 n에 대하여 반지름이 $\frac{1}{n}$인 열린공 B를 포함한다. Y가 X에서 조밀하기 때문에, $d(y_m, v) < \frac{1}{2n}$을 만족하는 $y_m \in Y$이 존재한다.

B'이 중심이 y_m이고 반지름이 $\frac{1}{2n}$인 열린공이라고 하자. 그러면 삼각부등식에 의해 $B' \subseteq B \subseteq V$이다. 또한 $B' \in \mathcal{B}$이다. 따라서 $\mathcal{B}$는 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다. 그러므로 $(X, \mathcal{T})$는 제2가산이다.

역으로 $(X, \mathcal{T})$가 제2가산, 즉, 가산기저 $\mathcal{B}_1 = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$을 갖는다고 하자. 각각의 $B_i \neq \emptyset$에 대하여, b_i가 B_i의 원소라 하고 Z가 그러한 모든 b_i들의 집합이라고 하자. 그러면 Z는 가산집합이다. 더욱이, $V \in \mathcal{T}$이면 어떤 i에 대하여 $V \supseteq B_i$이므로 $b_i \in V$이다. 그러므로 $V \cap Z \neq \emptyset$이다. 따라서 Z는 X에서 조밀하다. 결과적으로 $(X, \mathcal{T})$는 가분이다. □

9.4.18 주목. 위 증명은 거리화가능의 가정이 없더라도 **모든 제2가산공간이 가분**임을 보여준다. 하지만, 일반적으로 가분공간이 제2가산인 것은 사실이 **아니다**. (연습문제 9.4 #11을 보시오.)

9.4.19 정리. (Urysohn 정리와 그 역(Urysohn's Theorem and its Converse)) $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이라고 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$가 가분이고 거리화가능일 필요충분조건은 그것이 Hilbert 입방체의 부분공간과 위상동형이다.

증명. $(X, \mathcal{T})$가 가분이고 거리화가능이면 Urysohn 정리 9.4.11에 의하여 그것은 Hilbert 입방체의 부분공간과 위상동형이다.

역으로, $(X, \mathcal{T})$가 Hilbert 입방체 I^∞의 부분공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$과 위상동형이라고 하자. 명제 9.4.4에 의하여, I^∞는 가분이다. 그래서 명제 9.4.17에 의하여, 그것은 제2가산이다. (연습문제 4.1 #14에서) 제2가산공간의 임의의 부분공간이 제2가산임은 이미 증명되었다. 따라서 $(Y, \mathcal{T}_1)$은 제2가산이다. 또한 거리화가능 공간의 임의의 부분공간이 거리화가능이라는 것도 이미 증명되었다 (연습문제 6.1 #6). Hilbert 입방체는 거리화가능이기 때문에 따름정리 9.3.10에 의하여, 그것의 부분공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$도 거리화가능이다. 그래서 $(Y, \mathcal{T}_1)$은 거리화가능이고 제2가산공리를 만족한다. 따라서 그것은 가분이다. 그러므로 $(X, \mathcal{T})$ 또한 가분이고 거리화가능이다. $\square$

연습문제 9.4

1. 가분공간의 모든 연속인 상은 가분임을 증명하시오.

2. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 가분공간이면, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 가분공간임을 증명하시오.

3. 보조정리 9.4.7에 있는 모든 공간들 $(Y_i, \mathcal{T}_i)$가 Hausdorff이고 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트이면, 그 보조정리의 조건 (iii)이 불필요함을 보이시오.

4. $(X, \mathcal{T})$가 가산이고 이산공간이면, Hilbert 입방체의 한 부분공간과 위상동형임을 증명하시오.

5. 보기 6.1.5에 묘사된 거리 d를 가지고 있는 $C[0, 1]$이 Hilbert 입방체의 한 부분공간과 위상동형임을 검증하시오.

6. 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 제2가산공간이면, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 제2가산임을 증명하시오.

7. (**Lindelöf 정리(Lindelöf's Theorem)**) **제2가산공간의 모든 열린덮개는 가산인 부분 덮개를 가짐**을 증명하시오.

8. 정리 9.4.19로부터 **가분인 거리화가능 공간의 모든 부분공간이 가분이고 거리화가능**임을 추론하시오.

9. (i) 제2가산공간의 모든 고립점들의 집합이 가산임을 증명하시오.

   (ii) 따라서, 제2가산공간의 임의의 비가산 부분집합 A는 A의 극한점을 적어도 하나 포함함을 보이시오.

10. (i) Hausdorff이고 비가분인 공간 $(X, \mathcal{T})$로부터 자기자신 위로의 연속함수를 f라고 하자. $f(A) = A$을 만족하는 X의 공집합이 아닌 닫혀있는 진부분집합 A가 존재함을 증명하시오. [힌트: $x_0 \in X$라 하고 모든 정수 n에 대하여 $x_{n+1} = f(x_n)$을 만족하는 집합 $S = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$를 정의하시오.]

    (ii) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 가분이면 위 결과는 사실인가? (그 이유를 설명하시오.)

11. $\mathcal{T}$가 보기 2.3.1에서 정의된 $\mathbb{R}$ 위의 위상이라고 하자. 다음을 증명하시오:

    (i) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$는 가분이다;

    (ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$는 제2가산이 아니다.

12. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 열린집합들로 이루어진 모든 족이 가산일 때, 이 위상공간이 **가산사슬조건(countable chain condition)**을 만족한다고 말한다.

    (i) 모든 가분공간이 가산사슬조건을 만족함을 증명하시오.

    (ii) X가 비가산집합이고 $\mathcal{T}$가 X 위의 여가산위상이라고 하자. $(X, \mathcal{T})$가 가산사슬조건을 만족하지만 가분이 아님을 보이시오.

13. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 공집합이 아닌 부분공간이 고립점을 가질 때, 이 위상공간은 **흩어져있다 (scattered)**고 말한다. (연습문제 9.1 #2를 보시오.)
   (i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, 그리고 Cantor 공간은 흩어져있지 않고, 반면에 모든 이산공간은 흩어져있음을 검증하시오.
   (ii) $X = \mathbb{R}^2$이고 d가 $\mathbb{R}^2$ 위의 유클리드 거리이고 d'이 다음과 같이 주어진 X 위의 거리라고 하자: $x \neq y$이면 $d'(x, y) = d(x, 0) + d(0, y)$이고, $x = y$이면 $d'(x, y) = 0$. $\mathcal{T}$가 거리 d'에 의해 유도된 X 위의 위상이라고 하자. 이 거리 d'을 **우체국 거리(Post Office Metric)**라고 부른다. 한 위상공간의 모든 열린집합의 폐포가 열린집합일 때, 이 위상공간을 **극치적 비연결(extremally disconnected)**이라고 말한다. 한 위상공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 모든 이산인 부분공간 $(Z, \mathcal{T}_2)$에 대하여 그리고 Z에 있는 각각의 서로 다른 두 점 z_1, z_2에 대하여 $z_1 \in U_1$와 $z_2 \in U_2$을 만족하는 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 서로소인 열린집합 U_1, U_2가 존재할 때, 이 위상공간을 **집합족적 Hausdorff(collectionwise Hausdorff)**라고 말한다.

   다음을 증명하시오:

   (a) $x = 0$을 제외한 $(X, \mathcal{T})$에 있는 모든 점은 고립점이다.
   (b) 0은 $(X, \mathcal{T})$의 고립점이 아니다.
   (c) $(X, \mathcal{T})$는 흩어진 공간이다.
   (d) $(X, \mathcal{T})$는 완전비연결이다.
   (e) $(X, \mathcal{T})$는 컴팩트가 아니다.
   (f) $(X, \mathcal{T})$는 국소컴팩트이가 아니다. (연습문제 8.3 #1을 보시오.)
   (g) 모든 가분인 거리공간은 $\mathfrak{c}$보다 작거나 같은 기수를 갖는다.
   (h) $(X, \mathcal{T})$는 가분이 아니면서 기수가 $\mathfrak{c}$인 거리화가능 공간의 보기이다. (연습문제 6.1 #7 (iii)의 거리공간 (ℓ_∞, d_∞) 또한 가분이 아니면서 기수가 $\mathfrak{c}$이라는 것을 주목하자.)
   (i) 모든 이산공간은 극치적 비연결이다.
   (j) $(X, \mathcal{T})$는 극치적 비연결이 아니다.
   (k) 임의의 두 흩어진 공간의 곱은 흩어진 공간이다.
   (l) $(S, \mathcal{T}_3)$가 $\mathbb{R}$의 부분공간 $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\}$이라고 하자. 그러면 S는 극치적 비연결이 아니다.
   (m)* 모든 극치적 비연결인 거리화가능 공간은 이산공간이다.
   [힌트. 모든 수렴하는 수열은 반복되는 항들을 가지고 있어야 함을 보이시오.]
   (n) 위상공간이 Hausdorff일 필요충분조건은 그것이 T_1-공간이고 집합족적 Hausdorff 이다.
   (o)* 모든 극치적 비연결인 집합족적 Hausdorff 공간은 이산공간이다.

14. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고 $\mathcal{B}$가 위상 $\mathcal{T}$에 대한 기저로서 $\mathcal{B}$의 기수 card $\mathcal{B}$가 m과 같다고 하자. m이 $\mathcal{T}$에 대한 기저들의 기수 중 가장 작은 기수일 때, m을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 **웨이트(weight)**라고 말하고 **w$(X, \mathcal{T})$**로 나타낸다. 물론, $m \leq \aleph_0$일 때, $(X, \mathcal{T})$를 제2가산공간이라고 말한다.

    (i) 위상공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$이 공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간일 때, $(Y, \mathcal{T}_1)$의 웨이트가 $(X, \mathcal{T})$의 웨이트보다 작거나 같음을 검증하시오.

    (ii) 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $(X_n, \mathcal{T}_n)$이 위상공간이고 m이 무한기수라고 하자. 각각의 공간 $(X_n, \mathcal{T}_n)$이 m보다 크지 않은 웨이트를 갖는다면, 곱공간 $\prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{T}_n)$의 웨이트가 m보다 크지 않음을 증명하시오.

    (iii) (ii)로부터 곱공간 $\mathbb{R}^{\aleph_0}$가 제2가산임을 추론하시오.

15. $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고 $\mathcal{N}$이 X의 (열린집합일 필요는 없는) 부분집합들의 집합이라고 하자. 각각의 $x \in X$와 x의 각각의 열린근방 O에 대하여, $x \in N \subseteq O$을 만족하는 $N \in \mathcal{N}$이 존재할 때, $\mathcal{N}$을 **네트워크(network)**라고 말한다. card $\mathcal{N} = m$이라고 하자. 만약 m이 $(X, \mathcal{T})$에 대한 네트워크의 기수들 중 가장 작은 기수라면, m을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 **네트워크 웨이트(network weight)**라고 말하고 **nw$(X, \mathcal{T})$**로 나타낸다.

    (i) 임의의 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에 대하여, nw$(X, \mathcal{T}) \leq$ w$(X, \mathcal{T})$임을 검증하시오.

    (ii) $(X, \mathcal{T})$가 이산공간이면, nw$(X, \mathcal{T}) =$ w$(X, \mathcal{T}) =$ card X임을 검증하시오.

9.5 Peano 정리

9.5.1 주목. 정리 9.3.8의 증명에서 Hilbert 입방체 I^∞가 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$의 연속인 상임을 보였다. 사실, 모든 컴팩트 거리공간은 Cantor 공간의 연속인 상이다. 이것을 증명하기 위해서는 다음 명제가 필요하다.

9.5.2 명제. 모든 가분인 거리화가능 공간 $(X, \mathcal{T}_1)$은 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$의 한 부분공간의 연속인 상이다. 더욱이, $(X, \mathcal{T}_1)$이 컴팩트이면, 그 부분공간은 $(G, \mathcal{T})$에서 닫힌공간으로 선택될 수 있다.

증명. ϕ가 정리 9.3.8의 증명에서 존재한다고 보였던 $(G, \mathcal{T})$로부터 I^∞ 위로의 연속함수라고 하자. Urysohn 정리 9.4.19에 의해, $(X, \mathcal{T}_1)$은 I^∞의 한 부분공간 $(Y, \mathcal{T}_2)$와 위상동형이다. $(Y, \mathcal{T}_2)$로부터 $(X, \mathcal{T}_1)$ 위로의 그 위상동형함수를 Θ라고 하자. $Z = \psi^{-1}(Y)$이고 $\mathcal{T}_3$가 Z의 부분공간위상이라고 하자. 그러면 $\Theta \circ \psi$는 $(Z, \mathcal{T}_3)$로부터 $(X, \mathcal{T}_1)$ 위로의 연속함수이다. 그래서 $(X, \mathcal{T}_1)$은 $(G, \mathcal{T})$의 부분공간 $(Z, \mathcal{T}_3)$의 연속인 상이다.

더욱이 $(X, \mathcal{T}_1)$이 컴팩트이면, $(Y, \mathcal{T}_2)$는 컴팩트이고 따라서 I^∞에서 닫혀있다. 그래서 $Z = \psi^{-1}(Y)$는 $(G, \mathcal{T})$의 닫힌 부분집합이다. $\square$

9.5.3 명제. $(Y, \mathcal{T}_1)$이 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$의 (공집합이 아닌) 닫힌 부분공간이라고 하자. 그러면 $(G, \mathcal{T})$로부터 $(Y, \mathcal{T}_1)$ 위로의 연속함수가 존재한다.

증명. $(G', \mathcal{T}')$이 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{6^i}$ ($a_i = 0$ 또는 5)와 같은 형태로 나타낼 수 있는 모든 실수들의 집합이고, $\mathbb{R}$로부터 유도된 부분공간위상을 가지고 있다고 하자. 이 공간 $(G', \mathcal{T}')$을 **middle two-thirds Cantor 공간**이라고 부른다. 분명히 $(G', \mathcal{T}')$은 Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$와 위상동형이다.

우리는 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 $(G', \mathcal{T}')$의 닫힌 부분공간으로 간주할 수 있고 $(G', \mathcal{T}')$으로부터 $(Y, \mathcal{T}_1)$ 위로의 연속함수를 찾을 수 있다. 증명을 진행하기 전에, middle two thirds Cantor 공간의 정의로부터 만약 $g_1 \in G'$이고 $g_2 \in G'$이면, $\frac{g_1+g_2}{2} \notin G'$임을 관찰하자.

우리가 구하고자 하는 함수 $\psi : (G', \mathcal{T}') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_1)$는 다음과 같이 정의된다: $g \in G'$에 대하여, $\psi(g)$는 $\mathbb{R}$ 위의 유클리드 거리에서 g와 가장 가까운 Y의 유일한 원소이다. 그러나 우리는 그와 같은 유일하게 가장 가까운 원소가 존재하는 것을 증명해야 한다.

$g \in G'$를 고정하자. 그러면 $d_g(y) = |g - y|$로 주어진 함수 $d_g \colon (Y, \mathcal{T}_1) \longrightarrow \mathbb{R}$는 연속이다. $(Y, \mathcal{T}_1)$이 컴팩트이기 때문에, 명제 7.2.15에 의해 $d_g(Y)$는 가장 작은 원소를 갖는다. 그래서 g에 가장 가까운 $(Y, \mathcal{T}_1)$의 원소가 존재한다. Y에서 g와의 거리가 같은 두 원소 y_1과 y_2가 존재한다고 가정하자. 그러면 $g = \frac{y_1+y_2}{2}$이다. 그러나 $y_1 \in G'$이고 $y_2 \in G'$이므로, 위에서 관찰한 바와 같이 $g = \frac{y_1+y_2}{2} \notin G'$이 되어 모순이다. 그래서 g에 가장 가까운 Y의 유일한 원소가 존재한다. 이 원소를 $\psi(g)$라고 부르자.

각각의 $y \in Y$에 대하여 $\psi(y) = y$이기 때문에, 함수 $\psi \colon (G', \mathcal{T}') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_1)$가 전사인 것은 분명하다. ψ의 연속성을 증명하기 위하여 $g \in G'$이고 ε이 임의로 주어진 양의 실수라고 하자. 따름정리 6.2.5에 의해 다음을 만족하는 $\delta > 0$를 찾으면 된다: $x \in G'$이고 $|g - x| < \delta$이면 $|\psi(g) - \psi(x)| < \varepsilon$이다.

우선 $g \in Y$인 경우를 생각하자. 그러면 $\psi(g) = g$이다. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$으로 놓으면, $|g - x| < \delta$인 $x \in G'$에 대하여

$$\begin{aligned}
|\psi(g) - \psi(x)| &= |g - \psi(x)| \\
&\leq |x - \psi(x)| + |g - x| \\
&\leq |x - g| + |g - x|, \quad g \in Y\text{이므로 } \psi\text{의 정의에 의하여} \\
&= 2|x - g| \\
&< 2\delta \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

을 얻는다.

이제 $g \notin Y$인 경우를 생각하자. 그러면 $g \neq \psi(g)$이다.
일반성을 잃지 않고 $\psi(g) < g$로 가정하고 $a = g - \psi(g)$로 놓자.
만약 $Y \cap [g, 1] = \emptyset$이면, 모든 $x \in (g - \frac{a}{2}, g + \frac{a}{2})$에 대하여 $\psi(x) = \psi(g)$이다.
그러므로 $\delta < \frac{a}{2}$에 대하여, $|\psi(x) - \psi(g)| = 0 < \varepsilon$을 얻는다.
만약 $Y \cap [g, 1] \neq \emptyset$이면, $Y \cap [g, 1]$은 컴팩트이기 때문에 가장 작은 원소 $y > g$를 갖는다.
실제로 ψ의 정의에 의해, $b = y - g$이면 $b > a$이다.
이제 $\delta = \frac{b-a}{2}$로 놓자.
만약 $x \in G'$에 대하여 $|g - x| < \delta$이면, $\psi(x) = \psi(g)$ 또는 $\psi(x) = y$이다.

$$|x - \psi(g)| \leq |x - g| + |g - \psi(g)| < \delta + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

이고, 반면에

$$|x - y| \geq |g - y| - |g - x| \geq b - \frac{b-a}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

임을 관찰하자. 그래서 $\psi(x) = \psi(g)$이다.

그러므로 $|\psi(x) - \psi(g)| = 0 < \varepsilon$이고 따라서 ψ는 연속이다. □

그러므로 명제 9.5.2와 9.5.3으로부터 우리는 다음의 Alexandroff와 Urysohn의 정리를 얻는다:

9.5.4 정리. 모든 컴팩트 거리화가능 공간은 Cantor 공간의 연속인 상이다. □

9.5.5 주목. 정리 9.5.4의 역은 거짓이다. Cantor 공간의 모든 연속인 상이 컴팩트 거리화가능 공간이라는 것은 사실이 아니다. (보기를 찾으시오.) 그러나, Hausdorff 공간에서만 본다면 이와 유사한 명제는 참이다. 실제로 다음 명제를 얻는다.

9.5.6 명제. f가 컴팩트 거리공간 (X,d)로부터 Hausdorff 공간 $(Y,\mathcal{T}_1)$ 위로의 연속함수라고 하자. 그러면 $(Y,\mathcal{T}_1)$은 컴팩트이고 거리화가능이다.

증명. 컴팩트 공간의 모든 연속인 상은 컴팩트이기 때문에, 공간 $(Y,\mathcal{T}_1)$은 분명히 컴팩트이다. 함수 f는 전사이므로, 다음과 같이 Y 위의 거리 d_1을 정의할 수 있다: Y에 있는 모든 y_1, y_2에 대하여

$$d_1(y_1,y_2)=\inf\{d(a,b): a\in f^{-1}\{y_1\},\ b\in f^{-1}\{y_2\}\}.$$

사실 d_1이 거리임을 보일 필요가 있다. $\{y_1\}$과 $\{y_2\}$는 Hausdorff 공간 $(Y,\mathcal{T}_1)$에서 닫힌집합이기 때문에, $f^{-1}\{y_1\}$과 $f^{-1}\{y_2\}$는 컴팩트 공간 (X,d)에서 닫힌집합이다. 따라서 $f^{-1}\{y_1\}$과 $f^{-1}\{y_2\}$는 컴팩트이다.

그래서 곱공간 $(X,\mathcal{T})\times(X,\mathcal{T})$의 부분공간인 $f^{-1}\{y_1\}\times f^{-1}\{y_2\}$는 컴팩트이다. 여기서 $\mathcal{T}$는 거리 d에 의해 유도된 위상이다.

$d\colon (X,\mathcal{T})\times(X,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$가 연속함수이므로, 명제 7.2.15에 의해 $d(f^{-1}\{y_1\}\times f^{-1}\{y_2\})$는 가장 작은 원소를 갖는다. 따라서 다음을 만족하는 두 원소 $x_1\in f^{-1}\{y_1\}$과 $x_2\in f^{-1}\{y_2\}$가 존재한다:

$$d(x_1,x_2)=\inf\left\{d(a,b): a\in f^{-1}\{y_1\},\ b\in f^{-1}\{y_2\}\right\}=d_1(y_1,y_2).$$

분명히 $y_1\neq y_2$이면, $f^{-1}\{y_1\}\cap f^{-1}\{y_2\}=\emptyset$이다. 그러므로 $x_1\neq x_2$이고 따라서 $d(x_1,x_2)>0$이다; 즉, $d_1(y_1,y_2)>0$이다.

d_1이 거리의 다른 성질들을 갖는 것은 쉽게 검증할 수 있다. 따라서 d_1은 Y 위의 거리이다.

$\mathcal{T}_2$가 d_1에 의해 유도된 Y 위의 위상이라고 하자. 우리는 $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$임을 보여야 한다. 우선 d_1의 정의에 의해, $f\colon (X,\mathcal{T})\longrightarrow(Y,\mathcal{T}_2)$는 분명히 연속이다.

Y의 부분집합 C에 대하여 다음을 관찰하자:

C는 $(Y,\mathcal{T}_1)$의 닫힌 부분집합이다
$\Rightarrow$ $f^{-1}(C)$는 $(X,\mathcal{T})$의 닫힌 부분집합이다
$\Rightarrow$ $f^{-1}(C)$는 $(X,\mathcal{T})$의 컴팩트 부분집합이다
$\Rightarrow$ $f(f^{-1}(C))$는 $(Y,\mathcal{T}_2)$의 컴팩트 부분집합이다
$\Rightarrow$ C는 $(Y,\mathcal{T}_2)$의 컴팩트 부분집합이다
$\Rightarrow$ C는 $(Y,\mathcal{T}_2)$의 닫힌 부분집합이다.

그러므로 $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$이다. 비슷하게 $\mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_1$임을 증명할 수 있으므로 $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$이다. □

9.5.7 따름정리. $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 공간이라고 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$가 Cantor 공간의 연속인 상일 필요충분조건은 그것이 컴팩트이고 거리화가능이다. $\square$

이 장에서 우리는 마지막으로 공간채움곡선을 생각할 차례이다.

9.5.8 주목. 모든 사람은 자신이 "곡선"이 무엇인지 알고 있다고 생각한다. 공식적으로 $\mathbb{R}^2$에 있는 곡선을 집합 $f[0,1]$으로 정의할 수 있다. 여기서 f는 연속함수 $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$이다. 직관적으로 곡선은 너비가 없으므로 면적이 0임이 분명한 것 같다. 이것은 거짓이다! 사실, 공간채움곡선이 존재한다; 즉, $f(I)$는 0이 아닌 면적을 갖는다. 실제로 다음 정리는 $[0,1]$로부터 곱공간 $[0,1] \times [0,1]$ 위로의 연속함수가 존재함을 보여준다.

9.5.9 정리. (Peano) 각각의 양의 정수 n에 대하여, $[0,1]$로부터 n-입방체 I^n 위로의 연속함수 ψ_n이 존재한다.

증명. 정리 9.5.4에 의해, Cantor 공간 $(G, \mathcal{T})$로부터 n-입방체 I^n 위로의 연속함수 ϕ_n이 존재한다. $(G, \mathcal{T})$는 $[0,1]$을 잇따라서 3등분한 후 중간 부분을 제거함으로써 얻어지기 때문에, 각각의 생략된 구간에서 ψ_n을 선형적으로 정의함으로써 ϕ_n을 연속함수 $\psi_n : [0,1] \longrightarrow I^n$으로 확장할 수 있다; 즉, (a,b)가 $[0,1] \setminus G$을 구성하는 열린구간 중 하나이면, ψ_n은 (a,b) 위에서

$$\psi_n\,(\alpha a + (1-\alpha)\,b) = \alpha\,\phi_n(a) + (1-\alpha)\,\phi_n(b), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

로 정의된다. ψ_n이 연속임은 쉽게 검증된다. $\square$

우리는 [0,1]의 연속인 상인 Hausdorff 공간들을 특성화하는 Hahn-Mazurkiewicz 정리를 (증명없이) 서술함으로써 이 장을 마무리하겠다. [증명은 Wilder [334]과 Kuratowski [194]의 221쪽을 보시오.] 하지만 우선 우리는 다음 정의가 필요하다.

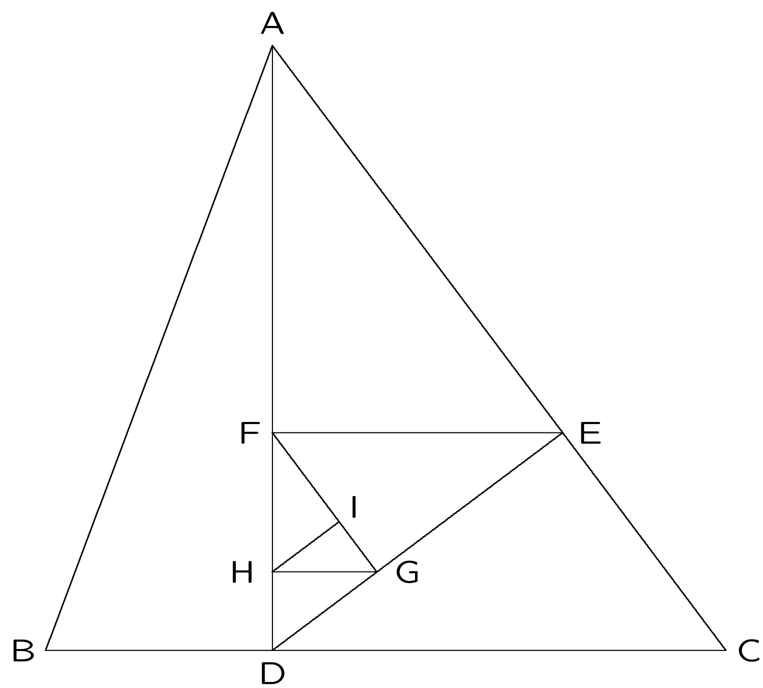
9.5.10 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 (열린) 연결집합들로 구성된 기저를 가질 때, 이 공간을 **국소적연결(locally connected)**이라고 말한다.

9.5.11 주목. 모든 $n \geq 1$에 대하여 $\mathbb{R}^n$과 $\mathbb{S}^n$이 국소적연결이듯이 모든 이산공간은 국소적연결이다. 하지만, 모든 연결공간이 국소적연결인 것은 아니다. (연습문제 8.4 #6를 보시오.)

9.5.12 정리. (Hahn-Mazurkiewicz 정리) $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 공간이라고 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$가 $[0, 1]$의 연속인 상일 필요충분조건은 그것이 컴팩트, 연결, 거리화가능, 그리고 국소적연결이다.

연습문제 9.5

1. 삼각형 ABC의 각 A가 직각이고 $AC > AB$일 때, $S \subset \mathbb{R}^2$가 삼각형 ABC 위와 내부 점들의 집합이라고 하자. 이 연습문제는 연속인 전사함수 $f : [0,1] \to S$를 만드는 과정의 개요를 서술한다.



AD와 BC가 서로 수직이 되게 BC 위에 점 D를 잡자.

$a = .a_1a_2a_3\ldots$가 이진소수, 즉, 각 a_n은 0 또는 1이라고 하자. 이제 우리는 다음과 같이 S의 점들로 이루어진 수열을 만든다: E는, $a_1 = 1$ 또는 0에 따라서, 각각 D로부터 삼각형 ADB, ADC의 더 큰 혹은 더 작은 빗변 위로의 수선의 발이다. 이제 D 대신에 E를, ABC 대신에 ADB, ADC 중 적절한 삼각형을 사용하는 과정을 반복한다. 예를 들어, 위 그림에서 점들 E는 구간 I에서의 이진수 $.11001\ldots$를 설명한다. 이러한 점들의 수열의 정확한 귀납적 정의를 제시하고 다음을 증명하시오:

(i) 이러한 점들의 수열은 S에서 한 극한 $L(a)$로 수렴한다;

(ii) $\lambda \in [0,1]$가 서로 다른 이진수 a, a'로 표현되면, $L(a) = L(a')$이다; 따라서, 그 점 $L(\lambda)$는 S에서 유일하게 정의된다;

(iii) $f\colon [0,1] \to S$가 $f(\lambda) = L(\lambda)$로 주어지면, f는 전사이다;

(iv) f는 연속이다.

2. $(G, \mathcal{T})$가 Cantor 공간이라 하고,

$$\phi_1\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right] = \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{2^{n+1}} + \cdots$$

와

$$\phi_2\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right] = \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^{n+1}} + \cdots$$

을 만족하는 함수들

$$\phi_i\colon (G, \mathcal{T}) \to [0,1], \qquad i = 1, 2$$

를 생각하자.

(i) ϕ_1과 ϕ_2가 연속임을 증명하시오.

(ii) 함수 $a \mapsto \langle \phi_1(a), \phi_2(a)\rangle$가 $(G, \mathcal{T})$로부터 $[0,1] \times [0,1]$ 위로의 연속함수임을 증명하시오.

(iii) a, $b \in (G, \mathcal{T})$이고 $(a,b) \cap G = \emptyset$일 때, $j = 1, 2$에 대하여,

$$\phi_j(x) = \frac{b-x}{b-a}\,\phi_j(a) + x - ab - a\,\phi_j(b), \qquad a \le x \le b$$

라 정의하자.

$$x \mapsto \langle \phi_1(x), \phi_2(x)\rangle$$

가 $[0,1]$로부터 $[0,1] \times [0,1]$ 위로의 연속함수임을 보이고 $[0,1] \times [0,1]$의 각 점이 $[0,1]$에서 많아야 세 점의 상임을 보이시오.

9.6 후기

이 절에서 우리는 유한개의 위상공간의 곱의 개념을 가산개의 곱의 개념으로 확장하였다. 이 단계가 자연스러운 것이었던 반면에, 그것은 우리들이 풍부한 결과들에 도달하게 하였고 그 중 어떤 것은 매우 놀랄 만한 것이었다.

우리는 $\mathcal{P}$가 (i) T_0-공간 (ii) T_1-공간 (iii) Hausdorff (iv) 거리화가능 (v) 연결 (vi) 완전비연결 (vii) 제2가산 중 하나일 때, 성질 $\mathcal{P}$를 갖는 위상공간들의 가산개의 곱이 성질 $\mathcal{P}$를 가짐을 증명하였다.

또한 $\mathcal{P}$가 컴팩트일 때, 이 결과는 가산개의 곱에 대한 Tychonoff 정리로서 참이다. 여기에서 나타난 거리화가능 공간들에 대한 가산 Tychonoff 정리의 증명은 다음 절에서 보게 될 평범한 증명과는 상당히 다르다. 우리의 증명은 Cantor 공간에 의존하고 있다.

Cantor 공간은 $[0,1]$의 어떤 부분공간으로서 정의되었다. 후자는 두 점으로 이루어진 이산공간들의 가산무한곱과 위상동형임이 증명되었다. Cantor 공간은 어떤 일반적인 명제가 거짓임을 보이기 위해 순수수학자들이 사용하기를 좋아하는 일종의 걷잡을 수 없는 보기이다. 그러나 그것은 이보다 훨씬 더 심각하다.

Alexandroff-Urysohn 정리 9.5.4는 모든 컴팩트 거리화가능 공간은 Cantor 공간의 상임을 말해준다. 특히, $[0,1]$과 Hilbert 입방체($[0,1]$의 가산무한곱)는 Cantor 공간의 연속인 상이다. 이것은 우리가 공간채움곡선의 존재성에 이르게 해준다 – 특히, 우리는 각각의 양의 정수 n에 대하여 $[0,1]$로부터 입방체 $[0,1]^n$ 위로의 연속함수가 존재한다는 것을 보였다. 그리고 증명하지는 않았지만, Hausdorff 공간 $(X,\mathcal{T})$가 $[0,1]$의 상일 필요충분조건은 그것이 컴팩트, 연결, 국소컴팩트, 그리고 거리화가능임을 의미하는 Hahn-Mazurkiewicz 정리 9.5.12를 서술하였다.

다음으로 Urysohn 정리 9.4.19, 즉, 공간이 가분이고 거리화가능일 필요충분조건은 그것이 Hilbert 입방체의 한 부분공간과 위상동형임을 언급하겠다. 이것은 $[0,1]$이 단지 "좋은" 위상공간이 아닌, 부분공간들의 형성과 가산곱들을 통하여, 중요한 종류의 가분인 거리화가능 공간들의 "생성자"임을 보여준다.

마지막으로 우리는 이 장에서 증명하지 않은 가산무한곱과 관련된 아름답고 깊은 정리를 언급하겠다. 이 정리의 증명과 토론은 Anderson and Bing [9], Toruňczyk [310], 그리고 Bessaga and Pelczynski [36]을 보시오.

위상벡터공간[1]의 맥락 안에서, **Fréchet 공간**은 완비거리화가능이고 국소볼록(locally convex)인 위상벡터공간이다.

[1]위상벡터공간에 관한 아름다운 책을 무료 다운로드로 얻을 수 있다. 그것은 H.H. Schaefer와 M.P. Wolff의 저서인 *Topological Vector Spaces*, Springer이다. 그 URL은
http://link.springer.com/content/pdf/bfm%3A978-1-4612-1468-7%2F1.pdf이다.

9.6.1 정리. (Anderson-Bessaga-Kadec-Pelczyński-Toruǹczyk)

(i) 가분이고 무한차원인 모든 Fréchet 공간은 가산무한곱 $\mathbb{R}^{\aleph_0}$와 위상동형이다;

(2) 무한차원인 모든 Fréchet 공간은 Hilbert 공간과 위상동형이다.

9.6.2 따름정리. 가분이고 무한차원인 모든 Banach 공간은 가산무한곱 $\mathbb{R}^{\aleph_0}$와 위상동형이다. □

9.6.3 따름정리. 가분이고 무한차원인 모든 Banach 공간은 가분인 Hilbert 공간 ℓ_2와 위상동형이다. □

9.6.4 따름정리. B_1과 B_2가 가분이고 무한차원인 Banach 공간이면, B_1은 B_2와 위상동형이다. □

9.6.5 따름정리. F가 가분이고 무한차원인 Fréchet 공간이고, B가 무한차원인 Banach 공간이면, 다음 13개의 공간들은 모두 위상동형이다.

(a) $\mathbb{R}^{\aleph_0}$;

(b) $(\mathbb{R}^{\aleph_0})^m$, m은 임의의 양의 정수;

(c) $(\mathbb{R}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$;

(d) ℓ_2;

(e) $(\ell_2)^m$, m은 임의의 양의 정수;

(f) $(\ell_2)^{\aleph_0}$;

(g) F;

(h) F^m, m은 임의의 양의 정수;

(i) $F^{\aleph_0}$;

(j) B;

(k) B^m, m은 임의의 양의 정수;

(l) $B^{\aleph_0}$;

(m) $\prod_{i=1}^{\infty} G_i$, 여기서 각각의 G_i는 가분이고 무한차원인 Fréchet 공간 또는 Banach 공간 또는 Hilbert 공간.

9.6.6 주목. 위상수학의 교수자들과 위상수학 서적의 저자들은 따름정리 9.6.4를 고려해야만 한다. 종종 위상수학을 가르칠 때 어떤 교수자들은 무한차원이고 가분인 Banach 공간들의 집합으로부터 그려지는 많은 위상공간들의 보기를 제공한다. 하지만 우리는 지금 이러한 공간들이 모두 위상동형임을 안다. 따라서 위상수학과 관련된 범위에서 그것들은 반복해서 같은 보기를 나타낸다. □

제 10 장

Tychonoff 정리

소개

9장에서 가산 무한개의 위상공간의 곱을 정의했다. 이제 집합 $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$을 임의의 첨자집합 I로 대치하여 임의개의 위상공간들의 곱을 정의하려고 한다. 핵심 결과는 일반적인 Tychonoff 정리이다.

독자는 이 장이 이전 장에 비해 더 복잡하고 도전적임을 알아야 한다. 그러나, 그 보답으로 몇 가지 아름다운 수학을 경험하고 즐기게 될 것으로 기대한다.

10.1 임의의 곱에 대한 곱위상

10.1.1 정의. I를 집합이라 하고, 각각의 $i \in I$에 대하여, $(X_i, \mathcal{T}_i)$를 위상공간이라 하자. 우리는 위상공간의 첨자 집합족을 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$로 쓴다. 집합족 $\{X_i : i \in I\}$의 **곱(product)** (또는 **데카르트 곱(cartesian product)**)을 $\prod_{i \in I} X_i$으로 나타내고, 이것은 $f(i) = x_i \in X_i$를 만족하는 모든 함수 $f \colon I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$로 이루어져 있다. 우리는 곱의 원소 f를 $\prod_{i \in I} x_i$로 나타내고, $f(i) = x_i$를 i-번째 좌표라고 언급한다.

만약 $I = \{1, 2\}$이면, $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$는 $f(1) \in X_1$ 그리고 $f(2) \in X_2$를 만족하는 모든 함수 $f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$의 집합이다. 잠깐 생각하면, $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$는 $X_1 \times X_2$와 "동형"인 집합임을 알 수 있다. 비슷한 방법으로, 만약 $I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$이면, $\prod_{i \in I} X_i$는 이전에 정의한 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$와 "동형"이다.

곱공간(product space)은 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$로 나타내고, 집합족

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i : O_i \in \mathcal{T}_i \text{ 그리고 유한개를 제외한 모든 } i\text{에 대하여, } O_i = X_i\text{이다} \right\}$$

가 기저인 위상 $\mathcal{T}$를 갖는 곱집합 $\prod_{i \in I} X_i$으로 이루어져 있다. 그 위상 $\mathcal{T}$를 **곱위상(product topology)** (또는 **Tychonoff 위상(Tychonoff topology)**)이라고 부른다.

10.1.2 주목. 비록 우리가 I가 가산 무한이거나 유한이었을 때 곱을 정의했던 방법과는 좀 다르게 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$를 정의했을지라도 여러분은 스스로가 새로운 정의에서 I가 가산 무한이거나 유한일 때 이전의 정의와 동치라는 것을 확신할 수 있어야 한다. 이것을 깨달았을 때 가산곱에 대한 많은 결과가 비가산곱에 대해서도 비슷한 유형으로 증명될 수 있다. 그것을 아래에 서술한다. 비가산곱에 대한 결과들의 증명은 독자에게 연습문제로 남긴다.

10.1.3 명제. I를 집합이라 하고 각각의 $i \in I$에 대하여, C_i를 위상공간 $(X, \mathcal{T}_i)$의 닫힌 부분집합이라 하자. 그러면 $\prod_{i \in I} C_i$는 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$의 닫힌 부분집합이다. □

10.1.4 명제. I를 집합이라 하고 위상공간의 집합족 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$는 곱공간 $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$를 갖는다고 하자. 만약 각각의 $i \in I$에 대하여, B_i가 $\mathcal{T}_i$에 대한 기저이면,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} O_i : O_i \in B_i \text{ 그리고 유한개를 제외한 모든 } i\text{에 대하여 } O_i = X_i\text{이다} \right\}$$

는 $\mathcal{T}$에 대한 기저이다. □

10.1.5 명제. I를 집합이라 하고 위상공간의 집합족 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$는 곱공간 $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$를 갖는다고 하자. 각각의 $j \in I$에 대하여, $p_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$를 사영함수라 하자; 즉, 각각의 $\prod_{i\in I} x_i \in \prod_{i\in I} X_i$에 대하여 $p_j(\prod_{i\in I} x_i) = x_j$이다. 그러면

(i) 각각의 p_j는 연속이고 전사인 열린함수이고,

(ii) $\mathcal{T}$는 각각의 p_j가 연속이 되게 하는 집합 $\prod_{i\in I} X_i$ 위의 가장 조잡한(가장 작은) 위상이다.□

10.1.6 명제. I를 집합이라 하고 위상공간의 집합족 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$는 곱공간 $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$를 갖는다고 하자. 그러면 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$의 하나의 부분공간과 위상동형이다. □

10.1.7 명제. I를 집합이라 하고 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$와 $\{(Y_i, \mathcal{T}'_i) : i \in I\}$를 위상공간의 집합족이라 하자. 만약 각각의 $i \in I$에 대하여, $h_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{T}'_i)$가 연속함수이면, $h : \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow \prod_{i\in I}(Y_i, \mathcal{T}'_i)$도 연속이다. 여기서, $h(\prod_{i\in I} x_i) = \prod_{i\in I} h_i(x_i)$이다. □

10.1.8 명제. I를 집합이라 하고 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$를 위상공간의 집합족이라 하자. 그리고 f를 위상공간 $(Y, \mathcal{T})$에서 $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수라 하자. 그러면 f가 연속함수일 필요충분조건은 각각의 함수 $p_i \circ f : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$가 연속이다. 여기서, $i \in I$에 대하여 p_i는 $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$에서 $(X_i, \mathcal{T}_i)$ 위로의 사영함수를 나타낸다. □

10.1.9 보조정리. (매몰 보조정리) I를 집합이라 하고 $\{(Y_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$를 위상공간의 집합족이라 하자. 그리고 각각의 $i \in I$에 대하여, f_i를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에서 $(Y_i, \mathcal{T}_i)$로의 함수라 하자. 더욱이 $e : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{i \in I}(Y_i, \mathcal{T}_i)$를 **값매김 함수(evaluation map)**라 하자; 즉, 모든 $x \in X$에 대하여, $e(x) = \prod_{i \in I} f_i(x)$이다. 그러면 e는 $(X, \mathcal{T})$에서 위상공간 $(e(X), \mathcal{T}')$ 위로의 위상동형함수이다. 여기서, $\mathcal{T}'$는 다음을 만족하는 $e(X)$ 위의 부분위상이다:

(i) 각각의 f_i가 연속이고,

(ii) 집합족 $\{f_i : i \in I\}$가 X의 **점 분리(separates points)**이다; 즉, 만약 x_1과 x_2가 X에 속하고 $x_1 \neq x_2$이면, 어떤 $i \in I$에 대하여, $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$이다, 그리고

(iii) 집합족 $\{f_i : i \in I\}$가 **점과 닫힌집합 분리(separates points and closed sets)**이다; 즉, $x \in X$이고 A가 x를 포함하지 않는 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 닫힌부분집합일 때, 어떤 $i \in I$에 대하여 $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$이다.

10.1.10 따름정리. 만약 보조정리 10.1.9에서 $(X, \mathcal{T})$가 T_1-공간이면, 조건 (ii)는 불필요하다. □

10.1.11 정의. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}')$를 위상공간이라 하자. 만약 연속함수 $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$가 존재하여 $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (f(X), \mathcal{T}'')$가 위상동형함수이면, 여기서 $\mathcal{T}''$은 $(Y, \mathcal{T}')$로부터 유도된 $f(X)$ 위의 부분위상이다, $(X, \mathcal{T})$가 $(Y, \mathcal{T}')$ 안으로 **매몰된다(embedded)**고 말한다. 함수 $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$를 **매몰사상(embedding)**이라고 한다.

연습문제 10.1

1. 각각의 $i \in I$에 대하여, 여기서 I는 첨자집합, $(A_i, \mathcal{T}'_i)$를 $(X_i, \mathcal{T}_i)$의 부분공간이라 하자.

   (i) $\prod_{i\in I}(A_i, \mathcal{T}'_i)$는 $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$의 부분공간임을 증명하시오.

   (ii) $\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}$임을 증명하시오.

   (iii) $\text{Int}(\prod_{i\in I} A_i) \subseteq \prod_{i\in I}(\text{Int}(A_i))$임을 증명하시오.

   (iv) (iii)에서 등호가 성립하지 않는 예를 드시오.

2. J를 임의의 첨자집합이라 하고, 각각의 $j \in J$에 대하여, 위상공간 $(G_j, \mathcal{T}_j)$는 Cantor 공간과 위상동형이고, I_j를 $[0,1]$에 위상동형인 위상공간이라 하자. $\prod_{j\in J} I_j$는 $\prod_{j\in J}(G_j, \mathcal{T}_j)$의 연속상임을 증명하시오.

3. $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$를 가분인 거리화가능 공간의 임의의 무한 집합족이라 하자. $\prod_{j\in J}(X_j, \mathcal{T}_j)$는 $\prod_{j\in J} I_j^\infty$의 부분공간과 위상동형임을 증명하시오. 여기서 각각의 I_j^∞는 Hilbert 입방체와 위상동형이다.

4. (i) J를 임의의 무한 첨자집합 그리고 $\{(X_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j}) : i \in \mathbb{N}$ 그리고 $j \in J\}$를 위상동형인 위상공간들의 집합족이라 하자.

$$\prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in\mathbb{N}}(X_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j})\right) \cong \prod_{j\in J}(X_{1,j}, \mathcal{T}_{1,j})$$

   임을 증명하시오.

   (ii) 각각의 $j \in J$에 대하여, 여기서 J는 임의의 무한 첨자집합, $(A_j, \mathcal{T}'_j)$를 이산공간 $\{0, 2\}$에 위상동형이고, $(G_j, \mathcal{T}_j)$는 Cantor 공간에 위상동형이라고 하자. (i)로부터

$$\prod_{j\in J}(A_j, \mathcal{T}'_j) \cong \prod_{j\in J}(G_j, \mathcal{T}_j)$$

   를 유도하시오.

   (iii) 각각의 $j \in J$에 대하여, 여기서 J는 임의의 무한 첨자집합, I_j는 $[0,1]$에 위상동형, 그리고 I_j^∞는 Hilbert 입방체(Hilbert cube) I^∞와 위상동형이라 하자. (i)로부터

$$\prod_{j\in J} I_j \cong \prod_{j\in J} I_j^\infty$$

   를 유도하시오.

(iv) J, I_j, I_j^∞, 그리고 $(A_j, \mathcal{T}'_j)$를 (ii)와 (iii)처럼 정의하자. $\prod_{j\in J} I_j$ 그리고 $\prod_{j\in J} I_j^\infty$는 $\prod_{j\in J}(A_j, \mathcal{T}'_j)$의 연속상임을 증명하시오.

(v) J와 I_j는 (iii)과 같다고 하자. 만약, 각각의 $j \in J$에 대하여, $(X_j, \mathcal{T}_j)$가 가분인 거리화가능 공간이면, 위의 #3과 위의 (iii)으로부터 $\prod_{j\in J}(X_j, \mathcal{T}_j)$는 $\prod_{j\in J} I_j$의 부분공간과 위상동형임을 유도하시오.

10.2 Zorn의 보조정리

우리의 다음 임무는 일반적인 Tychonoff 정리를 증명하는 것이다. 이 정리는 컴팩트 공간의 임의의 곱은 컴팩트임을 말한다. 그러나, 이것을 증명하기 위해서는 Zorn의 보조정리를 이용하는데 약간의 준비가 필요하다.

10.2.1 정의. (Davey and Priestley [76]) 집합 X 위의 **반순서(partial order)**는 다음 성질을 만족하는 이항관계이고, $\leq$로 나타낸다:

(i) 모든 $x \in X$에 대하여, $x \leq x$이다. **(반사적(reflexive))**

(ii) 모든 $x, y \in X$에 대하여, 만약 $x \leq y$ 그리고 $y \leq x$이면, $x = y$이다. **(반대칭적(antisymmetric))**

(iii) 모든 $x, y, z \in X$에 대하여, 만약 $x \leq y$ 그리고 $y \leq z$이면, $x \leq z$이다. **(추이적(transitive))**

반순서 $\leq$를 갖는 집합 X를 **반순서 집합(partially ordered set)** 또는 간단히 **poset**이라 하고 $(X, \leq)$로 나타낸다. 만약 $x \leq y$ 그리고 $x \neq y$이면, $\boldsymbol{x < y}$라고 쓴다.

10.2.2 보기. 반순서 집합의 원형은 자연수의 보통 순서를 갖는 모든 자연수 집합 $\mathbb{N}$이다. 비슷하게 보통 순서를 갖는 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, 그리고 $\mathbb{R}$은 반순서 집합을 이룬다. □

10.2.3 보기. $\mathbb{N}$을 자연수 집합이라 하고 $\leq$를 다음과 같이 정의하자:

$$\text{만약 } n\text{이 } m\text{을 나누면, } n \leq m\text{이다.}$$

그러면 $3 \leq 6$이지만 $3 \not\leq 5$이다. (이 순서를 갖는 $\mathbb{N}$은 반순서 집합임을 입증하는 것은 연습문제로 남겨둔다.) □

10.2.4 보기. X를 집합 U의 모든 부분집합의 집합족이라 하자. 우리는 X 위에 다음과 같이 반순서를 정의할 수 있다:

$$\text{만약 } A\text{가 } B\text{의 부분집합이면, } A \leq B\text{이다.}$$

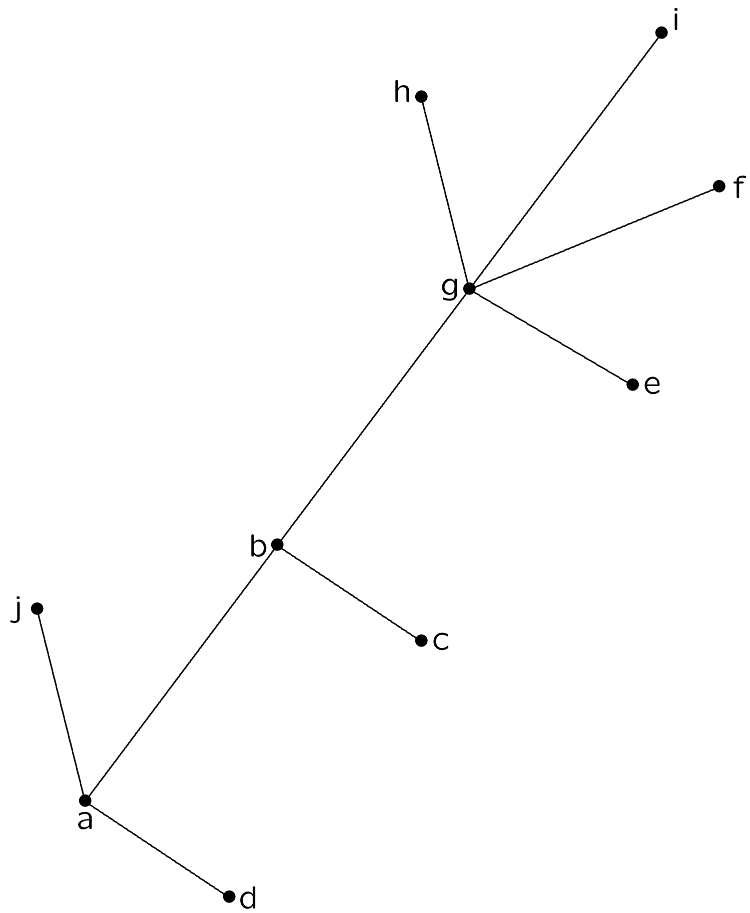
단, A와 B는 X에 속한다.
이 순서가 반순서임을 입증하는 것은 쉽다. □

10.2.5 보기. $(X, \leq)$를 반순서 집합이라 하자. 우리는 X 위에 새로운 반순서 $\leq^*$를 다음과 같이 정의할 수 있다:

$$y \leq x\text{일 때, } x \leq^* y\text{이다.}$$

□

10.2.6 보기. 반순서 집합을 그림으로 나타내는 편리한 방법이 있다; 이것은 **순서 도표(order diagram)**에 의한 것이다.



원소 x가 원소 y보다 작을 필요충분조건은 x에서 y로 선분을 타고 위로 올라갈 수 있다는 것이다. 그러므로 우리의 순서 도표로부터

$$\begin{gathered}a<b,\ a<g,\ a<h,\ a<i,\ a<j,\ a<f,\ b<g,\ b<h,\\ b<i,\ b<f,\ c<b,\ c<f,\ c<g,\ c<h,\ c<i,\ d<a,\ d<b,\\ d<g,\ d<h,\ d<f,\ d<i,\ d<j,\ e<f,\ e<g,\ e<h,\ e<i,\\ f<g,\ f<h,\ g<h,\ g<i\end{gathered}$$

이다. 그러나 $d \not\leq c$ 그리고 $c \not\leq d$이고, $e \not\leq f$ 그리고 $f \not\leq e$ 등이다. □

10.2.7 정의. 반순서 집합 $(X, \leq)$의 두 원소 x와 y에 대하여, $x \leq y$이거나 $y \leq x$이면 x와 y는 **비교가능(comparable)**하다고 말한다.

10.2.8 주목. 위의 순서 도표에서, d와 c는 비교가능이 아니다. 또한 j와 e도 비교가능이 아니다.

보통 순서를 갖는 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, 그리고 $\mathbb{Z}$에서는 임의의 두 원소가 비교가능하다.

보기 10.2.4에서, 3과 5는 비교가능이 아니다. □

10.2.9 정의. 반순서 집합 $(X, \leq)$의 임의의 두 원소가 비교가능하면 **선형순서 집합 (linearly ordered set)** (또는 **전순서 집합(totally ordered set)**)이라고 부른다. 이때 순서 $\leq$는 **선형순서(linear order)** (또는 **전순서(total order)**)라고 부른다. 선형순서가 다음을 만족하면 **순 선형순서(strict linear ordering)** (또는 **순 전순서(strict total ordering)**)라고 부른다:

$$a, b \in X\text{에 대하여}, a \leq b \text{ 그리고 } b \leq a\text{이면 } a = b\text{이다.}$$

10.2.10 보기. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, 그리고 $\mathbb{Z}$ 위의 보통순서는 선형순서이다. (만약 U가 적어도 두 점을 가지면) 보기 10.2.4의 반순서는 선형순서가 아니다. □

10.2.11 정의. $(X, \leq)$를 반순서 집합(partially ordered set)이라 하고, $s \in X$라 하자. 모든 $x \in X$에 대하여, $x \leq s$이면 $s \in X$를 X의 **최대원(greatest element)**이라고 말한다.

10.2.12 정의. $(X, \leq)$를 반순서 집합, Y를 X의 부분집합이라 하고, $t \in X$라 하자. 만약 모든 $y \in Y$에 대하여, $y \leq t$이면, t를 Y의 **상계(upper bound)**라고 부른다.

Y의 상계는 Y의 원소일 필요는 없다는 것을 주목하는 것은 중요하다.

10.2.13 정의. $(X, \leq)$를 반순서 집합(partially ordered set)이라 하고, $w \in X$라 하자. 모든 $x \in X$에 대하여, $w \leq x$이면 $w = x$를 만족할 때, w를 **극대원(maximal element)**이라 부른다.

10.2.14 주목. 극대원과 최대원의 차이점을 구별하는 것이 중요하다. 보기 10.2.6에 있는 순서 도표를 생각해 보자. 최대원은 없다! 그러나, j, h, i와 f는 극대원이다. □

10.2.15 주목. 우리는 이제 Zorn의 보조정리를 서술할 수 있다. "보조정리"라는 이름에도 불구하고, 사실상 공리이고 증명할 수 없다. 선택공리(Axiom of Choice)와 정렬정리(Well-Ordering Theorem) 같은 집합론의 다양한 다른 공리와 동치이다. [반순서 집합 $(S, \leq)$의 공집합이 아닌 모든 부분집합이 최소원을 가지면, S를 **정렬순서 집합(well-ordered set)**이라고 한다. **정렬정리(Well-Ordering Principle)는 모든 집합 위에 정렬순서가 존재함을 말한다.** 예를 들어, Halmos [133] 또는 Wilder [334]를 보시오.] Zorn의 보조정리, 선택공리, 그리고 Tychonoff 정리에 관한 논의는, 주목 A6.1.24를 보시오. 또한 Rubin and Rubin [275]를 보시오. 우리는 Zorn의 보조정리를 집합론의 공리로 취급하고 필요할 때마다 사용할 것이다.

10.2.16 공리. (Zorn의 보조정리) 공집합이 아닌 반순서 집합 $(X, \leq)$의 모든 선형순서 부분집합이 상계를 갖는다고 하자. 그러면 $(X, \leq)$는 극대원을 갖는다.

10.2.17 보기. Zorn의 보조정리를 보기 10.2.6의 격자 도표에 적용해 보자. 많은 선형순서 부분집합이 존재한다:

$$\{i, g, b, a\}, \ \{g, b, a\}, \ \{b, a\}, \ \{g, b\}, \ \{i, g\}, \ \{a\}, \ \{b\},$$
$$\{g\}, \ \{i\}, \ \{i, b, a\}, \ \{i, g, a\}, \ \{i.a\}, \ \{g, a\}, \ \{h, g, e\},$$
$$\{h, e\}, \ \{g, e\}, \ \ldots.$$

각각은 상계를 갖는다 − $i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, i, h, h, h, \ldots.$ Zorn의 보조정리에 의하여, 극대원이 존재한다. 사실상 4개의 극대원 즉, j, h, f 그리고 i가 존재한다. □

연습문제 10.2

1. $X = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$라 하자. 반순서 집합 $(X, \leq)$의 순서 도표를 그리시오. 단,

$$\begin{aligned}
&v < a,\ \ v > b,\ \ v < c,\ \ v < d,\ \ v < e,\ \ v < f,\ \ v < u, \\
&a < c,\ \ a < d,\ \ a < e,\ \ a < f,\ \ a < u, \\
&b < c,\ \ b > d,\ \ b < e,\ \ b < f,\ \ b < u, \\
&c < d,\ \ c < e,\ \ c < f,\ \ c < u, \\
&d < e,\ \ d < f,\ \ d < u, \\
&e < u,\ \ f < u.
\end{aligned}$$

2. 보기 10.2.3에 관하여, 아래에 있는 $\mathbb{N}$의 어느 부분집합이 선형순서 집합인지를 서술하시오:
   (a) $\{21, 3, 7\}$;
   (b) $\{3, 6, 15\}$;
   (c) $\{2, 6, 12, 72\}$;
   (d) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$;
   (e) $\{5\}$.

3. $(X, \leq)$를 선형순서 집합이라 하자. 만약 x와 y가 X의 극대원이면, $x = y$임을 증명하시오.

4. $(X, \leq)$를 반순서 집합이라 하자. 만약 x와 y가 X의 최대원이면, $x = y$임을 증명하시오.

5. $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$를 다음과 같이 정의된 반순서 집합이라 하자:

$$y\text{가 } x\text{의 배수일 때,} \qquad x \leq y\text{이다.}$$

   순서 도표를 그리고, $(X, \leq)$의 모든 극대원을 찾으시오. $(X, \leq)$가 최대원을 갖는가?

6.* Zorn의 보조정리 10.2.16를 이용하여, 모든 벡터공간 V는 기저를 가짐을 증명하시오.
[힌트: (i) 먼저 $V = \{0\}$인 경우를 생각하시오.

(ii) $V \neq \{0\}$이라 가정하고

$$\mathcal{B} = \{B : B\text{는 } V\text{의 일차 독립인 벡터의 집합이다}\}$$

라고 정의하자. $\mathcal{B} \neq \emptyset$임을 증명하시오.

(iii) $\mathcal{B}$ 위에 반순서 $\leq$를 다음과 같이 정의하자.

$$B_1 \subseteq B_2\text{이면, } B_1 \leq B_2\text{이다.}$$

$\{B_i : i \in I\}$를 $\mathcal{B}$의 임의의 선형순서 부분집합이라 하자. $A = \bigcup_{i\in I} B_i$는 V의 일차 독립인 벡터집합임을 증명하시오.

(iv) $A \in \mathcal{B}$와 A는 $\{B_i : i \in I\}$에 대한 상계임을 유도하시오.

(v) Zorn의 보조정리를 적용하여 $\mathcal{B}$의 극대원의 존재성을 보이시오. 이 극대원이 V에 대한 기저임을 증명하시오.]

10.3 Tychonoff 정리

10.3.1 정의. X를 집합 그리고 $\mathcal{F}$를 X의 부분집합의 집합족이라 하자. $\mathcal{F}$의 임의의 유한개의 원소 $F_1, F_2, \ldots, F_n$에 대하여, $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$이면 $\mathcal{F}$가 **유한 교집합 성질(finite intersection property)** 또는 **(F.I.P.)**를 만족한다고 말한다.

10.3.2 명제. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트일 필요충분조건은 유한 교집합 성질을 갖는 X의 닫힌 부분집합의 모든 집합족 $\mathcal{F}$가 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$를 만족하는 것이다.

증명. 유한 교집합 성질을 갖는 X의 닫힌 부분집합의 모든 집합족 $\mathcal{F}$가 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$를 만족한다고 가정하자. $\mathcal{U}$를 X의 임의의 열린 덮개라 하자. $\mathcal{F}$를 $\mathcal{U}$의 원소들의 여집합의 집합족이라 하자. 그러면 각각의 $F \in \mathcal{F}$는 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합이다. $\mathcal{U}$가 X의 열린 덮개이므로, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$이다. 그러면, 가정에 의하여, $\mathcal{F}$는 유한 교집합 성질을 갖지 못한다. 따라서 $\mathcal{F}$에 속하는 어떤 $F_1, F_2, \dots, F_n$에 대하여, $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \emptyset$이다. 그러므로 $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n = X$, 여기서 $U_i = X \setminus F_i,\ i = 1, \dots, n$이다. 그러므로 $\mathcal{U}$는 유한 부분덮개를 갖는다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 컴팩트이다.

역 증명도 비슷하다. □

10.3.3 보조정리. X를 집합 그리고 $\mathcal{F}$를 유한 교집합 성질을 갖는 X의 부분집합의 집합족이라 하자. 그러면 $\mathcal{F}$를 포함하고 유한 교집합 성질을 만족하는 X의 부분집합의 극대 (maximal) 집합족이 존재한다.

증명. Z를 X의 모든 부분집합의 집합족의 모임으로 $\mathcal{F}$를 포함하고 유한 교집합 성질을 갖는다고 하자. Z 위에 다음과 같이 반순서 $\leq$를 정의하자: $\mathcal{F}_1$과 $\mathcal{F}_2$가 Z에 속할 때, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$이면 $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$라 놓자. Y를 Z의 임의의 선형순서 부분집합이라 하자. Zorn의 보조정리 10.2.16를 적용하기 위하여, Y가 상계를 가짐을 입증할 필요가 있다. $\bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$가 Y에 대한 상계임을 주장하자. 분명히 이 집합은 $\mathcal{F}$를 포함하므로, 우리는 단지 유한 교집합 성질을 갖는다는 것을 보여야 한다. 그러므로 $S_1, S_2, \dots, S_n \in \bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$라 하자. 그러면 어떤 $\mathcal{Y}_i \in Y$에 대하여 각각의 $S_i \in \mathcal{Y}_i$이다. Y가 선형순서이므로, $\mathcal{Y}_i$ 중의 하나가 다른 모든 것을 포함한다. 따라서 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 모두가 $\mathcal{Y}_i$에 속한다. $\mathcal{Y}_i$가 유한 교집합 성질을 갖기 때문에, $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \neq \emptyset$이다. 그러므로 $\bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$는 유한 교집합 성질을 갖는다. 그래서 $\bigcup_{\mathcal{Y} \in Y} \mathcal{Y}$는 Y의 상계이다. 따라서 Zorn의 보조정리에 의하여, Z는 극대원을 갖는다. □

우리는 이제 여러 번 예고했던 Tychonoff 정리를 증명할 수 있다.

10.3.4 정리. (Tychonoff 정리) $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$를 위상공간들의 집합족이라 하자. 그러면 $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트일 필요충분조건은 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이다.

증명. 명제 10.3.2를 이용하여, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이면, $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트임을 증명할 것이다. $\mathcal{F}$를 유한 교집합 성질을 갖는 X의 닫힌 부분집합들의 집합족이라 하자. $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$임을 보여야 한다.

보조정리 10.3.3에 의하여, $\mathcal{F}$를 포함하고 유한 교집합 성질을 갖는 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합 (반드시 닫힌 부분집합일 필요는 없음)의 극대 집합족 $\mathcal{H}$가 존재한다. $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{H} \neq \emptyset$임을 보일 것이고, 각각의 $F \in \mathcal{F}$가 닫힌집합이므로, 이것으로부터 필요한 결과인 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$이 유도된다.

$\mathcal{H}$가 $\mathcal{F}$를 포함하고 유한 교집합 성질을 갖는 극대원이므로, 만약 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{H}$이면, 집합 $H' = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n \in \mathcal{H}$이다. 그렇지 않다고 가정해 보자. 그러면 집합 $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup \{H'\}$는 진부분집합 $\mathcal{H}$를 포함하고, 또한 $\mathcal{H}'$는 $\mathcal{F}$를 포함하고 유한 교집합 성질을 갖는다. 이것은 $\mathcal{H}$가 극대원이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$이고 $H' = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n \in \mathcal{H}$이다.

S를 $\mathcal{H}$의 모든 원소와 만나는 X의 임의의 부분집합이라 하자. $\mathcal{H} \cup \{S\}$가 유한 교집합 성질을 갖는다는 것을 주장하자. 이것을 위해, $H'_1, H'_2, \dots, H'_m$을 $\mathcal{H}$의 원소라 하자. $S \cap H'_1 \cap H'_2 \cap \dots H'_m \neq \emptyset$임을 보일 것이다. 이전 단락에 의하여, $H'_1 \cap H'_2 \cap \dots H'_m \in \mathcal{H}$이다. 따라서 가정에 의하여 $S \cap (H'_1 \cap H'_2 \cap \dots H'_m) \neq \emptyset$이다. 그러므로 $\mathcal{H} \cup \{S\}$는 유한 교집합 성질을 가지고, $\mathcal{F}$를 포함한다. 다시 $\mathcal{H}$가 $\mathcal{F}$를 포함하고 유한 교집합 성질을 갖는 극대원이라는 사실을 이용하여, $S \in \mathcal{H}$임을 안다.

$i \in I$를 고정하고 $p_i : \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$를 사영함수라 하자. 그러면 집합족 $\{p_i(H) : H \in \mathcal{H}\}$는 유한 교집합 성질을 갖는다. 그러므로 집합족 $\overline{\{p_i(H)} : H \in \mathcal{H}\}$는 유한 교집합 성질을 갖는다. $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이므로, $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{p_i(H)} \neq \emptyset$이다. $x_i \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{p_i(H)}$라 하자. 그러면 각각의 $i \in I$에 대하여, 점 $x_i \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{p_i(H)}$를 찾을 수 있다. $x = \prod_{i\in I} x_i \in X$라 놓자.

우리는 $x \in \bigcap_{h\in\mathcal{H}} \overline{H}$임을 보일 것이다. O를 x를 포함하는 임의의 열린집합이라 하자. 그러면 O는 x의 다음과 같은 형태의 기저에 속하는 열린집합 $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i)$을 갖는다. 여기서 $U_i \in \mathcal{T}_i$, $x_i \in U_i$이고 J는 I의 유한 부분집합이다. 모든 $H \in \mathcal{H}$에 대하여, $x_i \in \overline{p_i(H)}$, $U_i \cap p_i(H) \neq \emptyset$이다. 그러므로 모든 $H \in \mathcal{H}$에 대하여, $p_i^{-1}(U_i) \cap H \neq \emptyset$이다. 위의 관찰에 의하여, 이것은 모든 $i \in J$에 대하여, $p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{H}$임을 의미한다. $\mathcal{H}$가 유한 교집합 성질을 가지고 있으므로, 모든 $H \in \mathcal{H}$에 대하여, $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_1) \cap H \neq \emptyset$이다. 그러므로 $H \in \mathcal{H}$에 대하여, $O \cap H \neq \emptyset$이다. 따라서 우리가 원했던 $x \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{H}$을 얻었다.

역으로, 만약 $\prod_{I\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이면, 명제 7.2.1과 10.1.5 (i)에 의하여, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$가 컴팩트이다. □

10.3.5 표기. 임의의 집합 A의 각각의 원소 a에 대하여, 위상공간 $(I_a, \mathcal{T}_a)$는 $[0,1]$과 위상동형이라 하자. 그러면 곱공간 $\prod_{a \in A}(I_a, \mathcal{T}_a)$를 I^A로 나타내고, **입방체(cube)**라고 한다.

$I^{\mathbb{N}}$은 바로 Hilbert 입방체이고, I^∞로 나타냄을 주목하자.

10.3.6 따름정리. 임의의 집합 A에 대하여, 입방체 I^A는 컴팩트이다.

10.3.7 명제. (X, d)를 거리공간이라 하자. 그러면 (X, d)는 입방체 I^X의 부분공간과 위상동형이다.

증명. 일반성을 잃지 않고, X의 모든 원소 a와 b에 대하여, $d(a, b) \le 1$라고 가정하자. 각각의 $a \in X$에 대하여, f_a 를 다음과 같이 정의된 (X, d)에서 $[0,1]$로의 연속함수라 하자:

$$f_a(x) = d(x, a).$$

집합족 $\{f_a : a \in X\}$가 점과 닫힌집합을 분리한다는 것을 보이는 것은 쉽다 (정리 9.4.11의 증명과 비교하시오). 따라서, 매몰 보조정리의 따름정리 10.1.10에 의하여, (X, d)는 입방체 I^X의 부분공간과 위상동형이다. $\square$

이것으로부터 다음과 같은 질문을 하게 된다: 어느 위상공간이 입방체의 부분공간과 위상동형인가? 이제 이 질문을 다루어 보자.

10.3.8 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 각각의 $x \in X$와 각각의 열린 집합 $U \ni x$에 대하여, 연속함수 $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0,1]$가 존재하여, $f(x) = 0$이고 모든 $y \in X \setminus U$에 대하여 $f(y) = 1$을 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **완전정칙(completely regular)**이라 한다. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 또한 Hausdorff 공간이면, $(X, \mathcal{T})$를 **Tychonoff 공간** (또는 **$T_{3\frac{1}{2}}$-공간**)이라 부른다.

10.3.9 명제. (X,d)를 거리공간 그리고 $\mathcal{T}$를 d에 의하여 유도된 X 위의 위상이라 하자. 그러면 $(X,\mathcal{T})$는 Tychonoff 공간이다.

증명. $a \in X$라 하고 U를 a를 포함하는 임의의 열린집합이라 하자. 그러면 어떤 $\varepsilon > 0$에 대하여, U는 중심이 a이고 반경이 ε인 열린 구를 포함한다. 함수 $f : (X,d) \longrightarrow [0,1]$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(x) = \min\left\{1, \frac{d(x,a)}{\varepsilon}\right\}, \qquad x \in X.$$

그러면 f는 연속이고, $f(a) = 0$ 그리고 모든 $y \in X \setminus U$에 대하여 $f(y) = 1$이다. (X,d)가 또한 Hausdorff이므로, (X,d)는 Tychonoff 공간이다. □

10.3.10 따름정리. 위상공간 $[0,1]$은 Tychonoff 공간이다. □

10.3.11 명제. 만약 $\{(X_i,\mathcal{T}_i) : i \in I\}$가 완전정칙공간들의 집합족이면, $\prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$는 완전정칙이다.

증명. $a = \prod_{i\in I} a_i \in \prod_{i\in I} X_i$ 그리고 U를 a를 포함하는 임의의 열린집합이라 하자. 그러면 I의 유한 부분집합 J가 존재하고 집합 $U_i \in \mathcal{T}_i$가 존재하여

$$a \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq U$$

를 만족한다. 단, 모든 $i \in I \setminus J$에 대하여 $U_i = X_i$이다.

각각의 $j \in J$에 대하여, $(X_j,\mathcal{T}_j)$가 완전정칙이므로, 어떤 연속함수 $f_j : (X_j,\mathcal{T}_j) \longrightarrow [0,1]$가 존재하여 $f_j(a_j) = 0$이고 모든 $y \in X_j \setminus U_j$에 대하여 $f_j(y) = 1$이다. 그러면 $f_j \circ p_j \colon \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i) \longrightarrow [0,1]$이다. 여기서, p_j는 $\prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$에서 $(X_j,\mathcal{T}_j)$ 위로의 사영함수이다.

모든 $x \in \prod_{i\in I} X_i$에 대하여, $f(x) = \max\{f_j \circ p_j(x) \colon j \in J\}$라 놓으면, J가 유한집합이므로 $f : \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i) \longrightarrow [0,1]$는 연속이다. 더욱이, $f(a) = 0$, 반면에 $y \in X \setminus U$에 대하여 $f(y) = 1$이다. 그러므로 $\prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$는 완전정칙이다. □

다음의 명제는 쉽게 증명되므로 증명은 연습문제로 남겨둔다.

10.3.12 명제. $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$가 Hausdorff 공간의 임의의 집합족이면, $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$는 Hausdoroff 공간이다.

증명. 연습문제. □

10.3.13 따름정리. $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$가 Tychonoff 공간의 임의의 집합족이면, $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$는 Tychonoff 공간이다. □

10.3.14 따름정리. 임의의 집합 X에 대하여, 입방체 I^X는 Tychonoff 공간이다. □

10.3.15 명제. 완전정칙공간의 모든 부분공간은 완전정칙이다.

증명. 연습문제. □

10.3.16 따름정리. Tychonoff 공간의 모든 부분공간은 Tychonoff 공간이다.

증명. 연습문제. □

10.3.17 명제. $(X, \mathcal{T})$가 임의의 Tychonoff 공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 입방체의 부분공간과 위상동형이다.

증명. $\mathcal{F}$를 모든 연속함수 $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0, 1]$의 집합족이라 하자. 그러면 매몰 보조정리의 따름정리 10.1.10과 완전정칙의 정의로부터, 값매김 함수 $e\colon (X, \mathcal{T}) \to I^{\mathcal{F}}$는 매몰함수이다. □

그러므로 이제는 입방체의 부분공간의 특성화를 얻는다. 명제 10.3.17과 따름정리 10.3.14 그리고 10.3.16을 결합하여 다음을 얻는다:

10.3.18 명제. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 입방체 안으로 매몰될 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$가 Tychonoff 공간이다. □

10.3.19 주목. 우리는 이제 Tychonoff 공간류는 아주 크다는 것을 보이려 한다. 특히, 모든 컴팩트 Hausdorff 공간을 포함하고 있다는 것을 보이려고 한다.

10.3.20 정의. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 닫힌 부분집합의 각 쌍 A와 B에 대하여, 어떤 열린집합 U와 V가 존재해서 $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ 그리고 $U \cap V = \emptyset$를 만족하면, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 **정규공간(normal space)**이라 부른다. 정규공간이면서 동시에 Hausdorff 공간이면 ***T_4*-공간**이라고 부른다.

10.3.21 주목. 연습문제 6.1 #9에서, 모든 거리화가능 공간은 정규공간임을 주목했다. 곧 우리는 모든 컴팩트 Hausdorff 공간은 정규임을 보일 것이다. 먼저 모든 정규 Hausdorff 공간은 Tychonoff 공간 임을 보일 것이다 (즉, 모든 T_4-공간은 $T_{3\frac{1}{2}}$-공간이다).

정규공간의 정의 10.3.20에서 $C = X \setminus B$ 그리고 $K = X \setminus V$라 놓으면, **위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 정규공간일 필요충분조건은 모든 닫힌집합 A와 $A \subseteq C$인 모든 열린집합 C에 대하여, 어떤 닫힌집합 K가 존재해서 $A \subseteq \text{Int}(K) \subseteq K \subseteq C$를 만족하는 것임을 알게 된다.**

10.3.22 정리. (Urysohn의 보조정리) $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$가 정규공간일 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 닫힌집합의 각 쌍 A와 B에 대하여, 어떤 연속함수 $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0, 1]$가 존재해서 모든 $a \in A$에 대하여 $f(a) = 0$이고, 모든 $b \in B$에 대하여 $f(b) = 1$이다.

증명. 각 집합 A와 B에 대하여, 위에서 언급한 함수 f가 존재한다고 가정하자. 그러면 $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ 그리고 $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$는 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합이고, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, 그리고 $A \cap B = \emptyset$을 만족한다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 정규이다.

역으로, $(X, \mathcal{T})$가 정규공간이라고 가정하자. 우리는 X의 열린 부분집합들의 집합족 $\{U_i : i \in D\}$를 구성할 것이다. 여기서, D는 다음과 같이 정의된 집합이다: $D = \left\{\frac{k}{2^n} : k = 1, 2, \ldots, 2^n,\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

따라서 D는 이진(dyadic) 유리수의 집합으로써, $A \subseteq U_i$, $U_i \cap B = \emptyset$, 그리고 D에서 $d_1 \leq d_2$이면, $U_{d_1} \subseteq U_{d_2}$를 만족하게 될 것이다. $(X, \mathcal{T})$가 정규이므로, 서로소인 닫힌 부분집합의 쌍 A, B에 대하여, 어떤 서로소인 열린집합 $U_{\frac{1}{2}}$과 $V_{\frac{1}{2}}$이 존재해서 $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ 그리고 $B \subseteq V_{\frac{1}{2}}$이다. 그러므로 우리는 $A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq V_{\frac{1}{2}}^C \subseteq B^C$을 얻는다. 여기서 위첨자 C는 X에서 여집합을 나타내는데 사용되었다. (즉, $V_{\frac{1}{2}}^C = X \setminus V_{\frac{1}{2}}$ 그리고 $B^C = X \setminus B$).

이제 서로소인 닫힌집합 A와 $U_{\frac{1}{2}}^C$를 생각하자. 다시, 정규성에 의하여, 어떤 서로소인 열린집합 $U_{\frac{1}{4}}$과 $V_{\frac{1}{4}}$이 존재해서 $A \subseteq U_{\frac{1}{4}}$이고 $U_{\frac{1}{2}}^C \subseteq V_{\frac{1}{4}}$이다. 또한 $V_{\frac{1}{2}}^C$과 B가 서로소인 닫힌집합이므로, 어떤 열린집합 $U_{\frac{3}{4}}$과 $V_{\frac{3}{4}}$이 존재하여 $V_{\frac{1}{2}}^C \subseteq U_{\frac{3}{4}}$ 그리고 $B \subseteq V_{\frac{3}{4}}$를 만족한다. 따라서

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq V_{\frac{1}{4}}^C \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq V_{\frac{1}{2}}^C \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq V_{\frac{3}{4}}^C \subseteq B^C$$

을 얻는다. 귀납법을 계속 적용하면, $d \in D$에 대하여, 열린집합 U_d와 V_d가 존재해서,

$$A \subseteq U_{2^{-n}} \subseteq V_{2^{-n}}^C \subseteq U_{2.2^{-n}} \subseteq V_{2.2^{-n}}^C \subseteq \cdots \subseteq U_{(2^n-1)2^{-n}} \subseteq V_{(2^n-1)2^{-n}}^C \subseteq B^C$$

를 얻는다. 특히, D에서 $d_1 \leq d_2$일 때, $U_{d_1} \subseteq U_{d_2}$를 얻는다.

이제 $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0, 1]$를 다음과 같이 정의하자: $f(x) = \begin{cases} \inf\{d : x \in U_d\}, & x \in \bigcup_{d \in D} U_d \\ 1, & x \notin \bigcup_{d \in D} U_d. \end{cases}$

마지막으로 모든 $d \in D$에 대하여 $A \subseteq U_d$이므로, 모든 $a \in A$에 대하여 $f(a) = 0$임을 관찰하자. 또한 만약 $b \in B$이면, $b \notin \bigcup_{d \in D} U_d$이다. 그러므로 $f(b) = 1$이다. 그러므로 f가 연속임을 보이면 증명이 끝난다.

$f(x) = y$라 하자. 단, $y \neq 0, 1$이다. 그리고 적당한 $\varepsilon > 0$ $(0 < y - \varepsilon < y + \varepsilon < 1)$에 대하여, $W = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$라 놓자. D가 $[0, 1]$에서 조밀하므로, D에 속하는 d_0와 d_1이 존재해서 $y - \varepsilon < d_0 < y < d_1 < y_0 + \varepsilon$을 만족한다. 그러면 f의 정의에 의하여, $x \in U = U_{d_1} \setminus \overline{U}_{d_0}$이고 열린집합 U는 $f(U) \subseteq W$를 만족한다. 만약 $y = 1$이면, $W = (y - \varepsilon, 1]$이라 놓고, $y - \varepsilon < d_0 < 1$인 d_0을 선택하여, $U = X \setminus \overline{U}_{d_0}$라 놓자. 다시 $f(U) \subseteq W$이다. 마지막으로, $y = 0$이면, $W = [0, y + \varepsilon)$이라 놓고, $0 < d_1 < y + \varepsilon$인 d_1을 선택하여, $U = U_{d_1}$이라 놓자. 다시 $f(U) \subseteq W$를 얻는다. 따라서 f는 연속이다. $\square$

10.3.23 따름정리. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff 정규공간이면, 그것은 Tychonoff 공간이다; 즉, 모든 T_4-공간은 $T_{3\frac{1}{2}}$-공간이다. 역으로 그것은 입방체의 부분공간과 위상동형이다. □

10.3.24 명제. 모든 컴팩트 Hausdorff 공간 $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다.

증명. A와 B를 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 닫힌 부분집합이라 하자. $b \in B$를 고정하자. 그러면, $(X, \mathcal{T})$가 Hausdorff이므로, 각각의 $a \in A$에 대하여, 어떤 열린집합 U_a와 V_a가 존재해서 $a \in U_a$, $b \in V_a$ 그리고 $U_a \cap V_a = \emptyset$이다. 따라서 $\{U_a : a \in A\}$는 A의 열린덮개이다. A가 컴팩트이기 때문에, 유한 부분덮개 $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_n}$이 존재한다. $U_b = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \dots \cup U_{a_n}$ 그리고 $V_b = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots V_{a_n}$이라 놓자. 그러면 $A \subseteq U_b$, $b \in V_b$, 그리고 $U_b \cap V_b = \emptyset$을 얻는다. 이제 b를 B에 속하는 임의의 원소라 하자. 그러면 B의 열린덮개 $\{V_b : b \in B\}$를 얻는다. B가 컴팩트이므로, 어떤 유한 부분덮개 $V_{b_1}, V_{b_2}, \dots, V_{b_m}$이 존재한다. $V = V_{b_1} \cup V_{b_2} \cup \dots \cup V_{b_m}$ 그리고 $U = U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \dots \cap U_{b_m}$이라 놓자. 그러면 $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, 그리고 $U \cap V = \emptyset$이다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다. □

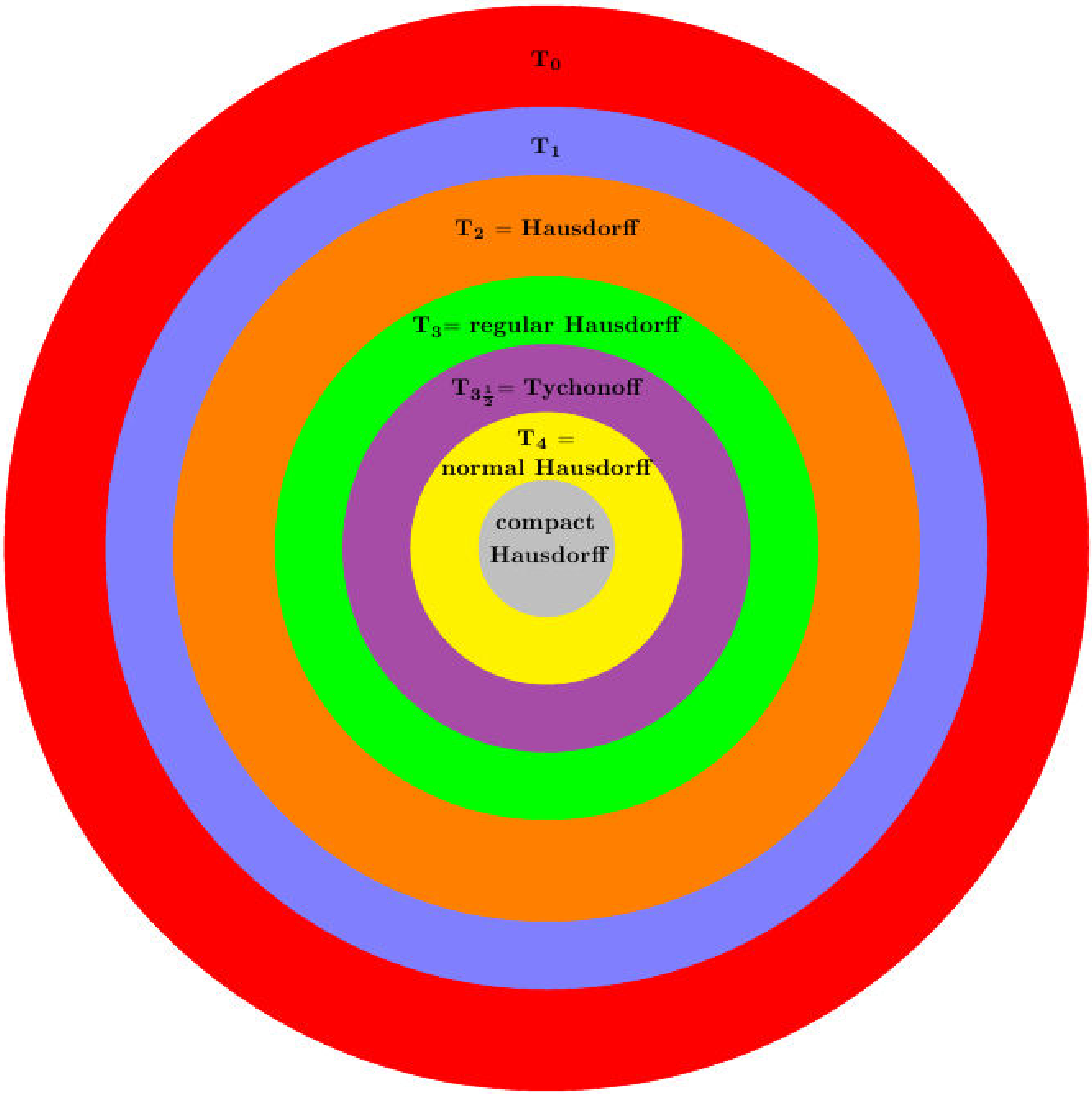
10.3.25 따름정리. 모든 컴팩트 Hausdorff 공간은 입방체 안으로 매몰될 수 있다. □

10.3.26 주목. 우리는 이제 Urysohn의 거리화 정리를 증명할 수 있고, 이 정리는 위상공간이 거리화가능일 충분조건을 제공한다. 그것은 또한 컴팩트 공간이 거리화가능일 필요충분 조건을 제공한다 – 즉, 그것은 Hausdorff이고 제2가산 공간이어야 한다.

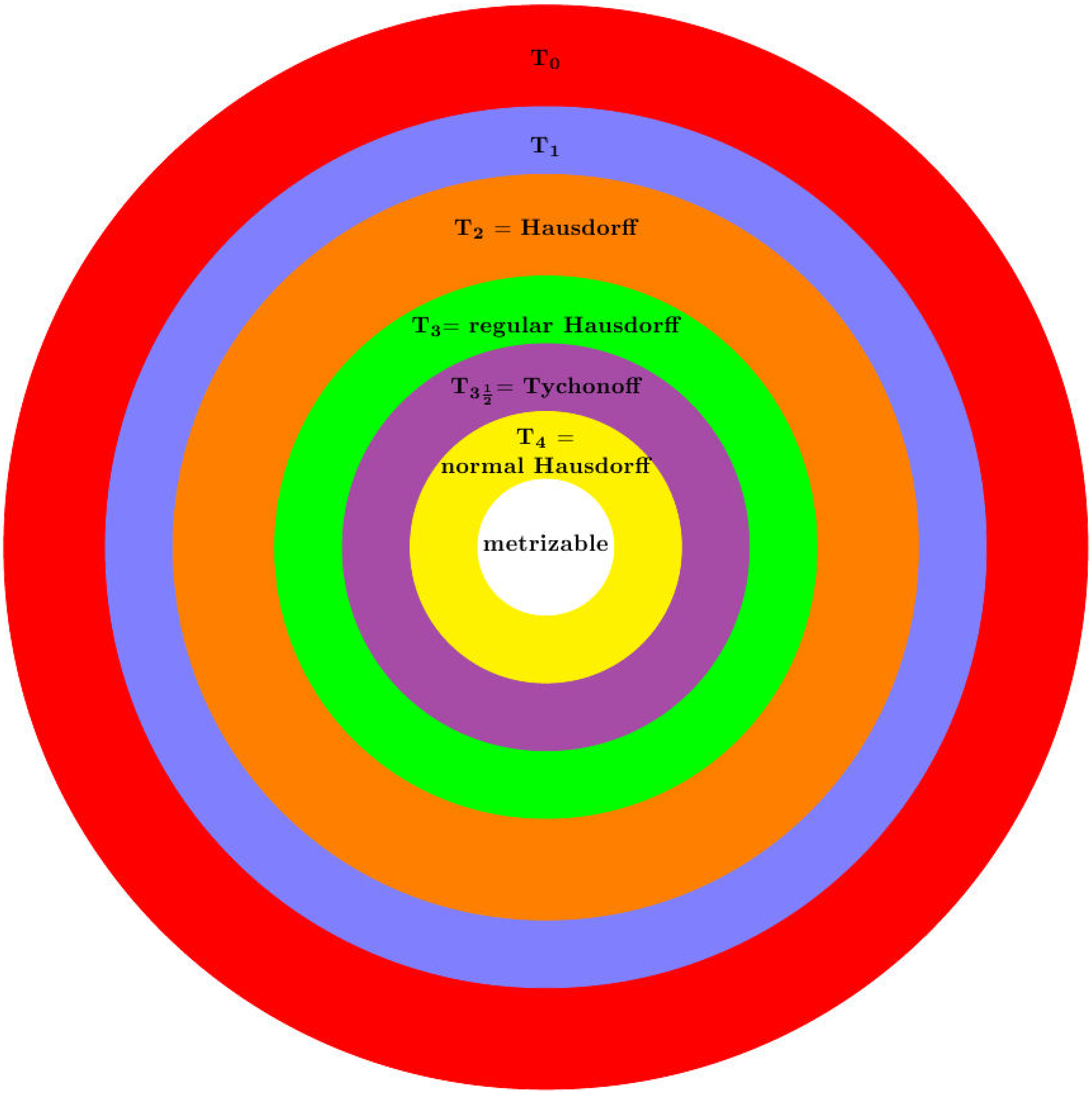
10.3.27 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. 각각의 $x \in X$와 x를 포함하는 각각의 $U \in \mathcal{T}$에 대하여, 어떤 $V \in \mathcal{T}$가 존재하여 $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$를 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **정칙공간 (regular space)**이라고 부른다. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 또한 Hausdorff이면, 그것은 **T_3-공간**이라 불린다.

10.3.28 주목. 모든 $T_{3\frac{1}{2}}$-공간은 T_3-공간이라는 것은 쉽게 입증된다. 따라서, 따름정리 10.3.23으로부터, 모든 T_4-공간은 T_3-공간이다. 실제로 우리는 이제 하나의 체계를 얻는다:

$$\text{컴팩트 Hausdorff} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$



$$\text{거리화가능} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$



$\square$

10.3.29 명제. 모든 정규 제2가산 Hausdorff 공간 $(X,\mathcal{T})$는 거리화가능이다.

증명. $(X,\mathcal{T})$가 Hilbert 입방체 I^∞ 안으로 매몰됨을 보이면 충분하다. 이것을 입증하기 위해서는 따름정리 9.4.10에 의하여, 점과 닫힌집합을 분리하는 $(X,\mathcal{T})$에서 $[0,1]$로의 연속함수들의 가산 집합족을 찾으면 충분하다.

B를 $\mathcal{T}$에 대한 가산기저라 하고, 순서쌍 집합 $\mathcal{S}=\{(V,U)\,|\,U\in\mathcal{B}, V\in\mathcal{B}$ 그리고 $\overline{V}\subseteq U\}$를 생각하자. 그러면 S는 가산이다. $\mathcal{S}$의 각각의 쌍 (V,U)에 대하여, Urysohn의 보조정리 10.3.22에 의하면, 연속함수 $f_{VU}\colon (X,\mathcal{T})\longrightarrow[0,1]$가 존재해서 $f_{VU}(\overline{V})=0$ 그리고 $f_{VU}(X\setminus U)=1$을 만족함을 알 수 있다. $\mathcal{F}$를 위에서 얻어진 연속함수 f의 집합족이라 하자. 그러면 $\mathcal{F}$는 가산이다.

$\mathcal{F}$가 점과 닫힌집합을 분리함을 보이기 위하여, $x\in X$라 하고 W는 x를 포함하는 임의의 열린 집합이라 하자. 그러면 어떤 $U\in\mathcal{B}$가 존재하여 $x\in U\subseteq W$이다. 주목 10.3.28에 의하여, $(X,\mathcal{T})$는 정칙공간이다. 따라서 어떤 집합 $P\in\mathcal{T}$가 존재해서 $x\in P\subseteq\overline{P}\subseteq U$이다. 그러므로 어떤 $V\in\mathcal{B}$가 존재하여 $x\in V\subseteq P$이다. 그러므로 $x\in\overline{V}\subseteq\overline{P}\subseteq U$이다. 그러면 $(V,U)\in\mathcal{S}$ 그리고 만약 f_{VU}가 $\mathcal{F}$ 안에 대응되는 함수이면, $f_{VU}(x)=0\notin\{1\}=\overline{f_{VU}(X\setminus W)}$이다. □

10.3.30 보조정리. 모든 정칙 제2가산 공간 $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다.

증명. A와 B를 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 닫힌 부분집합이라 하고 $\mathcal{B}$를 $\mathcal{T}$에 대한 가산기저라 하자. $(X, \mathcal{T})$가 정칙이고 $X \setminus B$는 열린집합이므로, 각각의 $a \in A$에 대하여 어떤 $V_a \in \mathcal{B}$가 존재해서 $\overline{V}_a \subseteq X \setminus B$이다.

$\mathcal{B}$가 가산이므로 $\{V_a : a \in A\}$의 원소를 나열하여 $\{V_i,\ i \in \mathbb{N}\}$를 얻을 수 있다; 즉, 모든 $i \in \mathbb{N}$에 대하여, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ 그리고 $\overline{V}_i \cap B = \emptyset$이다.

비슷하게 $\mathcal{B}$에 속하는 어떤 집합들 U_i, $i \in \mathbb{N}$가 존재해서 모든 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ 그리고 $\overline{U}_i \cap A = \emptyset$이다.

이제 $U_1' = U_1 \setminus \overline{V}_1$ 그리고 $V_1' = V_1 \setminus \overline{U}_1$라 정의하자.

따라서 $U_1' \cap V_1' = \emptyset$, $U_1' \in \mathcal{T}, V_1' \in \mathcal{T}, U_1' \cap B = U_1 \cap B$, 그리고 $V_1' \cap A = V_1 \cap A$이다.

그 다음에 귀납적으로

$$\overline{U}_n' = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i \quad \text{그리고} \quad V_n' = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i$$

라 정의하자. 따라서 $U_n' \in \mathcal{T}$, $V_n' \in \mathcal{T}, U_n' \cap B = U_n \cap B$, 그리고 $V_n' \cap A = A_n \cap A$이다.

이제 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n'$ 그리고 $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n'$이라 하자.

그러면 $U \cap V = \emptyset$, $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$, $A \subseteq V$, 그리고 $B \subseteq U$이다.

따라서 $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다. $\square$

명제 10.3.29와 보조정리 10.3.30으로부터 Urysohn의 거리화 정리(Urysohn's Metrization Theorem)를 유도할 수 있고, 이것은 명제 10.3.29의 일반화이다.

10.3.31 정리. **(Urysohn의 거리화 정리)** 모든 정칙 제2가산 Hausdorff 공간은 거리화가능이다. $\square$

Urysohn의 거리화 정리, 명제 9.4.4, 그리고 명제 9.4.17로부터, 컴팩트 공간의 거리화 가능성에 대한 다음의 특성화를 유도한다.

10.3.32 따름정리. 컴팩트 공간이 거리화가능일 필요충분조건은 그것이 Hausdorff이고 제2가산이다. $\square$

10.3.33 주목. 주목 10.3.21에서 언급한 것처럼, 모든 거리화가능인 공간은 정규이다. 그러면 명제 9.4.17로부터 모든 가분인 거리공간은 정규, Hausdorff, 그리고 제2가산공간이다. 따라서 모든 가분인 거리공간은 Hilbert 입방체의 부분공간과 동형이라고 말한 Uryshohn의 정리 9.4.11은 명제 10.3.29 (증명)의 결과이다.

10.3.34 주목. 가분공간의 곱에 관한 몇 가지 놀라운 정보가 저장되어 있다. 독자는 합리적으로 가분공간의 유한곱은 가분임을 기대할 것이다. 실제로 가분공간의 가산곱은 가분이라는 사실을 듣는 것을 기대하지 않을 수 없다. 예를 들어, $\mathbb{N}^{\aleph_0}$과 $\mathbb{R}^{\aleph_0}$은 가분일 것으로 기대된다. 그리고 이것은 모두 사실이다. 그러나 $\mathbb{R}^{\mathfrak{c}}$가 가분이라는 사실을 듣고 놀랄 것이다. 이 모든 것은 아래의 Hewitt-Marczewski-Pondiczery 정리 (Hewitt [140]; Marczewski [214]; Pondiczery [261])로부터 나온다.[1] 이 정리는 놀라운 결과일 뿐 아니라 매우 유익하다. 다음 절에서 보게 되듯이, 이것은 많은 위상공간의 Stone-Čech 컴팩트화가 사실상 방대하다는 것을 말해준다. □

10.3.35 보조정리. $(D,\mathcal{T}_d)$를 이산공간, $\mathcal{F}$를 D의 모든 유한 부분집합들의 집합, 그리고 각각의 $F\in\mathcal{F}$에 대하여, $\mathcal{T}_F$를 F 위의 이산위상, $(F,\mathcal{T}_F)$는 $(D,\mathcal{T}_d)$의 부분공간이라 하자. I를 임의의 첨자집합 그리고 각각의 $F\in\mathcal{F}$에 대하여, A_F를 곱공간 $(F,\mathcal{T}_F)^I$의 조밀한 부분집합이라 하자. 만약 $A=\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}} A_F$이면, A는 $(D,\mathcal{T}_d)^I$의 조밀한 부분집합이다.

증명. U를 $(D,\mathcal{T}_d)^I$의 임의의 열린 부분집합이라 하자. $(D,\mathcal{T}_d)$가 이산공간이기 때문에, 곱 위상의 정의, 정의 10.1.1에 의하여, 어떤 $i_1,i_2,\dots,i_k\in I$ 그리고 $x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ik}\in D$가 존재하여

$$U\supseteq\{x_{i_1}\}\times\{x_{i_2}\}\times\dots\{x_{i_k}\}\times D^{I\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}}$$

이다. $F=\{x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ik}\}$라 놓자. A_F가 $(F,\mathcal{T}_F)^I$에서 조밀하고 $\{x_{i_1}\}\times\{x_{i_2}\}\times\dots\{x_{i_k}\}\times F^{I\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}}$가 $(F,\mathcal{T}_F)^I$에서 열린집합이므로,

$$\{x_{i_1}\}\times\{x_{i_2}\}\times\dots\{x_{i_k}\}\times F^{I\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}}\cap A_F\neq\emptyset$$

이다. 이것은

$$\{x_{i_1}\}\times\{x_{i_2}\}\times\dots\{x_{i_k}\}\times D^{I\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}}\cap A_F\neq\emptyset$$

임을 의미한다. 결과적으로 이것은 $U\cap A_F\neq\emptyset$임을 의미한다. 그러므로 $U\cap A\neq\emptyset$이다. 따라서, 우리가 요구했던 것처럼, A는 실제로 $(D,\mathcal{T}_d)^I$에서 조밀하다. □

[1] E.S. Pondiczery는 Ralph P. Boas Jr, Frank Smithies와 동료들에 의하여 고안된 필명이었다.

10.3.36 명제. m을 무한기수 그리고 위상공간 $(X, \mathcal{T}) = \{0,1\}^{2^m}$을 두 점 이산공간 $\{0,1\}$의 2^m개의 곱공간이라 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$는 농도가 $\leq m$인 조밀한 부분공간을 갖는다.

증명. M을 집합, card $M = m$이라 하자. 멱집합 $\mathcal{P}(M)$은 card $(\mathcal{P}(M)) = 2^m$을 갖는다.

우리는 농도가 $\leq m$인 $(X, \mathcal{T})$의 조밀한 부분집합 Y를 찾을 필요가 있다 .
집합 S와 함수 $\phi : S \to X$를 찾아서 $\phi(S)$가 $(X, \mathcal{T})$의 조밀한 부분집합이고 card $(S) = m$ 임을 보이면 충분하다.

$\mathcal{F}(M)$을 M의 모든 유한 부분집합들의 집합이라 하자. 그러면 card $(\mathcal{F}(M)) = m$이다. (연습문제 10.3 #15.)

$\mathcal{F}(\mathcal{F}(M))$을 $\mathcal{F}(M)$의 모든 유한 부분집합들의 집합이라 하자. 그러면 card $(\mathcal{F}(\mathcal{F}(M))) = m$ 이다.

$S = \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(\mathcal{F}(M))$이라 놓자. 따라서 card $(S) = m$이다.

우리는 이제 S에서 X로의 함수 ϕ를 찾는다.
$X = \{0,1\}^{2^m} = \{0,1\}^{\mathcal{P}(M)}$, 그리고 $\{0,1\}^{\mathcal{P}(M)}$는 $\mathcal{P}(M)$에서 $\{0,1\}$로의 모든 함수들의 집합임을 상기하자.
따라서 S의 모든 부분집합 T에 대하여, $\phi(T)$는 $\mathcal{P}(M)$에서 $\{0,1\}$로의 함수이다.

N을 M의 부분집합이라 하자; 즉, $N \in \mathcal{P}(M)$이다.
더욱이, $F \in \mathcal{F}(M)$ 그리고 $\mathbb{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(M))$이라 하자.

$\phi : S \to X$를 다음과 같이 정의하자:

$$\phi(F, \mathbb{F})(N) = \begin{cases} 1, & N \cap F \in \mathbb{F} \\ 0, & N \cap F \notin \mathbb{F}. \end{cases}$$

$x \in X$ 그리고 N_j, $j \in J$를 M의 유한개의 서로 다른 부분집합이라 하자.

$K = \{(j_1, j_2) : j_1, j_2 \in J,\ j_1 \neq j_2\}$라 놓고 각각의 $(j_1, j_2) \in K$에 대하여,

$$T_{j_1 j_2} = (N_{j_1} \cup N_{j_2}) \setminus (N_{j_1} \cap N_{j_2})$$

라 정의하자.

$\sigma : K \to \bigcup\limits_{(j_1,j_2) \in K} T_{j_1,j_2}$는 임의의 함수로써 $\sigma(j_1, j_2) \in T_{j_1 j_2}$, $(j_1, j_2) \in K$를 만족한다고 하자.

$\mathbb{F} = \{N_j \cap \sigma(K) : j \in J$ 그리고 $x(N_j) = 1\}$라 놓자.
[$x \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(M)}$임을 상기하자, 즉 x는 $\mathcal{P}(M)$에서 $\{0,1\}$로의 함수임을 상기하자.]

그러면 모든 $j \in J$에 대하여 $\phi(\sigma(K), \mathbb{F})(N_j) = x(N_j)$임은 쉽게 입증되어 증명이 끝난다.[2] □

[2]이 명제의 증명은, 모든 무한집합 X는 $2^{2^{\text{card}\,(X)}}$개의 서로 다른 극대필터(ultrafilters)를 갖는다는 Gillman and Jerison [126]의 정리 9.2의 증명과 밀접하게 관련이 있는 Blair [39]의 증명에 근거를 두었다. 또한 명제 A6.4.11 을 보시오.

10.3.37 정의. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 m을 $(X, \mathcal{T})$가 갖는 조밀한 부분집합의 농도 m 중 가장 작은 기수라 하자. 그러면 $(X, \mathcal{T})$는 **밀도 캐릭터(density character)** m을 갖는다고 말한다.

분명히 위상공간이 가분일 필요충분조건은 그 위상공간의 밀도 캐릭터가 $\aleph_0$보다 적거나 같은 것이다.

따라서 우리는 명제 10.3.36을 다음과 같은 방법으로 재서술 할 수 있다.

10.3.38 명제. 임의의 무한기수 m에 대하여, 위상공간 $(X, \mathcal{T}) = \{0,1\}^{2^m}$은 기껏해야 밀도 캐릭터 m을 갖는다.

10.3.39 따름정리. 임의의 무한기수 m과 임의의 유한 이산공간 $(F, \mathcal{T}_F)$에 대하여, 곱공간 $(X, \mathcal{T}) = (F, \mathcal{T}_F)^{2^m}$은 기껏해야 밀도 캐릭터 m을 갖는다.

증명. n을 양의 정수라 하고 $2^n >$ card F를 만족한다고 하자. 그리고 f를 이산공간 $\{0,1\}^n$에서 이산공간 $(F, \mathcal{T}_F)$ 위로의 임의의 (연속) 함수라 하자. 그러면 $(\{0,1\}^n)^{2^m}$에서 $(F, \mathcal{T}_F)^{2^m}$ 위로의 연속함수가 존재한다. n은 유한이고 m은 무한기수이기 때문에, $(\{0,1\}^n)^{2^m}$과 $\{0,1\}^{2^m}$이 위상동형임은 쉽게 확인된다. 그러므로 $\{0,1\}^{2^m}$에서 $(F, \mathcal{T}_F)^{2^m}$ 위로의 연속함수가 존재한다. 조밀한 부분집합의 연속상은 치역의 조밀한 부분집합이기 때문에, $(F, \mathcal{T}_F)^{2^m}$의 밀도 캐릭터는 $\{0,1\}^{2^m}$의 밀도 캐릭터보다 적거나 같다는 결론이 나온다. 그런데 명제 10.3.38에 의하여 $\{0,1\}^{2^m}$의 밀도 캐릭터는 m보다 작거나 같다. 그러므로 우리가 원했던 결과를 얻는다. □

10.3.40 명제. 임의의 무한기수 m에 대하여, $(D, \mathcal{T}_d)$를 농도가 m보다 작거나 같은 이산위상 공간이라 하자. 그러면 $(D, \mathcal{T}_d)^{2^m}$의 밀도 캐릭터는 m보다 작거나 같다.

증명. 보조정리 10.3.35와 따름정리 10.3.39로부터 바로 유도된다. □

10.3.41 정리. **(Hewitt-Marczewski-Pondiczery 정리)** m을 무한기수, I를 농도가 2^m보다 작거나 같은 집합, 그리고 $i \in I$에 대하여 $(X_i, \mathcal{T}_i)$를 각각의 밀도 캐릭터가 m보다 작거나 같은 위상공간이라 하자. 그러면 곱공간 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$의 밀도 캐릭터는 m보다 작거나 같다.
특히, 만약 $(X, \mathcal{T})$가 밀도 캐릭터가 m보다 작거나 같은 임의의 위상공간이면, $(X, \mathcal{T})^{2^m}$의 밀도 캐릭터는 m보다 작거나 같다.

증명. 명제 10.3.40에 의하여, 각각의 $(X_i, \mathcal{T}_i)$는 농도가 m인 이산공간 $(D, \mathcal{T}_d)$의 연속상인 조밀한 부분집합을 갖는다. 그러므로 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$도 역시 곱공간 $(D, \mathcal{T}_d)^{2^m}$의 연속상인 조밀한 부분집합을 갖는다. $(D, \mathcal{T}_d)^{2^m}$은 농도가 m보다 작거나 같은 조밀한 부분집합을 갖기 때문에, 곱공간 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ 역시 농도가 m보다 작거나 같은 조밀한 부분집합을 갖는다; 즉, m보다 작거나 같은 밀도 캐릭터를 갖는다. □

10.3.42 따름정리. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 가분인 위상공간이면, $(X, \mathcal{T})^{\mathfrak{c}}$는 가분공간이다. 특히, $\mathbb{R}^{\mathfrak{c}}$는 가분이다.

확장 정리로 이 절을 마무리 한다; 첫번째로 중요한 것은 Tietze의 확장 정리인데, 이 정리 자체가 흥미로울 뿐 아니라 다음 절에서 공부하게 될 Stone–Čech 컴팩화에 매우 유용하다. 우리는 일반화된 Tietze의 확장 정리를 서술하기 전에 여러 가지 특별한 경우를 증명한다.

10.3.43 명제. $(X, \mathcal{T})$를 Hausdorff 위상공간이라 하자. 다음 조건은 서로 동치이다:

(i) $(X, \mathcal{T})$는 정규이다;

(ii) $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌 부분공간 $(S, \mathcal{T}_1)$과, $(S, \mathcal{T}_1)$에서 유클리드 위상을 갖는 닫힌 단위구간 $[0, 1]$로의 각각의 연속함수 ϕ에 대하여, ϕ의 연속인 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$가 존재한다.

증명. [3] (ii)가 성립한다고 가정하자. A와 B를 $(X, \mathcal{T})$의 서로소인 닫힌 부분집합이라 하자. $S = A \cup B$라 놓고 함수 $\phi : S \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자: $x \in A$일 때 $\phi(x) = 0$, 그리고 $x \in B$일 때 $\phi(x) = 1$이다. 그러면 분명히 $\phi : (A \cup B, \mathcal{T}_1) \to \mathbb{R}$는 연속이다. 여기서 $\mathcal{T}_1$은 $(X, \mathcal{T})$로 유도된 $A \cup B$의 부분위상이다. 가정에 의하여, ϕ의 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$가 존재한다. U와 V를 각각 $\mathbb{R}$에서 0과 1을 포함하는 서로소인 열린집합이라 하자. 그러면 $\Phi^{-1}(U)$와 $\Phi^{-1}(V)$는 각각 A와 B를 포함하는 서로소인 열린집합이다. 따라서 $(X, \mathcal{T})$는 실제로 정규공간이다; 즉, (i)이 성립한다.

이제 (i)이 참이라고 가정하자. 먼저 $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to [0, 1]$인 경우를 생각하자. $r \in \mathbb{Q}$에 대하여, $S_r = \{x \in S : \phi(x) \leq r\}$ 그리고 $s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$에 대하여, $T_s = X \setminus \{x \in S : \phi(x) \geq s\}$라 정의하자. 첨자집합 P를 $P = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q}$ 그리고 $0 \leq r < s < 1\}$로 정의하자. 편리하게 $P = \{(r_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$로 쓰자. 위상공간 X의 임의의 부분집합 Y에 대하여, $(X, \mathcal{T})$에서 Y의 내부 Int(Y)를 간단하게 Y^0으로 나타내자.

우리의 증명은 수학적 귀납법을 이용할 것이다. S_{r_1}는 닫힌집합, T_{s_1}는 열린집합, $S_{r_1} \subseteq T_{s_1}$ 그리고 $(X, \mathcal{T})$는 정규공간임을 주목하면, 주목 10.3.21에 의하여 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합 H_1이 존재해서 $S_{r_1} \subseteq H_1^0 \subseteq H_1 \subseteq T_{s_1}$이 성립함을 안다. 다음으로, 모든 $k < n \in \mathbb{N}$에 대하여 닫힌집합 H_k가 존재해서

$$k < n\text{일 때}, S_{r_k} \subseteq H_k^0 \subseteq H_k \subseteq T_{s_k} \tag{1}$$

$$\text{그리고} \quad j, k < n,\ r_j < r_k \text{ 그리고 } s_j < s_k\text{일 때}, \quad H_j \subseteq H_k^0 \tag{2}$$

라고 가정하자. $J = \{j : j < n,\ r_j < r_n, s_j < s_n\}$ 그리고 $K = \{k : k < n,\ r_n < r_k, s_n < s_k\}$라 정의하자.

S_r과 T_s의 정의를 주목하고 (1)과 (2)를 이용하여, 주목 10.3.21을 적용하면 (단, $A = S_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} H_j$ 그리고 $C = T_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} H_k^0$이다), $(X, \mathcal{T})$의 닫힌집합 H_n이 존재하여

$$S_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} H_j \subseteq H_n^0 \subseteq H_n \subseteq T_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} H_k^0 \tag{3}$$

[3]여기에 소개된 증명은 Mandelkern [213]의 증명에 근거한 것이다. 다른 참고서에 일양연속을 이용한 다른 증명이 있다.

이 성립함을 보일 수 있다. 이 식 (3)으로부터

$$k < n+1\text{일 때, } S_{r_k} \subseteq H_k^0 \subseteq H_k \subseteq T_{s_k}, \tag{1'}$$

$$\text{그리고} \quad j,k < n+1,\ r_j < r_k \text{ 그리고 } s_j < s_k\text{일 때, } , H_j \subseteq H_k^0 \tag{2'}$$

임을 입증할 수 있다. 식 (1), (2), (1') 그리고 (2')에 의하여 닫힌집합 H_n의 귀납적 정의가 완성된다.

이제 우리는 H_n대신에 H_{rs}라 쓰자. 여기서 $r = r_n$ 그리고 $s = s_n$이다. 그러므로 $(r,s) \in P$에 대하여, 닫힌집합 H_{rs}을 얻고

$$(r,s) \in P\text{일 때, } S_r \subseteq H_{rs}^0 \subseteq H_{rs} \subseteq T_s \tag{4}$$

$$\text{그리고 } r < t, s < u\text{일 때, } H_{rs} \subseteq H_{tu}^0 \tag{5}$$

이다. 이제 X_r을 다음과 같이 정의하자:

$$X_r = \begin{cases} X, & r \geq 1 \\ \emptyset, & r < 0 \\ \bigcap_{s>r} H_{rs}, & r \in \mathbb{Q} \cap [0,1) \end{cases} \tag{6}$$

$(r,s) \in P$에 대하여, $r < t < s$를 만족하는 t를 선택하자. 그러면 (6)과 (5)에 의하여,

$$X_r \subseteq H_{rt} \subseteq H_{ts}^0 \subseteq H_{ts} \subseteq \bigcap_{u>s} H_{su} = X_s \tag{7}$$

이다. (7)로부터 다음을 유도한다:

$$X_r \subseteq X_s^0\,,\ \text{여기서 } (r,s) \in P \text{ 그리고 } r < s \tag{8}$$

S_r과 T_r의 정의 및 식 (4)와 (6)으로부터 다음 식을 얻는다:

$$r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)\text{에 대하여, } S_r \subseteq S \cap X_r = S \cap \bigcap_{s>r} H_{rs} \subseteq S \cap \bigcap_{s>r} T_s = S_r. \tag{9}$$

그러므로 (8)에 의하여 그리고 (9)의 포함관계에 있는 모든 집합은 실제로 같다는 것을 주목하여, 우리는 다음 성질을 만족하는 $(X, \mathcal{T})$의 닫힌 부분집합 $\{X_r : r \in \mathbb{Q}\}$을 구했다:

$$r, s \in \mathbb{Q},\ r < s\text{에 대하여, } X_r \subseteq X_s^0\,,\ \text{그리고 } X_r \cap S = S_r. \tag{10}$$

마지막으로 $\Phi(x) = \inf\{r : x \in X_r\}$, $x \in X$라 정의하자. (6)에 의하여, $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$, 그리고 $\phi(x) = \inf\{r : x \in S_r\}$이기 때문에, 우리는 모든 $x \in S$에 대하여 $\Phi(x) = \phi(x)$을 얻는다; 즉, Φ는 ϕ의 확장함수이다. 만약 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$이면, Φ의 정의로부터

$$\Phi^{-1}((a,b)) = \bigcup \{X_s^0 \setminus X_r : r, s \in \mathbb{Q} \text{ 그리고 } a < r < s < b\}$$

임이 곧바로 유도된다. 그래서 Φ는 연속이다; 즉, Φ는 우리가 원했던 ϕ의 연속 확장함수이다. $\square$

10.3.44 명제. $(X, \mathcal{T})$를 Hausdorff 위상공간이라 하자. 그러면 다음 조건은 서로 동치이다:

(i) $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다;

(ii) $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌 부분공간 $(S, \mathcal{T}_1)$과, $(S, \mathcal{T}_1)$에서 유클리드 위상을 갖는 열린구간 $(0, 1)$로의 각각의 연속함수 ϕ에 대하여, ϕ의 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (0, 1)$가 존재한다.

증명. (ii)이면 (i)이 성립한다는 것은 명제 10.3.43에서처럼 비슷하게 증명된다.

그래서 (i)이 성립한다고 가정하고 ϕ는 $(S, \mathcal{T}_1)$에서 $(0, 1)$로의 연속함수라 하자. 우리는 모든 $x \in S$에 대하여 $\Gamma(x) = \phi(x)$를 만족하는 연속함수 $\Gamma : X \to (0, 1)$를 찾기를 원한다. 명제 10.3.43에 의하여, 연속함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$가 존재해서, 모든 $x \in S$에 대하여 $\Phi(x) = \phi(x)$이다.

$D = \{x : x \in X, \Phi(x) \in \{0, 1\}\}$라 하자. 그러면 S와 D는 서로소인 닫힌집합이다. $(X, \mathcal{T})$가 정규공간이므로, Urysohn의 보조정리 10.3.22에 의하여, 연속함수 $\theta : (X, \mathcal{T}) \to [\frac{1}{2}, 1]$가 존재해서 모든 $x \in S$에 대하여 $\theta(x) = 1$, 그리고 모든 $x \in D$에 대하여 $\theta(x) = \frac{1}{2}$이다. 그러므로 만약 $\Gamma : (X, \mathcal{T}) \to (0, 1)$를 $\Gamma(x) = \Phi(x).\theta(x).\theta(x) + 1 - \theta(x)$로 정의하면, 우리는 쉽게 Γ가 우리가 원했던 ϕ의 연속 확장함수임을 입증할 수 있다. □

10.3.45 보조정리. $(S, \mathcal{T}_1)$을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하고, $(Y, \mathcal{T}_2)$와 $(Z, \mathcal{T}_3)$는 위상동형인 위상공간이라 하자. 만약 모든 연속함수 $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$가 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_2)$를 가지면, 모든 연속함수 $\gamma : (S, \mathcal{T}_2) \to (Z, \mathcal{T}_3)$도 역시 연속 확장함수 $\Gamma : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_3)$를 갖는다.

증명. 연습문제.

명제 10.3.44와 보조정리 10.3.45의 직접적인 결과로 다음을 얻는다:

10.3.46 명제. $(X, \mathcal{T})$를 Hausdorff 위상공간이라 하자. 다음은 서로 동치이다:

(i) $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다;

(ii) $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌 부분공간 $(S, \mathcal{T}_1)$에 대하여 그리고 각각의 연속함수 $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to \mathbb{R}$에 대하여, ϕ의 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$가 존재한다. □

10.3.47 정의. $(Y, \mathcal{T}_1)$을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. 연속함수 $\theta : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 존재해서 모든 $y \in Y$에 대하여 $\theta(y) = y$를 만족하면 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 $(X, \mathcal{T})$의 **수축(retract)**이라고 부른다.

10.3.48 보기. $[0, 1]$은 $\mathbb{R}$의 수축이다. (이것을 입증하시오.) □

10.3.49 보조정리. $(S, \mathcal{T}_1)$을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. 더욱이, $(Y, \mathcal{T}_2)$와 $(Z, \mathcal{T}_3)$을 위상공간이라 하고, $(Z, \mathcal{T}_3)$는 $(Y, \mathcal{T}_2)$의 수축이라 하자. 만약 모든 연속함수 $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$가 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_2)$를 가지면, 모든 연속함수 $\gamma : (S, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_3)$ 역시 연속 확장함수 $\Gamma : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_3)$를 갖는다.

증명. $\gamma : (S, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_3)$를 임의의 연속함수라 하자. $(Z, \mathcal{T}_3)$가 $(Y, \mathcal{T}_2)$의 수축이므로, 연속함수 $\theta : (Y, \mathcal{T}_2) \to (Z, \mathcal{T}_3)$가 존재해서 모든 $z \in Z$에 대하여 $\theta(z) = z$이다.

또한 γ가 $(S, \mathcal{T}_1)$에서 $(Y, \mathcal{T}_2)$로의 연속함수이므로, 가정에 의하여 γ의 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_2)$가 존재한다. $\Gamma = \theta \circ \Phi$라 놓으면, 우리가 원했던 $\Gamma : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_3)$가 $\gamma : (S, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_3)$의 연속 확장함수임을 얻는다. □

10.3.50 보조정리. $(S, \mathcal{T}_1)$을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. I를 임의의 첨자집합, 그리고 $\{(Y, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$를 위상공간들의 집합이라 하자. 만약 모든 연속함수 $\phi_i : (S, \mathcal{T}_1) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$가 연속 확장함수 $\Phi_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$를 가지면, 곱함수 $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to \prod_{i \in I}(Y_i, \mathcal{T}_i)$, $\phi(x) = \prod_{i \in I} \phi_i(x)$, $x \in S$는 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to \prod_{i \in I}(Y_i, \mathcal{T}_i)$를 갖는다.

증명. Φ를 Φ_i, $i \in I$의 곱함수라고 정의하면, 곧바로 결론을 얻는다. □

마지막으로, 보조정리 10.3.50 그리고 10.3.49, 명제 10.3.46 그리고 보기 10.3.48을 이용하여, (보다 일반적인 버젼인) Tietze의 확장정리를 얻는다.

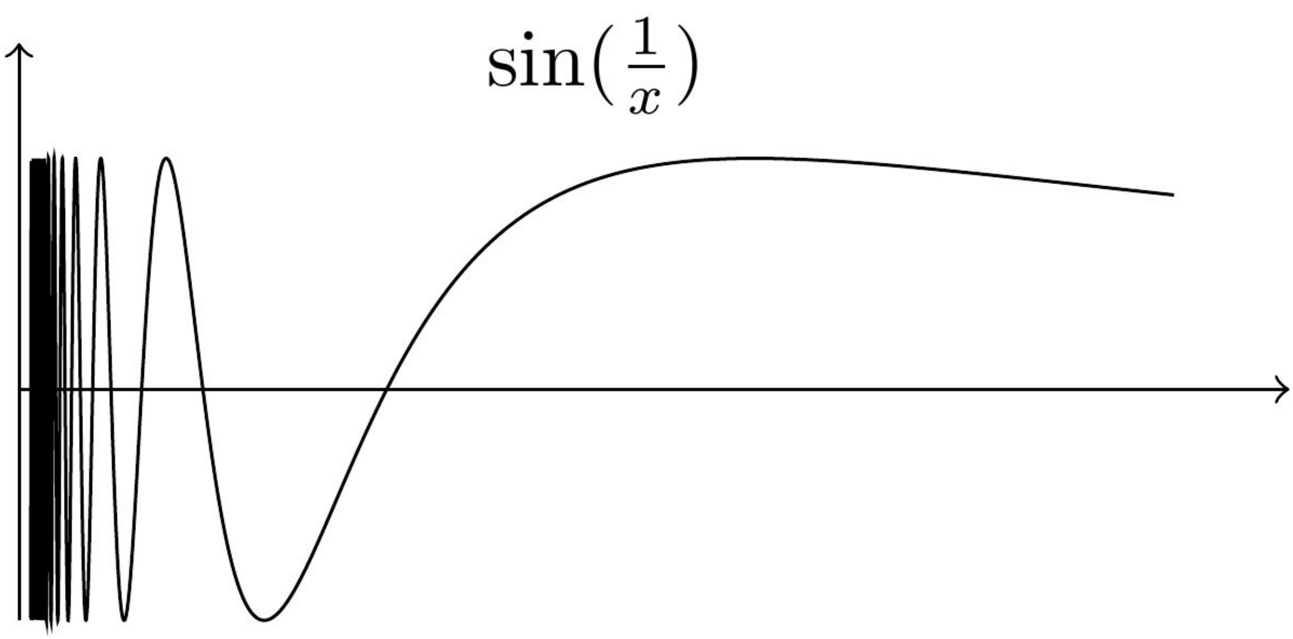
10.3.51 정리. (Tietze의 확장정리(Tietze Extension Theorem) $(X, \mathcal{T})$를 Hausdorff 위상공간, m을 임의의 기수, 그리고 $(Y, \mathcal{T}_2)$를 곱공간 $\mathbb{R}^m$의 수축인 무한 위상공간이라 하자. 그러면 다음 조건은 서로 동치이다:

(i) $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이다;

(ii) $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌 부분공간 $(S, \mathcal{T}_1)$에 대하여 그리고 각각의 연속함수 $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$에 대하여, ϕ의 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_2)$가 존재한다.

특히, $(Y, \mathcal{T}_2)$가 $\mathbb{R}$에서 임의의 자명하지 않은 구간일 때가 이 경우이다. □

10.3.52 주목. 정리 10.3.51 (ii)에서 $(S, \mathcal{T}_1)$이 $(X, \mathcal{T})$에서 닫혀있다는 조건은 반드시 필요하다. 예를 들어, $\phi : (0, 1] \to \mathbb{R}$를 $\phi(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$에 의하여 정의된 함수라 하자. 그러면 ϕ는 연속이지만, ϕ의 연속 확장함수 $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 존재하지 않는다. (이것을 입증하시오.)



□

우리는 조밀한 부분공간 위의 연속함수를 확장하는 유용한 결과를 소개하고 이 절을 마치려고 한다. 이것은 부록 6의 §A6.4에 있는 Wallman의 컴팩트화를 논의하는데 유용하다.

10.3.53 명제. $(S, \mathcal{T}_1)$을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 조밀한 부분공간이라 하고, $\phi : (S, \mathcal{T}_1) \to (K, \mathcal{T}_2)$를 $(S, \mathcal{T}_1)$에서 컴팩트 Hausdorff 공간 $(K, \mathcal{T}_2)$로의 연속함수라 하자. 다음은 서로 동치이다:

(i) 함수 ϕ가 연속 확장함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (K, \mathcal{T}_2)$를 갖는다;

(ii) $(K, \mathcal{T}_2)$의 닫힌 부분집합의 각각의 쌍 C_1, C_2에 대하여, 역상 $\phi^{-1}(C_1)$과 $\phi^{-1}(C_2)$가 $(X, \mathcal{T})$에서 서로소인 폐포를 갖는다.

증명. 먼저 (i)이 성립한다고 가정하자. 즉, 연속 확장함수 Φ가 존재한다고 가정하자. 연속성에 의하여, $\Phi^{-1}(C_1)$과 $\Phi^{-1}(C_2)$는 $(X, \mathcal{T})$에서 서로소인 닫힌집합이다. 그러므로

$$\overline{\Phi^{-1}(C_1)} \cap \overline{\Phi^{-1}(C_2)} = \Phi^{-1}(C_1) \cap \Phi^{-1}(C_2) = \emptyset$$

이다. 따라서 (ii)가 성립한다.

이제 (ii)가 성립한다고 가정하자. 모든 $x \in X$에 대하여, $\mathcal{N}(x)$를 $x \in (X, \mathcal{T})$의 모든 열린근방들의 집합이라 하자.

$$\mathcal{F}(x) = \{\overline{\phi(S \cap N)} : N \in \mathcal{N}(x)\} \tag{1}$$

라 하자.

$\mathcal{F}(x)$의 각각의 원소는 분명히 $(K, \mathcal{T}_2)$의 닫힌 부분집합이다.

각각의 $x \in X$에 대하여, $\mathcal{F}(x)$는 유한 교집합 성질을 가지고 있음을 입증할 것이다. $N_1, N_2, \ldots, N_n \in \mathcal{N}(x)$라 하자. 그러면

$$\overline{\phi(S \cap N_1)} \cap \overline{\phi(S \cap N_2)} \cap \cdots \cap \overline{\phi(S \cap N_n)} \supseteq \overline{\phi(S \cap N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n)} \tag{2}$$

이다. S가 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀하므로, $S \cap N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n \neq \emptyset$이고, 이것에 의하여

$$\overline{\phi(S \cap N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n)} \neq \emptyset$$

이 성립한다. 그러므로 $\mathcal{F}(x)$는 유한 교집합 성질을 갖는다. $(K, \mathcal{T}_2)$가 컴팩트이므로, 명제 10.3.2에 의하여, 각각의 $x \in X$에 대하여 $\bigcap_{F_i \in \mathcal{F}(x)} F_i \neq \emptyset$이다.

$$\text{각각의 } x \in X\text{에 대하여, } \Phi(x) = \bigcap_{F_i \in \mathcal{F}(x)} F_i \tag{3}$$

라고 정의하자.

각각의 $x \in X$에 대하여, $\Phi(x)$는 한 점이라는 것을 입증할 필요가 있고, 그리고 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (K, \mathcal{T}_2)$가 연속임을 보여야 한다. 만약 $\Phi(x)$가 한 점이면, 이전의 단락에 의하여, 모든 $x \in S$에 대하여, $\Phi(x) = \phi(x)$이다.

어떤 $x \in X$에 대하여, $y_1, y_2 \in \Phi(x)$이고 $y_1 \neq y_2$라고 가정하자.

$(K, \mathcal{T}_2)$가 컴팩트 Hausdorff 공간이므로, 주목 10.3.28에 의하여, 그것은 정칙 그리고 Hausdorff이다. 그러므로 y_1, y_2의 각각의 열린근방 U_1, U_2가 존재하여 $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$이다. 가정에 의하여, $\overline{\phi^{-1}(U_1)} \cap \overline{\phi^{-1}(U_2)} = \emptyset$이다. $O_1 = X \setminus \overline{\phi^{-1}(U_1)}$ 그리고 $O_2 = X \setminus \overline{\phi^{-1}(U_2)}$라 놓으면, $X = O_1 \cup O_2$을 얻는다. 그러므로 $j = 1$ 또는 $j = 2$에 대하여, $x \in O_j$이다. $U_j \cap \phi(S \setminus \overline{\phi^{-1}(U_j)}) = \emptyset$ 그리고 U_j는 $(K, \mathcal{T})$에서 열린집합이므로, $U_j \cap \overline{\phi(S \setminus \overline{\phi^{-1}(U_j)})} = \emptyset$을 얻는다. 이것으로부터, $y_j \notin \overline{\phi(S \setminus \overline{\phi^{-1}(U_j)})} = \overline{\phi(S \cap O_j)} \in \mathcal{F}(x)$이 성립한다. 그러면 (3)에 의하여, $y_j \notin \Phi(x)$이다. 이것은 모순이고 우리의 가정은 거짓이다. 그러므로 각각의 $x \in X$에 대하여, $\Phi(x)$는 한 점이다.

우리의 마지막 임무는 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (K, \mathcal{T}_2)$가 연속임을 보이는 것이다. U를 $(K, \mathcal{T}_2)$에서 $\Phi(x)$의 열린근방이라 하자. (1)과 (3)에 의하여,

$$\{\Phi(x)\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}(x)} \overline{\phi(S \cap N)} \subseteq U \tag{4}$$

이다. 이것은 $\bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}(x)} (K \setminus \overline{\phi(S \cap N)}) \supseteq K \setminus U$임을 함의한다. $K \setminus U$가 컴팩트이고 각각의 $K \setminus \overline{\phi(S \cap N)}$이 열린집합이므로, $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathcal{N}(x)$이 존재하여

$$(K \setminus \overline{\phi(S \cap N_1)}) \cup (K \setminus \overline{\phi(S \cap N_2)}) \cup \cdots \cup (K \setminus \overline{\phi(S \cap N_k)}) \supseteq K \setminus U$$

이다. 그러므로

$$\bigcap_{i=1}^{k} \overline{\phi(S \cap N_i)} \subseteq U \tag{5}$$

이다. $\bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i = N \in \mathcal{N}(x)$이므로, (1), (2), (4) 그리고 (5)에 의하여, 모든 $z \in N$에 대해서 $\Phi(z) \in \overline{\phi(S \cap N)} \subseteq U$이다; 즉, $\Phi(N) \subseteq U$이다. 그러므로 Φ는 실제로 연속이다. $\square$

연습문제 10.3

1. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린덮개가 가산 부분덮개를 가지면, $(X, \mathcal{T})$를 **Lindelöf 공간**이라 부른다. 다음 명제를 증명하시오.

   (i) **모든 정칙 Lindelöf 공간은 정규공간이다.**
   [힌트: 보조정리 10.3.30에서와 같은 방법을 사용하시오. 연습문제 9.4 #8에서 모든 제2 가산 공간은 Lindelöf임을 보였던 것을 주목하시오.]

   (ii) Sorgenfrey 직선 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$은 Lindelöf 공간이다.

   (iii) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 닫힌 비가산 이산 부분공간을 갖는 위상공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 Lindelöf 공간이 아니다.

   (iv) 위의 (iii)과 연습문제 8.1 #12로부터 곱공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$은 Lindelöf 공간이 아님을 얻는다.
   [이제 우리는 (ii)와 (iv)로부터 **두 Lindelöf 공간의 곱은 반드시 Lindelöf 공간은 아님**을 안다.]

   (v) 위상공간이 컴팩트일 필요충분조건은 그것이 가산 컴팩트이고 Lindelöf 공간임을 입증하시오. (연습문제 7.2 #17을 보시오.)

2. **정칙공간의 임의개의 곱은 정칙공간**임을 증명하시오.

3. **정규공간의 임의의 닫힌 부분공간은 정규공간**임을 입증하시오.

4. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 무한 연결 Tychonoff 공간이면, X는 비가산임을 증명하시오.

5. Hausdorff 공간 $(X, \mathcal{T})$의 가산개의 컴팩트 부분집합들 X_n, $n \in \mathbb{N}$이 존재하여
   (a) 모든 n에 대하여, $X_n \subseteq X_{n+1}$,
   (b) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$,
   (c) X의 임의의 부분집합 A가 닫힌집합일 필요충분조건은 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $A \cap X_n$은 컴팩트이다

   를 만족하면, X를 **k_ω-공간**이라고 부른다.

   다음을 증명하시오.
   (i) **모든 컴팩트 Hausdorff 공간은 k_ω-공간이다**;
   (ii) 모든 가산 이산공간은 k_ω-공간이다;
   (iii) $\mathbb{R}$과 $\mathbb{R}^2$는 k_ω-공간이다;
   (iv) **모든 k_ω-공간은 정규공간이다**;
   (v) 모든 거리화가능 k_ω-공간은 가분이다;
   (vi) 모든 거리화가능 k_ω-공간은 Hilbert 입방체 안으로 매립될 수 있다;
   (vii) **k_ω-공간의 모든 닫힌 부분공간은 k_ω-공간이다**;
   (viii) 만약 $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}')$가 k_ω-공간이면, $(X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T}')$는 k_ω-공간이다.
   (ix) 만약 S가 k_ω-공간 $(X, \mathcal{T})$의 무한 부분집합이고, S가 어느 X_n, $n \in \mathbb{N}$에도 포함되지 않으면, S는 무한 이산 닫힌 부분공간을 갖는다;
   (x) 만약 K가 k_ω-공간 $(X, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분공간이면, 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $K \subseteq X_n$이다.
   (xi)* 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에 대하여, 만약 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, 여기서 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $X_n \subseteq X_{n+1}$, 그리고 부분위상을 갖는 각각의 X_n은 $(X, \mathcal{T})$의 닫힌 거리화가능 부분공간이면, $(X, \mathcal{T})$를 **σ-거리화가능 (σ-metrizable) 공간**이라고 부른다. 만약 σ-거리화가능 공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 수렴하는 수열이, 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, X_n에 포함되면, $(X, \mathcal{T})$를 **강한 σ-거리화가능 (strongly σ-metrizable) 공간**이라 부른다.
      (α) **σ-거리화가능 공간의 모든 닫힌 부분공간은 σ-거리화가능**이다;
      (β) **강한 σ-거리화가능 공간의 모든 닫힌 부분공간은 강한 σ-거리화가능 공간**이다;
      (γ) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 강한 σ-거리화가능이면, $(X, \mathcal{T})$의 모든 닫힌 컴팩트 부분공간 K는 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 X_n에 포함된다.[4]
   (xii) Hausdorff 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 각각의 점 $x \in X$가 k_ω-공간인 근방을 가지면, X를 **국소 k_ω-공간(locally k_ω-space)**이라고 부른다. 모든 k_ω-공간, 모든 이산공간, 모든 국소 컴팩트 Hausdorff 공간, 그리고 국소 k_ω-공간의 모든 닫힌 부분공간은 국소 k_ω-공간임을 증명하시오. (k_ω-공간과는 대조적으로, 거리화가능 국소 k_ω-공간은 가분일 필요는 없다.)

[4] 이 결과는 사실상 K가 $\boxed{\text{닫힌}}$ 부분공간이라는 가정 없이도 성립한다. Banakh [22]을 보시오.

6. **모든 $T_{3\frac{1}{2}}$-공간은 T_3-공간**임을 증명하시오.

7. **거리화가능 공간에 대하여, (i) Lindelöf 공간, (ii) 가분공간, 그리고 (iii) 제2가산공간은 서로 동치임**을 증명하시오.

8. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 각 점 $x \in X$에 대하여, x를 포함하는 가산개의 열린 집합족 $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$가 존재해서, 만약 $V \in \mathcal{T}$ 그리고 $x \in V$일 때, 어떤 n에 대하여 $V \supseteq U_n$를 만족하면, $(X, \mathcal{T})$가 **제1가산공리(first axiom of countability)**를 만족한다고 말한다. (또는 **제1가산(first countable)공간**이라고 불린다.)

   (i) **모든 거리화가능 공간은 제1가산 공간**임을 증명하시오.
   (ii) **모든 제2가산 공간은 제1가산 공간**임을 입증하시오. 그러나 그 역은 참이 아니다. [힌트: 이산공간을 생각하시오.]
   (iii) 만약 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathbb{N}\}$가 제1가산 공간의 가산집합족이면, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \mathcal{T}_i)$는 제1가산 공간임을 증명하시오.
   (iv) **제1가산 공간의 모든 부분공간은 제1가산 공간**임을 입증하시오.
   (v) X를 임의의 비가산집합이라 하자. 입방체 I^X는 제1가산이 아님을 증명하시오. 그러므로 거리화가능이 아니다.
   [I^X는 [컴팩트 Hausdorff 그러므로] 정규공간이지만 거리화가능 공간이 아닌 예제임을 주목하시오.]
   (vi) 위의 (v)를 일반화하여, 만약 J가 임의의 비가산집합이고 각각의 $(X, \mathcal{T}_j)$가 두 점 이상을 갖는 위상공간이면, $\prod_{j \in J}(X_j, \mathcal{T}_j)$는 거리화가능이 아님을 보이시오.

9. **Tychonoff 공간의 집합족은 $[0, 1]$을 포함하고 부분공간과 곱의 연산하에 닫혀있는 위상공간들의 가장 작은 집합족**임을 증명하시오.

10. **완전정칙공간의 모든 부분공간은 완전정칙공간**임을 증명하시오.

11. 명제 8.6.8을 이용하여, 만약 $(G, \mathcal{T})$가 위상군이면, $(G, \mathcal{T})$는 정칙공간임을 증명하시오. [사실상 모든 위상군은 완전정칙임이 사실이다.]

12. **만약 $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$가 임의의 연결공간들의 집합족이면, $\prod_{j \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$는 연결공간**임을 증명하시오.

    [힌트: $x = \prod_{i \in I} x_i \in \prod_{i \in I} X_i$라 하자. S를 $x = \prod_{i \in I} x_i$와 기껏해야 $\boxed{\text{유한}}$개의 좌표가 다른 $\prod_{i \in I} X_i$ 안에 있는 모든 점으로 이루어진 집합이라 하자. $C_X(x) \supseteq S$임을 증명하시오. 그 다음에 S는 $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$에서 조밀함을 보이시오. 마지막으로 $C_X(x)$는 닫힌집합이라는 사실을 이용하시오.]

13. $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$를 임의의 위상공간들의 집합족이라 하자. **$\prod_{j \in j}(X_j, \mathcal{T}_j)$가 국소연결일 필요충분조건은 각각의 $(X_j, \mathcal{T}_j)$가 국소연결이고, 유한개를 제외한 $(X_j, \mathcal{T}_j)$가 또한 연결**임을 증명하시오.

14. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$을 Sorgenfrey 직선이라 하자. 다음 명제를 증명하시오.
    (i) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$은 정규공간이다.
    (ii) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 가분 Hausdorff공간이면, 기껏해야 $\mathfrak{c}$개의 서로 다른 연속함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$가 존재한다.
    (iii) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 정규공간이고 비가산개의 닫힌 이산 부분공간을 갖는다면, 적어도 $2^{\mathfrak{c}}$개의 서로 다른 연속함수 $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$가 존재한다.

    [힌트: Urysohn의 보조정리를 이용하시오.]
    (iv) 위의 (ii)와 (iii) 그리고 연습문제 8.1 #12로부터, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$는 정규공간이 아님을 유도하시오.
    [우리는 두 정규공간의 곱이 반드시 정규공간일 필요가 없음을을 알고 있다.]

15. 만약 S가 무한농도 m을 갖는 집합이면, S의 모든 유한 부분집합들의 집합의 농도도 m임을 입증하시오.

16. 명제 10.3.43의 증명에서 (1′)을 입증하시오.

17. 보조정리 10.3.45를 증명하시오.

18. $\mathbb{R}$의 모든 닫힌구간 $(Y, \mathcal{T})$는 $\mathbb{R}$의 수축임을 증명하시오.

19. $(Y, \mathcal{T}_1)$을 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분공간이라 하자. $(Y, \mathcal{T}_1)$이 $(X, \mathcal{T})$의 수축일 필요충분조건은 모든 위상공간 $(Z, \mathcal{T}_2)$와 모든 연속함수 $\phi : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$가 연속함수 $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_2)$로 확장될 수 있다는 것임을 증명하시오.

20. 주목 10.3.52의 명제를 입증하시오.

21. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 각각의 부분집합 S와 각각의 컴팩트 부분공간 $(K, \mathcal{T}_1)$에 대하여, S가 $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌집합일 필요충분조건은 $S \cap K$가 $(K, \mathcal{T}_1)$에서 닫힌집합이라는 사실을 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **k-공간(k-space)** (또는 **컴팩트하게 생성된 공간(compactly-generated space)**)이라 부른다.

   (i) k-공간의 모든 부분집합 U가 $(X, \mathcal{T})$에서 열린집합일 필요충분조건은 $U \cap K$가 $(K, \mathcal{T}_1)$의 열린 부분집합임을 증명하시오.

   (ii) 모든 컴팩트 Hausdorff 공간, 모든 거리화가능 공간, 모든 k_ω-공간, 그리고 모든 Hausdorff 수열공간(sequential space)은 k-공간임을 증명하시오.

   (iii) k-공간의 닫힌 부분공간은 반드시 k-공간인가?

   (iv) k-공간의 열린 부분공간은 반드시 k-공간인가?

22. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분집합 K_n, $n \in \mathbb{N}$이 존재하여 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$를 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **σ-컴팩트 공간(σ-compact space)**이라 부른다. 다음을 증명하시오:

   (i) 만약 X가 임의의 가산집합이면, X 위의 임의의 위상 $\mathcal{T}$에 대하여, $(X, \mathcal{T})$는 σ-컴팩트 공간이다.

   (ii) 모든 컴팩트 공간 $(X, \mathcal{T})$는 σ-컴팩트이다.

   (iii) 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$은 σ-컴팩트이다.

   (iv) 모든 k_ω-공간은 σ-컴팩트이다. 더욱이, $\mathbb{Q}$는 σ-컴팩트이지만 k_ω-공간이 아닌 예제이다.

   (v) 유클리드 위상을 갖는 모든 무리수의 위상공간 $\mathbb{I}$는 σ-컴팩트가 아니다. (위의 연습문제 5를 보시오.)

   (vi) 모든 σ-컴팩트 공간은 Lindelöf 공간이다.

   (vii) $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 σ-컴팩트 공간이라 하자. 곱공간 $(X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T}_1)$은 σ-컴팩트이다. 이것으로부터 σ-컴팩트 공간의 임의의 유한곱은 σ-컴팩트임을 유도하시오.

   (viii)* 각각의 위상공간 $(X_n, \mathcal{T}_n)$, $n \in \mathbb{N}$이 이산공간 $\mathbb{Z}$와 위상동형이면, $\prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{T}_n)$는 σ-컴팩트가 아님을 증명하시오. 그러므로 σ-컴팩트 공간의 무한곱(가산무한곱 조차도)은 반드시 σ-컴팩트가 아니다.

23. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분집합의 수열 K_n, $n \in \mathbb{N}$이 존재하여 $(X, \mathcal{T})$의 모든 컴팩트 부분집합 C가 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $C \subseteq K_n$을 만족하면, $(X, \mathcal{T})$를 **반컴팩트(hemicompact)** 공간이라고 부른다. 다음을 증명하시오:

 (i) 위의 정의에서, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$이다. (모든 반컴팩트 공간은 σ-컴팩트임을 유도하시오.)
 [힌트: $(X, \mathcal{T})$의 모든 단집합은 컴팩트라는 사실을 이용하시오.]

 (ii) $\mathbb{R}$은 반컴팩트이다.

 (iii) **모든 k_ω-공간은 반컴팩트이다.** ($\mathbb{R}$은 반컴팩트임을 유도하시오.)

 (iv) 만약 X가 비가산집합이고 $\mathcal{T}$가 X 위의 이산위상이면, $(X, \mathcal{T})$는 반컴팩트가 아니다. (거리화가능 국소컴팩트 공간은 반드시 반컴팩트는 아님을 유도하시오.)

 (v) **제1가산 반컴팩트 공간은 국소컴팩트이다.** (거리화가능 반컴팩트 공간은 국소컴팩트임을 유도하시오. **모든 제1가산 k_ω-공간은 국소컴팩트임**을 유도하시오)

 (vi) **국소컴팩트 Hausdorff σ-컴팩트 공간은 반컴팩트이다.**

 (vii) 보통위상을 갖는 유리수집합 $\mathbb{Q}$는 σ-컴팩트이지만 반컴팩트는 아니다.

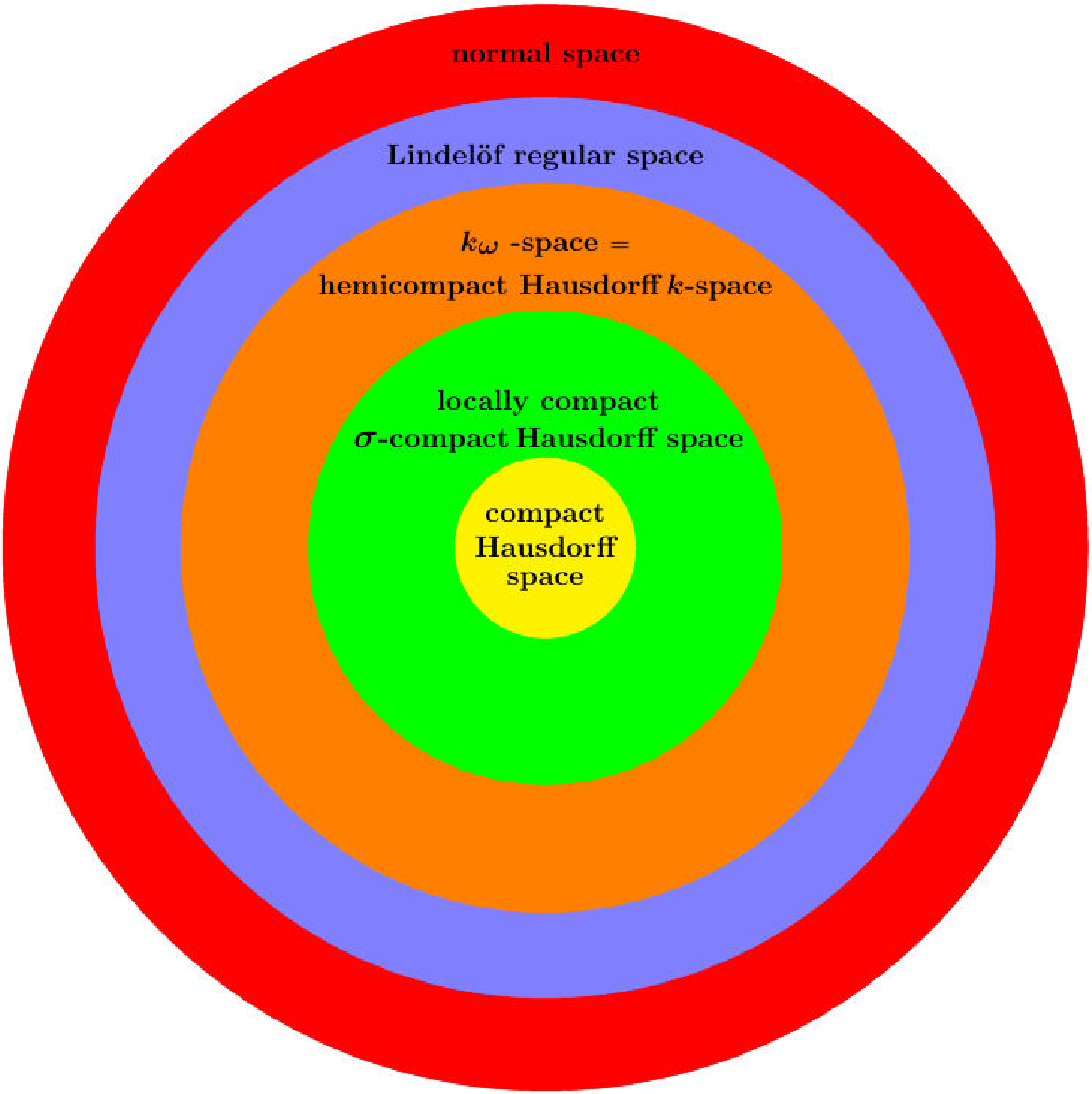
 (viii) 반컴팩트 Hausdorff k-공간은 k_ω-공간이다.

 (ix) 만약 $(X, \mathcal{T})$가 반컴팩트 공간이고 (Y, d)가 거리공간이면, 컴팩트-열린위상(compact-open topology)을 갖는 모든 연속함수들의 집합 $C(X, Y) = \{f \mid f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, d)\}$는 거리화가능이다. (정의 A5.6.4 (b)를 보시오.)
 [힌트: K_n, $n \in \mathbb{N}$을 X의 컴팩트 부분집합이고, 각각의 컴팩트 집합이 어떤 K_n, $n \in \mathbb{N}$의 부분집합이라 하자. 각각의 $n \in \mathbb{N}$과 각각의 $f, g \in C(X, Y)$에 대하여, $d_n(f, g) = \sup_{x \in K_n} d(f(x), g(x))$으로 정의하자.

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$$

 라 놓자. 이것은 $C(X, Y)$ 위의 거리임을 입증하고 컴팩트-열린위상을 유도하시오.]

24. 이전의 연습문제를 이용하여, 아래의 그림이 정확함을 증명하시오:



25. X를 집합이라 하고, 어떤 첨자집합 I에 대하여, $\{A_i : i \in I\}$를 X의 덮개라 하자; 즉, 각각의 $A_i \subseteq X$ 그리고 $\bigcup_{i \in I} A_i = X$이다. 만약 $\{B_j : j \in J\}$가 X의 덮개이고 각각의 $j \in J$에 대하여 어떤 $i \in I$가 존재해서 $B_j \subseteq A_i$를 만족하면, $\{B_j : j \in J\}$를 덮개 $\{A_i : i \in I\}$의 **세분(refinement)** 이라 부른다.

    (i) X의 모든 덮개 $\{A_i : i \in I\}$는 물론 자신의 세분임을 증명하시오.

    (ii) $\{A_i : i \in I\}$의 모든 부분덮개는 $\{A_i : i \in I\}$의 세분임을 증명하시오.

26. $\mathcal{S}$를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합들의 집합이라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 각 점 x의 근방 N_x가 존재해서 유한개를 제외한 모든 $S \in \mathcal{S}$에 대하여 $N_x \cap S = \emptyset$이면, $\mathcal{S}$는 $(X, \mathcal{T})$에서 **국소유한(locally finite)**이라 불린다. 다음 명제를 증명하시오:

    (i) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합들의 집합 $\mathcal{S}$가 유한이면, $\mathcal{S}$는 국소유한이다.

    (ii) X의 모든 점이 기껏해야 집합 $\mathcal{S}$의 하나의 원소 S에 속하면, $\mathcal{S}$는 X 위의 임의의 위상 $\mathcal{T}$에 대하여 $(X, \mathcal{T})$에서 국소유한이다.

    (iii) X를 무한집합이라 하고 $\mathcal{T}$를 X 위의 여유한위상이라 하자. 만약 $\mathcal{S}$가 $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린 집합의 집합이면, $\mathcal{S}$는 $(X, \mathcal{T})$에서 국소유한이 아니다.

    (iv) $\mathcal{S}$를 $(X, \mathcal{T})$의 부분집합들의 국소유한 집합이라 하자. $S \in \mathcal{S}$에 대하여, $\mathcal{T}$를 모든 닫힌집합 $T = \overline{S}$의 집합이라 정의하자. 그러면 $\mathcal{T}$는 국소유한이다.

    (v) 만약 $\mathcal{S}$가 무한집합 X의 부분집합들의 무한집합이고 $(X, \mathcal{T})$가 컴팩트 공간이면, $\mathcal{S}$는 $(X, \mathcal{T})$에서 국소유한이 아니다.

    [힌트: $\mathcal{S}$가 $(X, \mathcal{T})$에서 국소유한이라 가정하고 각각의 $x \in X$에 대하여, $\mathcal{S}$의 오직 유한개의 원소만을 만나는 근방 U_x를 선택하자. 그러면 $\{U_x : x \in X\}$는 집합 X의 열린덮개이다. X의 컴팩트성에 의하여, X의 유한 부분덮개가 존재한다. 이것은 모순이다.]

    (vi) $\mathcal{S}$를 X의 부분집합들의 비가산 집합이라 하자. 만약 $\mathcal{S}$가 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 덮개이고 $(X, \mathcal{T})$가 Lindelöf 공간이거나 제2가산 공간이면, $\mathcal{S}$는 국소유한이 아니다.

27. 첨자집합 I에 대하여, $\{U_i : i \in I\}$를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 열린덮개라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 열린덮개 $\{V_i : i \in I\}$가 각각의 $i \in I$에 대하여 $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$를 만족하면, $\{V_i : i \in I\}$를 덮개 $\{U_i : i \in I\}$의 **줄이기(shrinking)**라고 부른다. **정규공간에 대한 줄이기 보조정리(Shrinking Lemma for Normal Spaces)**로 이어지는 다음 결과를 증명하시오.
$(X, \mathcal{T})$를 정규 Hausdorff 공간이라 하자.

(i) 각각의 $x \in X$와 x의 모든 열린근방 U에 대하여, x의 열린근방 V가 존재하여 $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$이다.

(ii) 만약 V가 닫힌집합, U가 열린집합, 그리고 $V \subseteq U$이면, 어떤 열린집합 W가 존재하여 $V \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$이다. (이 성질은 정규성의 특성화이다.)

(iii) $\{U, V\}$를 X의 열린덮개라 하자. 그러면 열린집합 W가 존재하여 $W \subseteq \overline{W} \subseteq U$이고 $\{W, V\}$는 X의 열린덮개이다.

(iv) $(X, \mathcal{T})$의 모든 유한 열린덮개는 줄이기를 갖는다; 즉, X의 모든 열린덮개 $\{U_i : i = 1, 2, \dots, n\}$에 대하여, X의 어떤 열린덮개 $\{V_i : i = 1, 2, \dots, n\}$가 존재해서, $i = 1, 2, \dots, n$에 대하여 $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$이다. (이 성질은 정규성의 특성화이다.)

(v)* X의 모든 국소유한 열린덮개 $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$에 대하여, X의 어떤 열린덮개 $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$가 존재해서, $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$이다.
(열린덮개 $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$가 국소유한이라는 가정없이, 이 결과가 거짓이라는 것을 증명하기 위하여 선택공리를 사용할 수 있다. 이것은 Clifford Hugh Dowker (1912–1982)의 이름에서 유래된 Dowker 공간과 관련이 있다. **Dowker 공간** $(X, \mathcal{T})$는 정규공간이고 곱공간 $(X, \mathcal{T}) \times [0, 1]$은 정규공간이 아니다.
Rudin [277]를 보시오.)

Dowker

(vi)* **(정규공간에 대한 줄이기 보조정리) 임의의 첨자집합 I와 X의 국소유한 열린덮개 $\{U_i : i \in I\}$에 대하여, X의 어떤 열린덮개 $\{V_i : i \in I\}$가 존재해서 $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$이다.** (C. H. Dowker는 만약 $(X, \mathcal{T})$가 모든 국소유한 열린덮개보다는 모든 열린덮개에 대한 줄이기 보조정리를 만족하면, $(X, \mathcal{T})$는 아래의 연습문제 29에 소개된 성질–파라컴팩트(paracompact) 공간임을 증명했다.)

[힌트: 무한집합의 경우에 정렬-순서 정리, 초한귀납법 그리고/또는 Zorn의 보조정리 형태의 선택공리를 이용하시오.]

28. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. $(X, \mathcal{T})$에서 닫힌 단위구간 [0,1]로의 연속함수들의 집합 $\{f_i : i \in I\}$가 다음의 (a)와 (b)를 만족하면 **단위분할(partition of unity)**이라고 불린다:

(a) 각각의 $x \in X$에 대하여, x의 근방 N_x가 존재해서 유한개를 제외한 모든 $i \in I$에 대하여 f_i는 N_x 위에서 영이 된다. 즉, $y \in N_x$에 대하여 $f_i(y) = 0$; 그리고

(b) $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) = 1$이다.

$\{f_i : i \in I\}$를 단위분할, $\mathcal{U}$를 X의 덮개라 하자. 만약 각각의 f_i가 어떤 $U \in \mathcal{U}$ 위에서 영이 되면, 단위분할 $\{f_i : i \in I\}$가 덮개 $\mathcal{U}$에 **종속된다(subordinate)**고 말한다.

(i) 정규 Hausdorff 공간의 각각의 국소유한 열린덮개 $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$에 대하여 $\mathcal{U}$에 종속된 단위분할이 존재함을 입증하시오.
[힌트: 위의 연습문제 27 (vi)을 이용하여, $(X, \mathcal{T})$의 열린덮개 $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$가 존재하여 각각의 $\overline{V_i} \subseteq U_i$임을 유도하시오. 그 다음 Urysohn의 보조정리 10.3.22를 이용하여, $i \in I$에 대하여 $g_i(\overline{V_i}) = \{1\}$, $g_i(X \setminus U_i) = \{0\}$을 만족하는 연속함수 $g_i : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$를 구성하시오. 마지막으로

$$\text{각각의 } i \in I\text{에 대하여,} \quad f_i = \frac{g_i}{\sum\limits_{i \in I} g_i}$$

라 정의하시오. f_i가 잘 정의되었고 요구된 성질을 만족함을 입증하시오.]

(ii) **[Bernstein (기저) 다항식[5]]** **차수가 $n \in \mathbb{N}$인 Bernstein (기저) 다항식**(Bernstein base polynomials)은 다음과 같이 정의된다: $i = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i}$, 그리고 $i < n$ 또는 $i > n$에 대해서는 $B_{i,n} = 0$이다.

차수가 1, 2, 그리고 3인 Bernstein 기저 다항식을 계산하시오. (차수가 1인 것은 2개, 차수가 2인 것은 3개, 그리고 차수가 3인 것은 4개 존재한다.)

(iii) 차수가 n인 각각의 Bernstein 기저 다항식은 차수가 $n-1$인 Bernstein 기저 다항식으로 쓰여질 수 있음을 입증하시오; 보다 구체적으로,

$$B_{i,n}(x) = (1 - x) B_{i,n-1}(x) + x B_{i-1,n-1}(x)$$

임을 입증하시오.

(iv) 위의 (iii)을 이용하여, 수학적 귀납법에 의하여, 모든 Bernstein 기저 다항식은 $x \in [0, 1]$일 때 $B_{i,n}(x) \geq 0$, 그리고 $x \in (0, 1)$일 때 $B_{i,n}(x) > 0$을 만족함을 증명하시오.

[5]Weierstrass 근사 정리의 문맥에 있는 Bernstein 다항식에 관한 논의에 대해서는, 주목 A7.1.6을 보시오.

(v)

$$\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(x)\,,\ \text{여기서}\ k \in \mathbb{N}$$

임을 입증하시오.

(vi) (v)를 이용하여, **차수가 n인 $n+1$ Bernstein 기저 다항식은 단위분할**임을 입증하므로써,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(x) = \cdots = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(x) = (1-x)+x = 1$$

임을 보이시오.

(vii) 모든 다항식은 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$의 1차 결합(linear sum)으로 표현된다는 것을 주목하여, **차수가 n인 모든 다항식은 차수가 $1, 2, \ldots, n$인 Bernstein 기저 다항식의 1차결합으로 표현됨**을 증명하시오.

[힌트: 수학적 귀납법을 이용하여,

$$x^k = \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(x)$$

임을 입증하시오.]

(viii) 모든 x에 대하여,

$$0 = \lambda_0 B_{0,n}(x) + \lambda_1 B_{1,n}(x) + \cdots + \lambda_n B_{n,n}(x) = 0 \implies i = 1, 2, \ldots, n\text{에 대하여}\ \lambda_i = 0$$

임을 보임으로써 **Bernstein 기저 다항식, $B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \ldots, B_{n,n}(x)$은 1차독립**임을 입증하시오.

(ix) 이 주제에 대하여 몇몇 저자들은 (어리석게도) **Bernstein 다항식** $B_n(x)$을 차수가 $1, 2, \ldots, n$인 Bernstein 기저 다항식의 임의의 1차결합 $\sum_{m=0}^{n} a_m \binom{m}{n} x^m (1-x)^{n-m}$으로 정의한다. 여기서 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$이다. 위의 (vii)을 이용하여, 이 정의에 의하여 **모든 다항식은 Bernstein 기저 다항식**임을 입증하시오.

29. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린덮개가 국소유한인 열린세분을 가지면, $(X, \mathcal{T})$를 **파라컴팩트 (paracompact)**[6][7]라고 부른다. 다음 명제를 증명하시오:

(i) **모든 컴팩트 공간은 파라컴팩트이다.**

(ii) **파라컴팩트 공간의 모든 닫힌 부분공간은 파라컴팩트이다.**

(iii) **파라컴팩트 공간의 모든 F_σ-집합은 파라컴팩트이다.**

(iv) **모든 정칙 Lindelöf 공간은 파라컴팩트이다.**

(v) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $\mathbb{R}^n$은 파라컴팩트이다.

(vi) Sorgenfrey 직선은 파라컴팩트이다.

(vii) $(X, \mathcal{T})$를 $\mathbb{Z}$의 비가산개의 곱공간이라 하자. $(X, \mathcal{T})$는 파라컴팩트가 아님을 증명하시오.

(viii) 위의 (vii)으로부터, $(X, \mathcal{T})$가 무한 이산공간의 비가산개의 곱공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 파라컴팩트가 아님을 유도하시오.

(ix) 위의 (viii)으로부터, $(X, \mathcal{T})$가 $\mathbb{R}$의 비가산개의 곱공간이면, $(X, \mathcal{T})$는 파라컴팩트가 아님을 유도하시오.

(x) 위의 (ix)에서, $\mathbb{R}$ 대신에 임의의 무한 비컴팩트 거리화가능 공간으로 바꾸어도 성립하는가?

(xi) **모든 Hausdorff Lindelöf 공간은 파라컴팩트이다.**

(xii)* **모든 Hausdorff 파라컴팩트 공간은 정칙공간이다.**

(xiii)* 모든 Hausdorff 파라컴팩트 공간은 T_4-공간이다; 즉, Hausdorff 정규공간이다.

(xiv) **위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 파라컴팩트 Hausorff 공간일 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$의 모든 열린덮개 $\mathcal{U}$에 대하여, $\mathcal{U}$에 종속된 단위분할이 존재하는 것이다.**

[힌트: 위의 (xiii)과 연습문제 10.3 #28 (i)을 이용하시오.]

(xv)* **모든 거리화가능 공간은 파라컴팩트이다.**

(xvi) **만약 $(X, \mathcal{T})$가 파라컴팩트 Hausdorff 공간이고 $(Y, \mathcal{T}_1)$가 컴팩트 Hausdorff 공간이면, 곱공간 $(X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T}_1)$은 파라컴팩트 Hausdorff 공간이다.**

(xvii) 만약 $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 파라컴팩트 Hausdorff 공간 $(X, \mathcal{T})$에서 Hausdorff 공간 $(Y, \mathcal{T}_1)$ 위로의 연속인 닫힌 전사함수이면, $(Y, \mathcal{T}_1)$는 파라컴팩트이다.

[힌트: 위의 (xii)를 이용하시오.]

(xviii) **모든 가산컴팩트 파라컴팩트 공간은 컴팩트이다.**

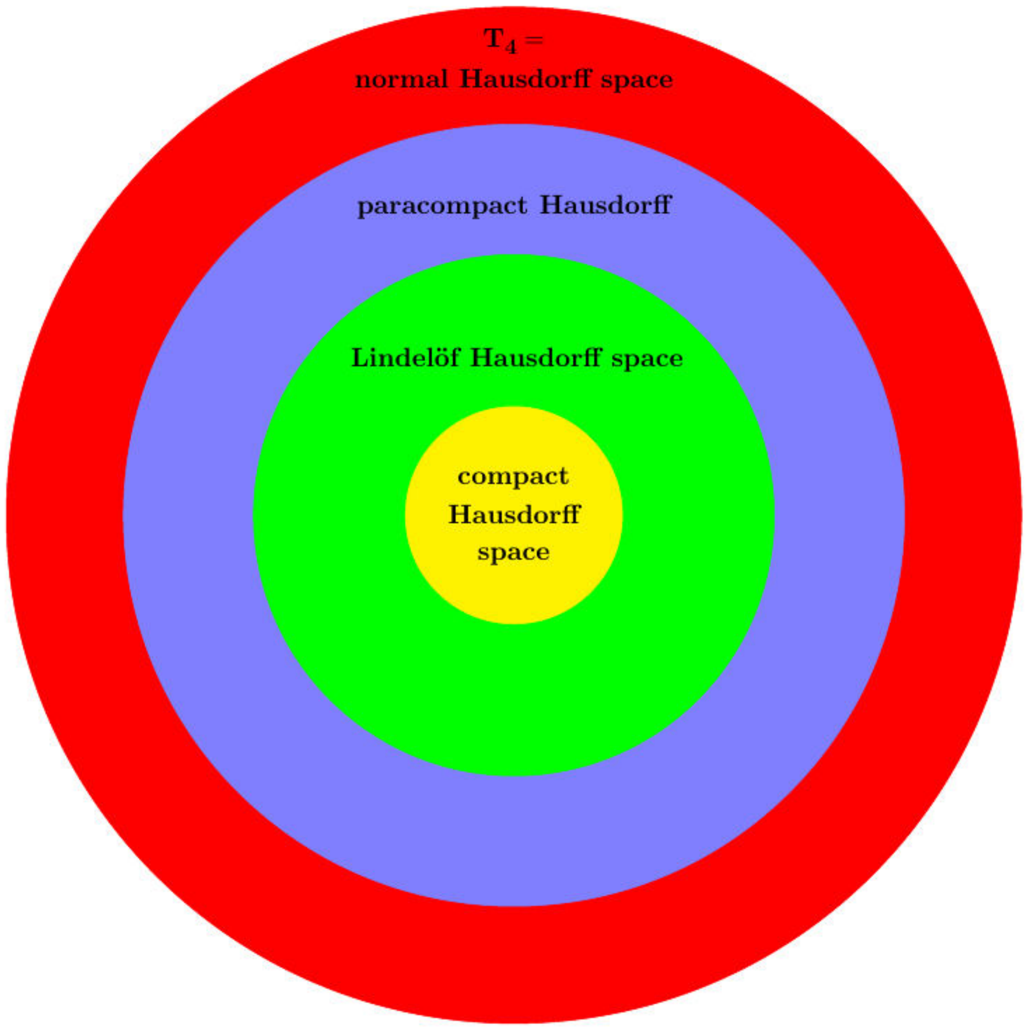
(xix) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 열린덮개 $\{A_i : i \in I\}$에 대하여, $(X, \mathcal{T})$의 열린덮개인 세분 $\{B_j : j \in J\}$가 존재해서, $x \in X$의 각 점이 오직 유한개의 B_j, $j \in J$에 포함되는 성질을 가지면, $(X, \mathcal{T})$를 **메타컴팩트(metacompact)**라고 부른다. **모든 파라컴팩트 공간은 메타컴팩트**임을 증명하고 **메타컴팩트 Hausdorff 공간과 컴팩트 Hausdorff 공간의 곱공간은 메타컴팩트**임을 증명하시오.

---

[6]어떤 저자들은 파라컴팩트 정의에서 Hausdorff 조건을 포함시킨다.

[7]파라컴팩트 공간은 Jean Alexandre Eugène Dieudonné의 문헌에 소개되었고, 모든 Hausdorff 파라컴팩트 공간은 정규공간임을 보였다.

30. 이전의 연습문제를 이용하여, 아래의 그림의 타당성을 증명하시오:



31. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간이라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 **세포질(cellularity)** $c(X)$는 다음과 같이 정의된 기수[8]이다.

$$c(X) = \aleph_0 + \sup\{\text{card}\, \mathcal{U} : \mathcal{U}\text{는}\ (X, \mathcal{T})\text{에서 서로소인 열린집합족이다}\}.$$

$(X, \mathcal{T})$의 **밀도(density)** $d(X)$는 다음과 같이 정의된 기수이다.

$$d(X) = \aleph_0 + \min\{\text{card}\ S : S \subseteq X \text{ 그리고 } S\text{는 } X\text{에서 조밀하다}\}.$$

$(X, \mathcal{T})$의 **스프레드(spread)** $s(X)$는 다음과 같이 정의된 기수이다.

$$s(X) = \aleph_0 + \sup\{\text{card}\,(D) : D\text{는 } X\text{의 이산 부분공간이다}\}.$$

$(X, \mathcal{T})$의 **Lindelöf 차수(degree)** $L(X)$는 다음과 같이 정의된 무한기수 $\aleph$ 중 가장 작은 수이다: X의 모든 열린덮개가 농도가 $\aleph$ 이하인 부분덮개를 갖는다. 물론 $L(X) = \aleph_0$일 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$는 Lindelöf 공간이다.

임의의 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 세포질, 밀도, 스프레드, Lindelöf 차수, 그리고 웨이트(weight) 사이의 분명한 관계를 적고 입증하시오.

---

[8]각각의 위상공간에 관련된 다양한 **기수적 불변량(cardinal invariants)** (**기수 함수(cardinal functions)**)이 존재한다. 우리는 이 연습문제에서 이런 것 중 오직 4개만 소개했다. 보다 자세한 논의에 대해서는, Juhász [175]와 Kunen and Vaughan [193]의 제1장을 보시오.

32. 정의 10.2.1의 반순서집합의 정의를 주목하자.[9] A를 반순서집합 P의 부분집합이라 하자. 만약 각각의 $x \in P$에 대하여, 어떤 $a \in A$가 존재하여 $x \le a$이면, A를 P에서 **같이 끝나는** 또는 **공종(cofinal)** 부분집합이라고 말한다.
만약 각각의 $x \in P$에 대하여, 어떤 $b \in A$가 존재하여 $b \le x$이면, A를 P에서 **같이 시작하는** 또는 **공시(coinitial)** 부분집합이라고 말한다.
반순서집합 P의 모든 부분집합 A에 대하여, A가 최대하계를 가지면, P를 **하완비(lower complete)**라고 부른다.
반순서집합 P의 같이 끝나는 정도 또는 **공종도(cofinality)**는 **cf(P)**로 나타내고, P의 같이 끝나는 부분집합들의 최소농도이다.
P와 Q를 반순서집합이라 하자. P의 모든 같이 끝나는 부분집합을 Q의 하나의 같이 끝나는 집합으로 대응시키는 함수 $f : P \to Q$가 존재하면, 반순서집합 Q가 P에 의하여 **Tukey 지배된다(dominated)**라고 말하고, $Q \le_T P$로 나타낸다. 반순서집합 P와 Q가 $P \le_T Q$ 그리고 $Q \le_T P$를 만족하면, P와 Q는 **Tukey 동치**라 불린다.

만약 $(X, \mathcal{T})$가 위상공간이고, 각각의 $x \in X$에 대하여 $(X, \mathcal{T})$에서 x의 모든 근방들의 집합 N_x는 다음과 같이 정의된 역포함관계에 의한 반순서집합이다; 만약 $N_1, N_2 \in N_x$이면, $N_1 \subseteq N_2$일 때 $N_2 \le N_1$이다. 따라서 N_x는 유향 하완비 반순서집합이다. (반순서집합 P의 모든 $a, b \in P$에 대하여, 어떤 $c \in P$가 존재해서 $a \le c$ 그리고 $b \le c$일 때, P는 **유향(directed)** 반순서집합이라고 불린다.) 점 $x \in X$에 대하여, 반순서집합 N_x가 ω에 의하여 Tukey 지배될 필요충분조건은 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 점 x에서 제1가산이다.
P를 반순서집합, $(X, \mathcal{T})$를 위상공간, 그리고 $x \in X$라 하자. x의 모든 근방들의 반순서집합 N_x가 P에 의하여 Tukey 지배되면, $(X, \mathcal{T})$는 점 $x \in X$에서 **근방 P-기저**를 갖는다고 말한다. N_x가 하완비이기 때문에, 이것이 일어날 필요충분조건은 각각의 $x \in X$에서, 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 근방 기저 $\{U_\alpha[x] : \alpha \in P\}$가 존재해서 모든 $\alpha \le \beta \in P$에 대하여 $U_\beta[x] \subseteq U_\alpha[x]$이다. 만약 $(X, \mathcal{T})$가 각각의 $x \in X$에서 근방 P-기저 $\{U_\alpha : \alpha \in P\}$를 가지면, 이러한 근방 기저는 수행단(entourages) $U_\alpha = \{(x, y) \in X \times X : y \in U_\alpha[x]\}$, $\alpha \in P$의 집합 $\{U_\alpha : \alpha \in P\}$에 의하여 암호화될 수 있다. 그러한 집합족 $\{U_\alpha : \alpha \in P\}$는 **$P$-기저 위상공간**이라고 불린다. 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 각 점에서 근방 P-기저를 가질 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$가 P-기저를 갖는 것이다.
Banakh [23], Banakh and Leiderman [24], Gabriyelyan and Kąkol [117], Leiderman et al. [201], 그리고 Gabriyelyan et al. [118]은 **ω^ω-기저**를 갖는 위상공간, 위상군, 그리고 위상벡터공간을 연구하였다. (ω^ω는 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 그리고 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $f(n) \le g(n)$으로 정의되는 좌표별 반순서(co-ordinatewise partial ordering) $\le$를 갖는 $\boxed{\text{비가산기수}}$ 집합 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$을 의미함을 주목하라. 이것은 가산서수가 아니다.) 어떤 참고문헌에는 이것이 **$\mathfrak{G}$-기저**를 갖는 위상공간으로 알려져 있다.

[9]이 연습문제는 Banakh [23]의 아름다운 원고에 의하여 영감을 받았다. 여기에 있는 대부분의 내용은 Taras Banakh(1968–)의 원고에 있다.

(i) P와 Q를 반순서집합이라 하고 $f: P \to Q$라 하자. Q가 P에 의해서 Tukey 지배될 필요충분조건은 P의 모든 유계 부분집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$가 P에서 유계임을 입증하시오.

(ii) 반순서집합이 ω에 의하여 Tukey 지배될 필요충분조건은 P가 가산 공종도를 갖는 유향 반순서집합임을 입증하시오.

(iii) P와 Q를 반순서집합이라 하자. 만약 Q가 최대원을 가지면, P는 Q에 의하여 Tukey 지배됨을 입증하시오.

(iv) P와 Q를 반순서집합이라 하자. 만약 P와 Q가 모두 최대원을 가지면, P와 Q는 Tukey 동치임을 입증하시오.

(v) 위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 제1가산 공간일 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$가 ω-기저를 가짐을 입증하시오.

(vi) ω-기저를 갖는 모든 위상공간은 ω^ω-기저를 가짐을 입증하시오. 모든 거리화가능 공간은 ω^ω-기저를 가짐을 유도하시오.

10.4 Stone-Čech 컴팩트화

10.4.1 정의. $(X,\mathcal{T})$를 위상공간, $(\beta X,\mathcal{T}')$를 컴팩트 Hausdorff 공간, 그리고 $\beta\colon (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (\beta X,\mathcal{T}')$를 연속함수라 하자. 함수 β를 갖는 $(\beta X,\mathcal{T}')$가 다음을 만족하면, $(\beta X,\mathcal{T}')$를 $(X,\mathcal{T})$의 **Stone-Čech 컴팩트화**라고 부른다: 만약 임의의 컴팩트 Hausdorff 공간 $(Y,\mathcal{T}'')$와 임의의 연속함수 $\phi:(X,\mathcal{T}) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}'')$에 대하여, 유일한 연속함수 $\Phi:(\beta X,\mathcal{T}') \longrightarrow (Y,\mathcal{T}'')$가 존재하여 $\Phi\circ\beta = \phi$가 성립한다; 즉, 아래의 도표가 교환적이다:

$$
\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\phi"'] & (\beta X,\mathcal{T}') \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\
 & (Y,\mathcal{T}'').
\end{tikzcd}
$$

주의 함수 β는 대개 전사가 아니다. 그러므로 $\beta(X)$는 대개 βX와 같지 않다.

10.4.2 주목. 범주론에 익숙한 사람은 Stone-Čech 컴팩트화의 존재성은 컴팩트 Hausdorff 공간과 연속함수의 카테고리로부터 위상공간과 연속함수의 카테고리로의 망각함자(forgetful functor)를 이용한 Freyd의 수반함자(Adjoint Functor) 정리로부터 나온다는 것을 곧바로 알아야 한다. 이것에 대한 논의는 Maclane [209], Freyd [114][10]를 보시오.

Stone-Čech 컴팩트화가 모든 위상공간에 대하여 존재하지만, Tychonoff 공간의 경우에 더 의미가 있다. β가 매몰함수가 되기 위한 필요충분조건은 $(X,\mathcal{T})$가 Tychonoff 공간이다. 이것의 "충분조건"은 분명하다. 왜냐하면 컴팩트 Hausdorff 공간 $(\beta X,\mathcal{T}')$는 Tychonoff 공간이므로 그것의 부분공간도 Tychonoff이다.

이제 우리는 Tychonoff 공간에 대한 Stone-Čech 컴팩트화의 존재성을 증명하고 이 경우에 β가 매몰함수임을 보인다.

[10] Peter Freyd의 책 "Abelian categories: An introduction to the theory of functors"는 http://www.emis.de/journals/TAC/reprints/articles/3/tr3.pdf를 포함해서 다양한 사이트에서 무료로 내려받을 수 있다.

10.4.3 보조정리. $(X, \mathcal{T})$와 $(Y, \mathcal{T}')$을 Tychonoff , 그리고 $\mathcal{F}(X)$와 $\mathcal{F}(Y)$를 각각 X와 Y에서 $[0,1]$로의, 모든 연속함수들의 집합이라 하자. 더욱이 e_X와 e_Y를 각각 X에서 $\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f$, 그리고 Y에서 $\prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g$로의 값매김 함수라 하자. 여기서 각각의 f와 g에 대하여, $I_f \cong I_g \cong [0,1]$이다. 만약 ϕ가 X에서 Y로의 임의의 연속함수이면, $\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f$에서 $\prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g$로의 연속함수 Φ가 존재하여 $\Phi \circ e_X = e_Y \circ \phi$이다; 즉, 아래 도표가 교환적이다.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "e_X"'] & (Y, \mathcal{T}') \arrow[d, "e_Y"] \\
\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & \prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g
\end{tikzcd}$$

더욱이, $\Phi(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$이다.

증명. $\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} x_f \in \prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f$라 하자. $\Phi\left(\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} x_f\right) = \prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} y_g$라 정의하자. 여기서, y_g는 다음과 같이 정의된다: $g \in \mathcal{F}(Y)$이기 때문에, g는 $(Y, \mathcal{T}')$에서 $[0,1]$로의 연속함수이다. 따라서 $g \circ \phi$는 $(X, \mathcal{T})$에서 $[0,1]$로의 연속함수이다. 그러므로 어떤 $f \in \mathcal{F}(X)$에 대하여, $g \circ \phi = f$이다. 그 다음, 이 f에 대하여 $y_g = x_f$라 놓자. 이제 Φ가 정의되었다.

Φ의 연속성을 증명하기 위하여, $U = \prod_{g \in \mathcal{F}(Z)} U_g$를 $\Phi(\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} x_f) = \prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} y_g$를 포함하는 기저 열린집합이라 하자. 그러면 모든 $g \in \mathcal{F}(Y) \setminus \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}\}$에 대하여, $U_g = I_g$이다. $g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}$에 대하여, $f_{i_1} = g_{i_1} \circ \phi$, $f_{i_2} = g_{i_2} \circ, \ldots, f_{i_n} = g_{i_n} \circ \phi$라 놓자. $V = \prod_{f \in \mathcal{F}(X)} V_f$라 정의하자. 여기서, 어떤 $f \in \mathcal{F}(X) \setminus \{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$에 대하여, $V_f = I_f$이고 $V_{f_{i_1}} = U_{g_{i_1}}, V_{f_{1_2}} = U_{g_{i_2}}, \ldots, V_{f_{i_n}} = U_{g_{i_n}}$이다. 분명히 $\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} x_f \in V$ 그리고 $\Phi(V) \subseteq U$이다. 그러므로 Φ는 연속이다.

도표가 교환적임을 보이기 위하여, 모든 $x \in X$에 대하여,

$$\Phi(e_X(x)) = \Phi\Big(\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} f(x) \Big) = \prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} g(\phi(x))$$

임을 관찰하자. 그러므로 $\Phi \circ e_X = e_Y \circ \phi$이다.

마지막으로 Φ가 연속이므로, 우리가 원했던 $\Phi(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$가 성립한다. □

10.4.4 보조정리. Φ_1과 Φ_2를 위상공간 $(X, \mathcal{T})$에서 Hausdorff 공간 $(Y, \mathcal{T}')$로의 연속함수라 하자. 만약 Z가 $(X, \mathcal{T})$의 조밀한 부분집합이고, $z \in Z$에 대하여 $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$이면, X 위에서 $\Phi_1 = \Phi_2$이다.

증명. 어떤 $x \in X$에 대하여, $\Phi_1(x) \neq \Phi_2(x)$라고 가정하자. 그러면 $(Y, \mathcal{T}')$가 Hausdorff 공간이기 때문에, 어떤 열린집합 $U \ni \Phi_1(x)$와 $V \ni \Phi_2(x)$가 존재하여, $U \cap V = \emptyset$이다. 그러므로 $\Phi_1^{-1}(U) \cap \Phi_2^{-1}(V)$는 x를 포함하는 열린집합이다.

Z가 $(X, \mathcal{T})$에서 조밀하기 때문에, 어떤 $z \in Z$가 존재하여 $z \in \Phi_1^{-1}(U) \cap \Phi_2^{-1}(V)$이다. 그러므로 $\Phi_1(z) \in U$ 그리고 $\Phi_2(z) \in V$이다. 그러나 $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$이다. 따라서 $U \cap V \neq \emptyset$이고, 이것은 모순이다.

따라서 모든 $x \in X$에 대하여, $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$이다. $\square$

10.4.5 명제. $(X, \mathcal{T})$를 임의의 Tychonoff 공간, $\mathcal{F}(X)$를 $(X, \mathcal{T})$에서 $[0,1]$로의 연속함수들의 집합족, 그리고 e_X를 $(X, \mathcal{T})$에서 $\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f$로의 값매김 함수라 하자. 여기서, 각각의 $I_f \cong [0,1]$이다. $(\beta X, \mathcal{T}')$를 부분위상을 갖는 $\overline{e_X(X)}$와 같다고 놓고 $\beta : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\beta X, \mathcal{T}')$를 함수 e_X와 같다고 놓자. 그러면 함수 β를 갖는 $(\beta X, \mathcal{T}')$는 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화이다.

증명. 먼저 $(\beta X, \mathcal{T}')$가 사실상 컴팩트 Hausdorff 공간임을 관찰하자. 왜냐하면 그것은 컴팩트 Hausdorff 공간의 닫힌 부분공간이기 때문이다. ϕ를 $(X, \mathcal{T})$에서 컴팩트 Hausdorff 공간 $(Y, \mathcal{T}'')$로의 임의의 연속함수라 하자. 정의 10.4.1에 있는 도표처럼 교환적 성질을 만족하는 함수 Φ를 찾을 필요가 있고 ϕ가 유일함을 보이자.

$\mathcal{F}(Y)$를 $(Y, \mathcal{T}'')$에서 $[0,1]$로의 연속함수들의 집합족이라 하고, e_Y를 $(Y, \mathcal{T}'')$에서 $\prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g$로의 값매김 함수라 하자. 여기서, 각각의 $I_g \cong [0,1]$이다.

보조정리 10.4.3에 의하여, 어떤 연속함수 $\Gamma : \prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f \longrightarrow \prod_{g \in \mathcal{F}(Y)} I_g$가 존재하여, $e_Y \circ \phi = \Gamma \circ e_X$, 그리고 $\Gamma(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$이다; 즉, $\Gamma(\beta X) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$이다.

$(Y, \mathcal{T}'')$가 컴팩트 Hausdorff 공간이고 e_Y가 단사함수이기 때문에, 우리는 $\overline{e_Y(Y)} = e_Y(Y)$ 그리고 $e_Y : (Y, \mathcal{T}'') \longrightarrow (e_Y(Y), \mathcal{T}''')$ 는 위상동형함수임을 안다. 여기서, $\mathcal{T}'''$은 $e_Y(Y)$ 위의 부분위상이다. 그러므로 $e_Y^{-1} : (e_Y(Y), \mathcal{T}''') \longrightarrow (Y, \mathcal{T}'')$는 위상동형함수이다.

$\Phi = e_Y^{-1} \circ \Gamma$라 놓으면, Φ는 $(\beta X, \mathcal{T}')$에서 $(Y, \mathcal{T}'')$로의 연속함수이다. 더욱이, 임의의 $x \in X$에 대하여,

$$
\begin{aligned}
\Phi(\beta(x)) &= \Phi(e_X(x)) \\
&= e_Y^{-1}(\Gamma(e_X(x))) \\
&= e_Y^{-1}(e_Y(\phi(x))), \qquad e_Y \circ \phi = \Gamma \circ e_X \text{이므로} \\
&= \phi(x).
\end{aligned}
$$

그러므로 우리가 원했던 $\Phi \circ \beta = \phi$을 얻는다.

이제 $(\beta X, \mathcal{T}')$에서 $(Y, \mathcal{T}'')$로의 두 개의 연속함수 Φ_1과 Φ_2가 존재해서 $\Phi_1 \circ \beta = \phi$ 그리고 $\Phi_2 \circ \beta = \phi$를 만족한다고 가정하자. 그러면 $(\beta X, \mathcal{T}')$의 조밀한 부분집합 $\beta(X)$ 위에서 $\Phi_1 = \Phi_2$이다. 그러므로 보조정리 10.4.4에 의하여, $\Phi_1 = \Phi_2$이다. 따라서 함수 Φ는 유일하다. □

10.4.6 주목. 정의 10.4.1에서 언급한 $\boxed{\text{바로 그}}$ Stone-Čech 컴팩트화(Stone-Čech Compactification)는 각각의 $(X, \mathcal{T})$에 대하여, 유일한 $(\beta X, \mathcal{T}')$가 존재함을 의미한다. 다음 명제는 정확하게 어떤 의미에서 이것이 사실인지를 나타낸다. 그러나 먼저 보조정리가 필요하다.

10.4.7 보조정리. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 $(Z, \mathcal{T}_1)$을 함수 $\beta\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z, \mathcal{T}_1)$를 갖는 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화라 하자. 그러면 $\beta(X)$는 $(Z, \mathcal{T}_1)$에서 조밀하다.

증명. $\beta(X)$가 $(Z, \mathcal{T}_1)$에서 조밀하지 않다고 가정하자. 그러면 원소 $z_0 \in Z \setminus \overline{\beta(X)}$가 존재한다. $(Z, \mathcal{T}_1)$가 컴팩트 Hausdorff 공간이므로, 주목 10.3.28에 의하여, $(Z, \mathcal{T}_1)$는 Tychonoff 공간이다.

$Z \setminus \overline{\beta(X)}$가 z를 포함하는 열린집합임을 관찰하여, 연속함수 $\Phi_1\colon (Z, \mathcal{T}_1) \longrightarrow [0, 1]$가 존재해서 $\Phi_1(z_0) = 1$ 그리고 $\Phi_1(\overline{\beta(X)}) = \{0\}$임을 유도하자. 또한 연속함수 $\Phi_2\colon (Z, \mathcal{T}_1) \longrightarrow [0, \frac{1}{2}]$가 존재하여 $\Phi_2(z_0) = \frac{1}{2}$ 그리고 $\Phi_2(\overline{\beta(X)}) = \{0\}$이다. 그러므로 다음의 교환적인 도표를 얻는다.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\phi"'] & (Z,\mathcal{T}_1) \arrow[d, dashed, "\Phi_1"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[ddr, "\phi"'] & (Z,\mathcal{T}_1) \arrow[d, dashed, "\Phi_2"] \arrow[dd, dashed, bend left, "\Phi_3"] \\
& {[0,\frac{1}{2}]} \arrow[d, dashed, "e"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

여기서, 모든 $x \in X$에 대하여 $\phi(x) = 0$이고, Φ_3은 $\Phi_3 = e \circ \Phi_2$에 의하여 정의된다. 여기서, e는 $[0, \frac{1}{2}]$에서 $[0, 1]$로의 자연적 매몰함수이다. 정의 10.4.1에 있는 함수 Φ의 유일성에 의하여 $\Phi_1 = \Phi_3$임을 안다. 이것은 분명히 거짓이다. 왜냐하면 $\Phi_1(z_0) = 1$이고 $\Phi_3(z_0) = \frac{1}{2}$이기 때문이다. 그러므로 우리의 가정은 거짓이다. 따라서 $\beta(X)$는 $(Z, \mathcal{T}_1)$에서 조밀하다. $\square$

10.4.8 명제. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 $(Z_1, \mathcal{T}_1)$을 함수 $\beta_1 \colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z_1, \mathcal{T}_1)$을 갖는 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화라 하자. 만약 $(Z_2, \mathcal{T}_2)$가 또한 함수 $\beta_2 \colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z_2, \mathcal{T}_2)$를 갖는 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화라면, $(Z_1, \mathcal{T}_1) \cong (Z_2, \mathcal{T}_2)$이다. 사실상, 어떤 위상동형함수 $\Theta \colon (Z_1, \mathcal{T}_1) \to (Z_2, \mathcal{T}_2)$가 존재하여 $\Theta \circ \beta_1 = \beta_2$이다.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}) \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & (Z_1, \mathcal{T}_1) \arrow[d, dashed, "\Theta"] \\
 & (Z_2, \mathcal{T}_2)
\end{tikzcd}$$

증명. β_1을 갖는 $(Z_1, \mathcal{T}_1)$이 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화이고 β_2는 $(X, \mathcal{T})$에서 컴팩트 Hausdorff 공간 $(Z_2, \mathcal{T}_2)$로의 연속함수이기 때문에, 어떤 연속함수 $\Theta \colon (Z_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Z_2, \mathcal{T}_2)$가 존재하여, $\Theta \circ \beta_1 = \beta_2$이다.

비슷하게 연속함수 $\Theta_1 \colon (Z_2, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (Z_1, \mathcal{T}_1)$가 존재하여 $\Theta_1 \circ \beta_2 = \beta_1$이다. 그러므로 각각의 $x \in X$에 대하여, $\Theta_1(\Theta(\beta_1(x))) = \Theta_1(\beta_2(X)) = \beta_1(x)$이다; 즉, 만약 id_{Z_1}이 $(Z_1, \mathcal{T}_1)$ 위의 항등함수이면, $\beta_1(X)$ 위에서 $\Theta_1 \circ \Theta = \mathrm{id}_{Z_1}$이다. $\beta_1(X)$는, 보조정리 10.4.7에 의하여 $(Z_1, \mathcal{T}_1)$에서 조밀하다. 그러므로, 보조정리 10.4.4에 의하여 Z_1 위에서 $\Theta_1 \circ \Theta = \mathrm{id}_{Z_1}$이다.

비슷하게 Z_2 위에서 $\Theta \circ \Theta_1 = \mathrm{id}_{Z_2}$이다. 따라서 $\Theta = \Theta_1^{-1}$이고, 둘 다 연속이므로 Θ가 위상동형함수임을 의미한다. □

10.4.9 주목. 만약 **$(X, \mathcal{T})$가 임의의 Tychonoff 공간**이고 $(\beta X, \mathcal{T}')$은 함수 $\beta \colon (X, \mathcal{T}) \to (\beta X, \mathcal{T}')$를 갖는 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화이면, 명제 10.4.5의 증명은 β가 매몰함수임을 보여주고 있음을 주목하자. 사실상, 이 경우에 **X와 βX를 동일시 하고, $(X, \mathcal{T})$를 $(\beta X, \mathcal{T}')$의 부분공간으로 간주하는 것은 자연스러운 것이다.** 그러면 우리는 매몰함수 β을 언급하지 않고, $(\beta X, \mathcal{T}')$를 Stone-Čech 컴팩트화로 말하지 않는다.

10.4.10 주목. $(X,\mathcal{T})$가 컴팩트 Hausdorff 공간이면, $(X,\mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화는 $(X,\mathcal{T})$ 자신이다. 분명히 $(X,\mathcal{T})$에서 자신으로의 항등함수를 갖는 $(X,\mathcal{T})$는 Stone-Čech 컴팩트화에 필요한 성질을 갖는다. 유일성에 의하여, $(X,\mathcal{T})$는 Stone-Čech 컴팩트화이다. 이것은 아마 명제 10.4.5의 증명에서도 볼수 있다. 여기서 우리는 컴팩트 Hausdorff 공간 $(Y,\mathcal{T}'')$에 대하여 함수 $e_Y\colon (Y,\mathcal{T}'') \longrightarrow (e_Y(Y),\mathcal{T}''')$는 위상동형임을 보았다.

10.4.11 주목. 좋은 위상공간의 Stone-Čech 컴팩트화조차도 대개 복잡하다. 예를 들어, $[0,1]$은 $(0,1]$의 Stone-Čech 컴팩트화가 아니다. 왜냐하면 $\phi(x) = \sin(\frac{1}{x})$에 의하여 주어진 연속함수 $\phi\colon (0,1] \longrightarrow [-1,1]$는 연속함수 $\Phi\colon [0,1] \longrightarrow [-1,1]$로 확장되지 않는다. 실제로 $(0,1]$의 Stone-Čech 컴팩트화는 거리화가능이 아님을 보일 수 있다. 우리는 $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $(0,1]$, 그리고 $\mathbb{N}$의 Stone-Čech 컴팩트화는 각각 농도 2^c를 가짐을 보이고 이 장을 마무리한다. □

다음 명제는 명제 10.4.5의 Stone-Čech 컴팩트화의 구성으로부터 바로 나온다.

10.4.12 명제. $(X,\mathcal{T})$를 위상공간, $(K,\mathcal{T}_1)$을 컴팩트 Hausdorff 공간, 그리고 $\theta : (X,\mathcal{T}) \to (K,\mathcal{T}_1)$을 연속함수라 하자. 만약 모든 연속함수 $\phi : (X,\mathcal{T}) \to [0,1]$에 대하여 유일한 연속함수 $\Phi : (K,\mathcal{T}_i) \to [0,1]$가 존재하여 $\theta \circ \Phi = \phi$이면, $(K,\mathcal{T}_1)$은 $(X,\mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화이다.

증명. 연습문제. □

10.4.13 명제. $\mathbb{N}$을 $\mathbb{R}$의 이산 부분공간이라 하고 $\beta\mathbb{R}$를 $\mathbb{R}$의 Stone-Čech 컴팩트화라 하자. 만약 $\beta\mathbb{R}$에서 $\mathbb{N}$의 폐포를 $\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N}$으로 나타내면, $\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N}$은 $\mathbb{N}$의 the Stone-Čech 컴팩트화인 $\beta\mathbb{N}$과 같다.

증명. θ를 $\mathbb{N}$에서 $[0,1]$로의 임의의 연속함수라 하자. Tietze의 확장정리 10.3.51에 의하여, θ의 연속 확장함수 $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$가 존재한다. 그러므로 ϕ의 연속 확장함수$\Phi : \beta\mathbb{R} \to [0,1]$가 존재한다. 따라서 Φ의 $\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N}$ 위의 제한함수인 $\Phi|\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{N})$는 $\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N}$을 $[0,1]$로 사상한다. 그리고 이 함수가 θ의 연속 확장함수이다. $\mathbb{N}$이 $\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N}$에서 조밀하기 때문에, 이것은 유일한 연속 확장함수이다. 따라서 명제 10.4.12에 의하여, $\text{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N}$는 $\beta\mathbb{N}$과 같다. □

10.4.14 주목. 명제 10.4.13에서 증명했던 것처럼 $\text{cl}_{\beta\mathbb{Q}}\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}$임을 증명할 수 있다. □

10.4.15 명제. $(X, \mathcal{T})$를 임의의 가분인 위상공간이라 하자. 그러면 card $\beta X \leq$ card $\beta\mathbb{N}$이다.

증명. $(X, \mathcal{T})$가 가분이므로, $(X, \mathcal{T})$는 가산인 조밀한 부분집합 $(Y, \mathcal{T}_1)$을 갖는다. 따라서 연속인 전사함수 $\gamma : \mathbb{N} \to (Y, \mathcal{T}_1)$가 존재한다. 그러므로 연속함수 $\Phi : \beta N \to \beta X$가 존재하여 βX에서 조밀한 상(image)을 갖는다. 그러나 상이 컴팩트이고 βX는 Hausdorff이기 때문에, $\Phi(\beta\mathbb{N}) = \beta X$이다. 이것으로부터 명제가 바로 얻어진다. □

10.4.16 명제. card $\beta\mathbb{N}$ = card $\beta\mathbb{Q}$ = card $\beta\mathbb{R}$.

증명. 이것은 명제 10.4.15와 10.4.13 그리고 주목 10.4.14로부터 바로 얻어진다. □

10.4.17 명제. card $\beta\mathbb{N}$ = card $\beta\mathbb{Q}$ = card $\beta\mathbb{R} = 2^c$.

증명. Hewitt-Marczewski-Pondiczery 정리 10.3.41의 따름정리 10.3.42에 의하여, 컴팩트 Hausdorff 공간 $[0,1]^{\mathfrak{c}}$는 가분이다. 따라서 명제 10.4.15에 의하여, card $[0,1]^{\mathfrak{c}} \leq$ card $\beta\mathbb{N}$이다; 즉, $2^c \leq$ card $\beta\mathbb{N}$이다.

명제 10.4.5의 구성에 의하여, $\beta\mathbb{N}$는 $[0,1]^I$의 부분공간이다. 여기서 I는 $\mathbb{N}$에서 $[0,1]$로의 (연속)함수의 집합이다. 따라서 card $I = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$이다. 그러면 card $([0,1]^I) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$이다. 그러므로 card $\beta\mathbb{N} \leq 2^{\mathfrak{c}}$이다. 따라서 card $\beta\mathbb{N} = 2^{\mathfrak{c}}$이다. 그러면 이 명제는 명제 10.4.16으로부터 나온다. □

10.4.18 명제. 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, X를 $\mathbb{R}^n$의 유계가 아닌 임의의 부분집합이라 하자. 만약 $\mathcal{T}$가 X 위의 유클리드 부분위상이면, $(X,\mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화 βX는 $\beta\mathbb{N}$에 위상동형인 하나의 부분공간을 갖는다. 따라서 card $(\beta X) = 2^c$이다.

증명. 연습문제. □

10.4.19 따름정리. 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $(X,\mathcal{T})$를 $\mathbb{R}^n$의 닫힌 부분공간이라 하자. 그러면 $(X,\mathcal{T})$가 컴팩트일 필요충분조건은 card $(\beta X) \neq 2^c$이다.

증명. 연습문제. □

10.4.20 따름정리. $(X,\mathcal{T})$가 농도가 m인 무한 비이산공간이라 하면, card $(\beta X) = 2^{2^m}$이다.

증명. 연습문제.

연습문제 10.4

1. $(X, \mathcal{T})$를 Tychonoff 공간 그리고 $(\beta X, \mathcal{T}')$를 $(X, \mathcal{T})$ 의 Stone-Čech 컴팩트화라 하자. $(X, \mathcal{T})$가 연결일 필요충분조건은 $(\beta X, \mathcal{T}')$가 연결임을 증명하시오.

   [힌트: 먼저 $(X, \mathcal{T})$가 적어도 2개의 점을 가지면, $(X, \mathcal{T})$가 연결일 필요충분조건은 $(X, \mathcal{T})$에서 이산공간 $\{0, 1\}$위로의 연속함수가 존재하지 않음을 입증하시오.]

2. $(X, \mathcal{T})$를 Tychonoff 공간 그리고 $(\beta X, \mathcal{T}')$를 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화라고 하자. 만약 $(A, \mathcal{T}_1)$가 $(\beta X, \mathcal{T}')$의 부분공간이고 $A \supseteq X$이면, $(\beta X, \mathcal{T}')$는 또한 $(A, \mathcal{T}_1)$의 Stone-Čech 컴팩트화임을 증명하시오.

   [힌트: $(X, \mathcal{T})$에서 $[0, 1]$로의 모든 연속함수는 $(A, \mathcal{T}_1)$에서 $[0, 1]$로의 연속함수로 확장시킬 수 있음을 입증하시오. 그 다음 $(\beta X, \mathcal{T}')$의 구성을 이용하시오.]

3. $(X, \mathcal{T})$를 컴팩트 Hausdorff 공간 $(Z, \mathcal{T}_1)$의 조밀한 부분공간이라 하자. 만약 $(X, \mathcal{T})$에서 $[0, 1]$로의 모든 연속함수가 $(Z, \mathcal{T}_1)$에서 $[0, 1]$로의 연속함수로 확장될 수 있으면, $(Z, \mathcal{T}_1)$은 $(X, \mathcal{T})$의 Stone-Čech 컴팩트화임을 증명하시오.

4. card $\beta(0, 1) =$ card $\beta(0, 1] =$ card $\beta\mathbb{P} = 2^{\mathfrak{c}}$임을 증명하시오. 여기서 $\mathbb{P}$는 유클리드 위상을 갖는 무리수의 위상공간이다.

5. 명제 10.4.18과 따름정리 10.4.19를 증명하시오.

6. X가 무한차원 노름(normed) 벡터공간에서 유계가 아닌 집합이면, card $(\beta X) \geq 2^c$인가?

7. 명제 10.4.17의 증명에 있는 비슷한 방법을 이용하여, 따름정리 10.4.20을 증명하시오.

10.5 후기

마침내 우리는 위상공간의 임의개의 곱을 정의했고 일반적인 Tychonoff 정리를 증명했다. (Tychonoff 정리의 필터 개념을 이용한 더 우아한 다른 증명은 부록 6에 있다.) 우리는 또한 매립 보조정리를 일반적인 경우로 확장했다. 이것은 Tychonoff 공간은 입방체 (즉, $[0,1]$의 곱공간)의 한 부분공간과 위상동형인 공간으로 특성화하는데 사용되었다).

Urysohn의 보조정리에 의하여 아래의 분리성질 사이의 관계를 얻는다:

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

더욱이, 컴팩트 Hausdorff 공간과 거리화가능 공간은 각각 T_4-공간이다.

우리는 또한 진지한 거리화 정리를 보았다 – 즉 Urysohn의 거리화 정리, 이것은 모든 정칙 제2가산 Hausdorff 공간은 거리화가능이라는 것을 말한다.

우리는 Stone-Čech 컴팩트화를 소개했는데, 그 자체가 다양하고 진지한 연구 주제이다. (Gillman and Jerison [126]; Hindman and Strauss [146]; Walker [325]를 보시오.) Stone-Čech 컴팩트화가 방대하다는 것을 보이기 위하여, 우리는 다른 중요한 결과를 증명했다. 이 중의 하나가 Hewitt-Marczewski-Pondiczery 정리 10.3.41인데, 특히 이 정리는 $\mathbb{R}$의 $\mathfrak{c}$개의 곱공간은 가분이라는 놀라운 사실을 증명했다. 일련의 단계를 거쳐 우리는 Tietze 확장정리 10.3.51을 증명했고, 이것을 대부분의 책에서 흔히 사용된 것보다 좀 더 일반적인 형태로 서술했다. 이러한 결과의 도움으로, 명제 10.4.18에서 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 X가 $\mathbb{R}^n$의 유계가 아닌 임의의 부분집합이면, card $(\beta X) = 2^{\mathfrak{c}}$임을 증명할 수 있었다. 특히, card $\beta\mathbb{N}$ = card $\beta\mathbb{Q}$ = card $\beta\mathbb{R}$ = card $\beta\mathbb{P} = 2^c$임을 증명했다.

부록 1: 무한집합

A1.0 소개

옛날 어느 먼 나라에 두 호텔이 있었는데, 하나는 유한호텔 (유한개의 객실을 가지고 있는 보통 호텔)이고 다른 하나는 힐버트의 무한호텔 (객실 번호가 $1, 2, \ldots n, \ldots$ 인 무한개의 객실을 가지고 있는 기이한 호텔)이다. 어느 날 객실을 찾는 한 방문자가 마을에 도착했다. 그녀는 처음에 유한호텔에 갔지만 모든 객실이 사용중이어서 숙박을 할 수 없었다. 그러나 그녀는 다른 호텔인 힐버트의 무한호텔은 항상 빈 객실이 있다는 말을 듣고 힐버트의 무한호텔로 갔다. 그리고 모든 객실이 사용중이라는 것을 들었다. 하지만, 접수 담당자는 이 호텔은 누구도 쫓아내지 않고도 추가 손님이 숙박할 수 있다고 말했다. 그는 객실 1의 손님을 객실 2로 옮기고, 객실 2의 손님을 객실 3으로 옮겼다. 이와 같은 방법으로 모든 손님들을 다음 객실로 옮기게 하였다. 그 후 객실 1은 비어있게 되었다!

이 매력적인 예로부터 우리는 무한집합과 유한집합 사이에 본질적인 차이가 있다는 것을 안다. 이 부록의 목적은 무한집합의 이론[11] 에 대한 소개를 친절하지만 매우 간략하게 제공하는 것이다. 이것은 대단히 흥미로운 주제로, 여러분이 이전에 공부하지 않았다면, 몇 개의 놀랄만한 것도 포함할 것이다. 우리는 "무한집합들이 같게 만들어지지 않았다"는 것을 배울 것이다 - 어떤 것들은 다른 것들 보다 더 크다. 처음에는 이 명제가 도대체 무엇을 의미하는지 전혀 명확하지 않을 것이다. 우리는 "더 크다"는 용어를 정의할 필요가 있다. 실제로 우리는 "두 집합이 같은 크기(size)를 갖는다"는 것을 정의할 필요가 있다.

[11]무료로 다운로드 받을 수 있는 집합론에 관한 책이 있는데 친절하게 쓰여진 꽤 좋은 책이다. Raymond L. Wilder 에 의해 쓰여진 "Introduction to the Foundations of Mathematics"라는 책으로
http://archive.org/details/IntroductionToTheFoundationsOfMathematics
에서 얻을 수 있다.

여러분이 봐야 할 세 개의 비디오들이 있는데, 그것들은 이 부록에 대한 보충 자료를 제공한다. 이 비디오들은
"Topology Without Tears – Video 2a, 2b, and 2c – Infinite Set Theory"
로 불린다.
Part (a)는 YouTube의 http://youtu.be/9h83ZJeiecg와 중국 Youku 사이트의 http://tinyurl.com/m4dlzhh에 있다.
Part (b)는 YouTube의 http://youtu.be/QPSRB4Fhzko와 중국 Youku 사이트의 http://tinyurl.com/kf9lp8e에 있다.
Part (c)는 YouTube의 http://youtu.be/YvqUnjjQ3TQ와 중국 Youku 사이트의 http://tinyurl.com/mhlqe93에 있다.
이 비디오들은 집합론의 Zermelo-Fraenkel (ZF) 공리에 관한 논의를 포함하고 러셀의 역리가 ZF 집합론에서는 일어날 수 없다는 것을 보여주는 짧은 증명을 포함한다.

A1.1 가산집합

A1.1.1 정의. A와 B가 집합이라 하자. 단사이고 전사인 함수 $f : A \to B$가 존재할 때 (즉, f는 **전단사(bijection)** 또는 **일대일대응(one-to-one correspondence)**), A가 B와 **대등하다(equipotent)**고 말하고 $A \sim B$으로 나타낸다.

A1.1.2 명제. A, B, C가 집합이라 하자. 그러면

(i) $A \sim A$.

(ii) $A \sim B$이면, $B \sim A$이다.

(iii) $A \sim B$이고 $B \sim C$이면, $A \sim C$이다.

증명의 개요.

(i) 모든 $x \in A$에 대하여 $f(x) = x$로 주어진 A 위의 항등함수 f는 A와 자기자신 사이에서의 일대일대응이다.

(ii) f가 A로부터 B로의 전단사이면, B로부터 A로의 역함수 g가 존재하고, g 역시 일대일대응이다.

(iii) $f\colon A \to B$가 일대일대응이고 $g\colon B \to C$가 일대일대응이면, 그것의 합성 $gf\colon A \to C$ 역시 일대일대응이다. □

명제 A1.1.2는 관계 "$\sim$"가 (i) 반사적, (ii) 대칭적, 그리고 (iii) 추이적임을 의미한다; 즉, "$\sim$"는 **동치관계(equivalence relation)**이다.

A1.1.3 명제. $n, m \in \mathbb{N}$이라 하자. 그러면 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$과 $\{1, 2, \ldots, m\}$이 대등할 필요충분조건은 $n = m$이다.

증명. 연습문제. □

이제 우리는 용어 "유한집합"과 "무한집합"을 명확하게 정의한다.

A1.1.4 정의. S가 집합이라 하자.

(i) S가 공집합 $\emptyset$ 또는 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$과 대등할 때, S를 **유한(finite)** 이라고 말한다.

(ii) S가 유한이 아닐 때, **무한(infinite)**이라고 말한다.

(iii) $S \sim \{1, 2, \ldots, n\}$일 때, S가 **기수(cardinality)** n을 갖는다고 말하고, card $\boldsymbol{S = n}$과 같이 표기한다.

(iv) $S = \emptyset$일 때, 그 기수를 0이라고 말하고, card $\boldsymbol{\emptyset = 0}$와 같이 표기한다.

다음 단계는 "가장 작은" 종류의 무한집합을 정의하는 것이다. 그러한 집합들을 가산무한이라고 말한다. 이 단계에서 "더 큰" 종류의 무한집합이 존재하는지는 모른다 – 사실, 우리는 이 문맥에서 "더 큰"이 무엇을 의미하는지 아직 모른다.

A1.1.5 정의. S가 집합이라 하자.

(i) 집합 S가 $\mathbb{N}$과 대등할 때, S를 **가산무한(countably infinite)** (또는 **가부번(denumerable)**)이라고 말한다.

(ii) 집합 S가 유한이거나 가산무한일 때, S를 **가산(countable)**이라고 말한다.

(iii) 집합 S가 가산무한일 때, S는 **기수 $\aleph_0$**를 갖는다고 말하고 card $\boldsymbol{S = \aleph_0}$와 같이 표기한다.

(iv) 집합 S가 가산이 아닐 때, S를 **비가산(uncountable)**이라고 말한다.

A1.1.6 주목. 집합 S가 가산무한이면, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$으로 쓸 수 있다. 여기서, $f : \mathbb{N} \to S$는 일대일대응이고 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $s_n = f(n)$이다. 그래서 우리는 S의 원소들을 $\boxed{\text{나열}}$할 수 있다. 물론 S가 유한이고 공집합이 아니면, 그 원소들을 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$와 같이 나열할 수 있다. 따라서 우리는 임의의 가산집합의 원소들을 나열할 수 있다. 역으로, **S의 원소들을 나열할 수 있다면, S는 가산이다**. 왜냐하면, $\mathbb{N}$ 또는 $\{1, 2, \ldots, n\}$과 일대일대응을 정의할 수 있기 때문이다. $\square$

A1.1.7 보기. 짝수이고 양수인 모든 정수들의 집합 S는 가산무한이다.

증명. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(n) = 2\,n$으로 주어진 함수 $f : \mathbb{N} \to S$는 일대일대응이다. □

보기 A1.1.7은 주목할 만한 가치가 있다. 우리는 두 집합이 "같은 크기"를 갖는다면 그것들을 일대일대응이라고 생각한다. 그러나 여기서 집합 $\mathbb{N}$은 그것의 $\boxed{\text{진부분집합}}$ 중의 하나와 일대일대응이다. 이것은 유한집합에서는 나타나지 않는다. 실제로 유한집합은 그것의 진부분집합의 어느 것과도 대등하지 않는 집합들로 특성화될 수 있다.

A1.1.8 보기. 모든 정수들의 집합 $\mathbb{Z}$는 가산무한이다.

증명. 다음과 같이 주어진 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ 는 일대일대응이다:

$$f(n) = \begin{cases} m, & n = 2m,\ m \geq 1 \\ -m, & n = 2m+1,\ m \geq 1 \\ 0, & n = 1. \end{cases}$$

□

A1.1.9 보기. 완전제곱수인 모든 양의 정수들의 집합 S는 가산무한이다.

증명. $f(n) = n^2$으로 주어진 함수 $f : \mathbb{N} \to S$는 일대일대응이다. □

보기 A1.1.9는 약 1600년 경에 G. Galileo에 의해 증명되었다. 이것은 그를 괴롭혔고, 그는 무한이 인간의 영역이 아니라고 생각하였다.

A1.1.10 명제. 집합 S가 가산집합과 대등하면, S는 가산이다.

증명. 연습문제. □

A1.1.11 명제. S가 가산집합이고 $T \subset S$이면, T는 가산이다.

증명. S가 가산이기 때문에 리스트(list) $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$와 같이 쓸 수 있다. (S가 유한이면 유한리스트이고, S가 무한이면 무한리스트이다.)

t_1을 T의 첫 번째 원소 s_i라 하고 ($T \neq \varnothing$이라면), t_2를 T의 두 번째 원소 s_i라 하고 ($T \neq \{t_1\}$이라면), t_3를 T의 세 번째 원소 s_i라 하자 ($T \neq \{t_1, t_2\}$이라면), $\ldots$.

T가 유한일 때, 이 과정은 어떤 n에 대하여 $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$일 때에만 끝날 것이다. 이 과정이 끝나지 않는다면 T의 원소들로 이루어진 리스트 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$을 얻는다. 이 리스트는 T의 모든 원소들을 포함한다. 왜냐하면, $s_i \in T$이면 s_i는 늦어도 그 과정의 i 번째 단계에서 나타난다; 그래서 s_i는 이 리스트에 속한다. 따라서 T는 가산무한이다. 그러므로 T는 유한이거나 가산무한이다. $\square$

명제 A1.1.11와 보기 A1.1.8의 직접적인 결과로 다음을 얻는다.

A1.1.12 따름정리. $\mathbb{Z}$의 모든 부분집합은 가산이다. $\square$

A1.1.13 보조정리. $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$이 다음을 만족하는 가산무한집합들이라 하자:

$$i \neq j\text{에 대하여 } S_i \cap S_j = \varnothing.$$

그러면 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$는 가산무한집합이다.

증명. 각 S_i는 가산무한집합이기 때문에, $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in}, \ldots\}$으로 쓸 수 있다. 이제 s_{ij}를 사각배열로 놓고 아래와 같이 지그재그로 그것들을 나열하자.

$$\begin{array}{ccccccc}
s_{11} & \rightarrow & s_{12} & & s_{13} & \rightarrow & s_{14} \quad \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
s_{21} & & s_{22} & & s_{23} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
s_{31} & & s_{32} & & s_{33} & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

이것은 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$의 모든 원소들을 나열할 수 있음을 보여주고, 각 S_i는 무한이기 때문에 그 리스트는 무한이다. 따라서 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$는 가산무한이다. $\square$

보조정리 A1.1.13에서 우리는 S_i들이 서로소라고 가정하였다. 그것들이 서로소가 아니면, 그 증명은 반복되는 원소들을 제거함으로써 쉽게 수정될 수 있다:

A1.1.14 보조정리. $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$이 가산무한집합들이라면, $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$은 가산무한집합이다. □

A1.1.15 명제. 가산집합들로 이루어진 가산집합족의 합집합은 가산이다.

증명. 연습문제. □

A1.1.16 명제. S와 T가 가산무한집합이면, 곱집합 $S \times T = \{\langle s, t\rangle : s \in S, t \in T\}$는 가산무한집합이다.

증명. $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$이고 $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$이라 하자. 그러면

$$S \times T = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\langle s_i, t_1\rangle, \langle s_i, t_2\rangle, \ldots, \langle s_i, t_n\rangle, \ldots\}$$

이다. 따라서 $S \times T$는 가산무한개의 가산무한집합들의 합집합이다. 그러므로 $S \times T$는 가산무한이다. □

A1.1.17 따름정리. 유한개의 가산집합들의 곱집합은 가산이다. □

우리는 이제 가산집합들에 관한 우리의 관찰들을 통해서 중요한 응용을 할 준비가 되어 있다.

A1.1.18 보조정리. 모든 양의 유리수들의 집합 $\mathbb{Q}^{>0}$는 가산무한이다.

증명. 각 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 S_i가 분모가 i인 모든 양의 유리수들의 집합이라 하자. 그러면 $S_i = \{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \ldots, \frac{n}{i}, \ldots\}$이고 $\mathbb{Q}^{>0} = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$이다. 각 S_i는 가산무한이기 때문에, 명제 A1.1.15으로부터 $\mathbb{Q}^{>0}$은 가산무한이다. □

우리는 이제 모든 유리수들의 집합 $\mathbb{Q}$가 가산무한임을 증명할 준비가 되어 있다; 즉, $\mathbb{Q}$와 모든 자연수들의 집합인 $\mathbb{N}$ 사이에 일대일대응이 존재한다.

A1.1.19 정리. 모든 유리수들의 집합 $\mathbb{Q}$는 가산무한이다.

증명. 분명 모든 음의 유리수들의 집합 $\mathbb{Q}^{<0}$는 모든 양의 유리수들의 집합 $\mathbb{Q}^{>0}$와 대등하다. 명제 A1.1.10과 보조정리 A1.1.18로부터 $\mathbb{Q}^{<0}$는 가산무한이다.

마지막으로 $\mathbb{Q}$는 세 집합 $\mathbb{Q}^{>0}$, $\mathbb{Q}^{<0}$ 그리고 $\{0\}$의 합집합임을 관찰하자. 따라서 명제 A1.1.15에 의해 $\mathbb{Q}$는 가산무한이다. □

A1.1.20 따름정리. 유리수들로 이루어진 모든 집합은 가산이다.

증명. 이것은 정리 A1.1.19와 명제 A1.1.11의 결과이다. □

A1.1.21 정의. 실수 x가 다음을 만족할 때 **대수적 수(algebraic number)**라고 말한다: 어떤 자연수 n과 정수들 $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(a_0 \neq 0)$에 대하여

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

이다. 대수적 수가 아닌 실수는 **초월수(transcendental number)**라고 말한다.

A1.1.22 보기. 모든 유리수는 대수적 수이다.

증명. $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$에 대하여 $x = \frac{p}{q}$라 하자. 그러면 $qx - p = 0$; 즉, x는 $n = 1$, $a_0 = q$, 그리고 $a_n = -p$인 대수적 수이다. □

A1.1.23 보기. $\sqrt{2}$는 유리수가 아닌 대수적 수이다.

증명. $x = \sqrt{2}$는 무리수이지만, $x^2 - 2 = 0$을 만족한다. 그러므로 대수적 수이다. □

A1.1.24 주목. $\sqrt[4]{5} - \sqrt{3}$ 또한 대수적 수이다. 왜냐하면 $x^8 - 12x^6 + 44x^4 - 288x^2 + 16 = 0$을 만족하기 때문이다. 실제로 정수들의 집합에 합, 차, 곱, 몫, 그리고 제곱근, 세제곱근 $\cdots$ 들을 적용하여 만들어진 임의의 실수는 대수적 수이다. □

A1.1.25 주목. 주목 A1.1.24는 우리가 생각하는 "대부분의 수"들이 대수적 수임을 보여준다. 주어진 수가 초월수임을 보이는 것은 극도로 어려울 수 있다. 그 첫 번째 입증은 1844년으로 Liouville는

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000000100\ldots$$

이 초월수라는 것을 증명하였다.

1873년에 Charles Hermite는 e가 초월수라는 것을 증명하였다. 1882년에 Lindemann는 π가 초월수라는 것을 증명하였고 이것은 원을 정사각형으로 만드는 것에 대한 2,000년 동안의 오랜 질문이 부정적이라는 것에 해답을 주었다. (그 질문은 다음과 같다: 반지름이 1인 원이 있을 때, 오직 자와 컴퍼스만을 사용하여 같은 넓이를 갖는 정사각형을 만들 수 있을까? 이 문제에 대한 충분한 설명과 e와 π가 초월수라는 것의 증명은 Jones, Morris, 그리고 Pearson에 의해 쓰여진 저서 [174]에서 찾을 수 있다.) $\square$

우리는 이제 모든 대수적 수들의 집합 $\mathcal{A}$ 또한 가산무한임을 증명할 것이다. 이것은 정리 A1.1.19보다 더 강력한 결과이다. 사실 그것은 이 결과의 따름정리이다.

A1.1.26 정리. 모든 대수적 수들의 집합 $\mathcal{A}$는 가산무한이다.

증명. $a_i \in \mathbb{Z}$ $(a_0 \neq 0)$에 대하여 다항식 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$을 생각하고, 그것의 **높이(height)**를 $k = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$로 정의하자.

각각의 양의 정수 k에 대하여 A_k를 높이가 k인 모든 다항식들의 모든 근들의 집합이라고 하자. 명백히 $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$이다.

그러므로 $\mathcal{A}$가 가산무한임을 보이는 것은 명제 A1.1.15에 의해 각각의 A_k가 유한임을 증명하는 것으로 충분하다.

f가 n차 다항식이라면, 분명히 $n \leq k$ 이고 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $|a_i| \leq k$ 이다. 따라서 높이가 k인 모든 다항식들의 집합은 분명히 유한이다.

더욱이, n차 다항식은 기껏해야 n개의 근을 갖는다. 결과적으로 높이가 k인 각 다항식은 k개보다 많은 근을 갖지 않는다. 따라서 집합 A_k는 유한이다. □

A1.1.27 따름정리. 대수적 수들로 이루어진 모든 집합은 가산이다. □

따름정리 A1.1.20은 따름정리 A1.1.27의 특별한 경우임을 주목하자.

우리는 아직 비가산집합의 보기를 만들지 않았다. 그전에 어떤 함수들은 가산집합들의 모임에서 우리의 사고를 벗어나게 해주지 않는다는 것을 관찰하도록 하겠다.

A1.1.28 명제. X와 Y가 집합이고, f가 X로부터 Y로의 함수라 하자.

(i) X가 가산이고 f가 전사이면, Y는 가산이다.

(ii) Y가 가산이고 f가 단사이면, X는 가산이다.

증명. 연습문제. □

A1.1.29 명제. S가 가산집합이라 하자. 그러면 S의 모든 유한 부분집합들의 집합 또한 가산이다.

증명. 연습문제. $\square$

A1.1.30 정의. S가 집합이라 하자. S의 모든 부분집합들의 집합을 S의 **멱집합(power set)**이라고 말하고 $\mathcal{P}(S)$으로 표기한다.

A1.1.31 정리. (Georg Cantor) 모든 집합 S에 대하여 멱집합 $\mathcal{P}(S)$는 S와 대등하지 않다; 즉, $\mathcal{P}(S) \not\sim S$이다.

증명. 우리는 S와 $\mathcal{P}(S)$ 사이에 일대일대응이 존재하지 않음을 증명해야 한다. 더욱이, S로부터 $\mathcal{P}(S)$로의 전사조차 존재하지 않음을 보일 것이다.

전사 $f\colon S \to \mathcal{P}(S)$가 존재한다고 $\boxed{\text{가정하자}}$. 각각의 $x \in S$에 대하여, $f(x) \in \mathcal{P}(S)$이므로 $f(x) \subseteq S$이다.

$T = \{x : x \in S \text{ 이고 } x \notin f(x)\}$이라 하자. 그러면 $T \subseteq S$이다; 즉, $T \in \mathcal{P}(S)$이다. f는 S로부터 $\mathcal{P}(S)$ 위로의 함수이기 때문에, 어떤 $y \in S$에 대하여 $T = f(y)$이다. 분명 $y \in T$ 또는 $y \notin T$이다.

경우 1.

$$\begin{aligned} y \in T &\Rightarrow y \notin f(y) \quad (T\text{의 정의에 의해}) \\ &\Rightarrow y \notin T \quad (f(y) = T\text{이므로}). \end{aligned}$$

따라서 경우 1은 불가능하다.

경우 2.

$$\begin{aligned} y \notin T &\Rightarrow y \in f(y) \quad (T\text{의 정의에 의해}) \\ &\Rightarrow y \in T \quad (f(y) = T\text{이므로}). \end{aligned}$$

따라서 경우 2는 불가능하다.

두 가지 경우 모두 불가능하기 때문에, 모순이다. 따라서 우리의 가정은 거짓이고 S로부터 $\mathcal{P}(S)$ 위로의 전사는 존재하지 않는다. 그러므로 $\mathcal{P}(S)$는 S와 대등하지 않다. $\square$

A1.1.32 보조정리. S가 임의의 집합일 때, S는 멱집합 $\mathcal{P}(S)$의 한 부분집합과 대등하다.

증명. 함수 $f\colon S \to \mathcal{P}(S)$를 각각의 $x \in S$에 대하여, $f(x) = \{x\}$로 정의하자. 명백히 f는 S와 $f(S)$ 사이의 일대일대응이다. 따라서 S는 $\mathcal{P}(S)$의 부분집합 $f(S)$와 대등하다. $\square$

A1.1.33 명제. S가 임의의 무한집합이라면, $\mathcal{P}(S)$는 비가산집합이다.

증명. S가 무한이기 때문에, 집합 $\mathcal{P}(S)$는 무한이다. 정리 A1.1.31에 의하여 $\mathcal{P}(S)$는 S와 대등하지 않다.

$\mathcal{P}(S)$가 가산무한이라고 $\boxed{\text{가정하자}}$. 그러면 명제 A1.1.11, 보조정리 A1.1.32 그리고 명제 A1.1.10에 의하여, S는 가산무한이다. 따라서 S와 $\mathcal{P}(S)$는 대등하게 되고 이것은 모순이다. 그러므로 $\mathcal{P}(S)$는 비가산이다. $\square$

명제 A1.1.33은 비가산집합의 존재성을 보여준다. 하지만, 회의론자에게는 그 보기가 부자연스럽게 보일 수도 있다. 그래서 우리는 중요하면서도 친숙한 집합들이 비가산임을 관찰함으로써 이 절을 마치겠다.

A1.1.34 보조정리. 반열린구간 $[1, 2)$에 있는 모든 실수들의 집합은 가산이 아니다.

증명. (Cantor의 대각논법) 우리는 $[1, 2)$에 있는 모든 실수들의 집합이 나열될 수 없음을 보이겠다.

$L = \{r_1, r_2, \ldots r_n \ldots\}$이 집합 $[1, 2)$에 있는 각 실수들의 리스트라 하고, 그것의 소수전개를 다음과 같이 적자.:

$$
\begin{aligned}
r_1 =& 1.r_{11}r_{12}\ldots r_{1n}\ldots \\
r_2 =& 1.r_{21}r_{22}\ldots r_{2n}\ldots \\
&\vdots \\
r_m =& 1.r_{m1}r_{m2}\ldots r_{mn}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

다음과 같이 $1.a_1a_2\ldots a_n\ldots$으로 정의된 실수 a를 생각하자: 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여,

$$a_n = \begin{cases} 1, & r_{nn} \neq 1 \\ 2, & r_{nn} = 1. \end{cases}$$

명백히 $a_n \neq r_{nn}$이므로, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $a \neq r_n$이다. 따라서 a는 리스트 L의 어디에도 나타나지 않는다. 그러므로 $[1, 2)$에 있는 모든 실수들의 집합의 리스트는 존재하지 않는다; 즉, 이 집합은 비가산이다. □

A1.1.35 정리. 모든 실수들의 집합 $\mathbb{R}$은 비가산이다.

증명. $\mathbb{R}$이 가산이라고 가정하자. 그러면 명제 A1.1.11에 의해, $[1, 2)$에 있는 모든 실수들의 집합은 가산이고, 이것은 보조정리 A1.1.34에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{R}$은 비가산이다. □

A1.1.36 따름정리. 모든 무리수들의 집합 $\mathbb{I}$는 비가산이다.

증명. $\mathbb{I}$가 가산이라고 $\boxed{\text{가정하자}}$. 그러면 $\mathbb{R}$은 두 가산집합 $\mathbb{I}$와 $\mathbb{Q}$의 합집합이다. 명제 A1.1.15에 의하여, $\mathbb{R}$은 가산이고, 이것은 모순이다. 그러므로 $\mathbb{I}$는 비가산이다. $\square$

따름정리 A1.1.36과 비슷한 증명을 사용하면 다음 결과를 얻는다.

A1.1.37 따름정리. 모든 초월수들의 집합은 비가산이다. $\square$

A1.2 기수

앞 절에서 가산무한과 비가산을 정의하였고 비가산집합이 가산무한집합보다 "더 크다"는 것을 설명없이 암시하였다. "더 크다"의 의미를 설명하기 위해서는 다음 정리가 필요하다.

우리의 설명은 Halmos의 저서 [133]에 기초한 것이다.

A1.2.1 정리. (Cantor-Schröder-Bernstein) S와 T가 집합이라 하자. 만약 S가 T의 부분집합과 대등하고 T가 S의 부분집합과 대등하면, S는 T와 대등하다.

증명. 일반성을 잃지 않고 S와 T가 서로소라고 가정할 수 있다. $f : S \to T$와 $g : T \to S$가 단사라 하자. 우리는 S로부터 T로의 전단사를 찾아야만 한다.

원소 s는 원소 $f(s)$의 **부모(parent)**라고 말하며 $f(s)$ 는 s의 **자손(descendant)**이라고 말한다. 또한 t는 $g(t)$의 부모이고 $g(t)$는 t의 자손이다. 각각의 $s \in S$는 자손들의 무한수열로서 $f(s)$, $g(f(s))$, $f(g(f(s)))$, $\ldots$를 갖는다. 그러한 수열의 각 항은 그 다음에 나타나는 모든 항들의 **조상(ancestor)**이라고 말한다.

이제 $s \in S$이라 하자. 만약 가능한 멀리 그 혈통을 역추적하면 다음 세 가지 중 하나가 발생해야만 한다:

(i) 조상들의 리스트는 유한이고, 조상이 없는 S의 원소에서 멈춘다;
(ii) 조상들의 리스트는 유한이고, 조상이 없는 F의 원소에서 멈춘다;
(iii) 조상들의 리스트는 무한이다.

S_S가 S에서 비롯되는 S의 그러한 원소들의 집합이라 하자; 즉, S_S는 집합 $S \setminus g(T)$와 S에 있는 그것의 모든 자손들을 추가한 것이다. S_T가 T에서 비롯되는 그러한 원소들의 집합이라 하자; 즉, S_T는 $T \setminus f(S)$의 S에 있는 자손들의 집합이다. S_∞는 부모가 없는 조상들을 갖지 않는 모든 원소들의 집합이라 하자. 그러면 S는 세 개의 서로소인 집합 S_S, S_T 그리고 S_∞의 합집합이다. 비슷하게 T는 비슷하게 정의된 세 개의 서로소인 집합 T_T, T_S 그리고 T_∞의 합집합이다.

분명히 f를 S_S으로 제한한 함수는 S_S로부터 T_S로의 전단사이다.

이제 T로부터 $g(T)$로의 전단사 g의 역함수를 g^{-1}라 하자. 분명히 g^{-1}를 S_T로 제한한 함수는 S_T로부터 T_T로의 전단사이다.

마지막으로, S_∞로 f를 제한한 함수는 S_∞로부터 T_∞로의 전단사이다.

함수 $h : S \to T$를 다음과 같이 정의하자:

$$h(s) = \begin{cases} f(s), & s \in S_S \\ g^{-1}(s), & s \in S_T \\ f(s), & s \in S_\infty. \end{cases}$$

그러면 h는 S로부터 T로의 전단사이다. 따라서 S는 T와 대등하다. $\square$

이제 우리는 "기수"를 정의할 것이다.

A1.2.2 정의. 다음 조건들을 만족하는 집합들의 모임 $\aleph$를 **기수(cardinal number)** 라고 말한다:

(i) S와 T가 집합이라 하자. S와 T가 $\aleph$에 속하면, $S \sim T$이다;

(ii) A와 B가 집합이라 하자. A가 $\aleph$에 속하고 $B \sim A$이면, B는 $\aleph$에 속한다.

$\aleph$가 기수이고 A가 $\aleph$에 속하면, card $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\aleph}$이라 표기한다.

정의 A1.2.2는 처음에는 이상하게 보일지도 모른다. 기수는 집합들의 모임으로 정의된다. 몇몇 특별한 경우들을 자세히 살펴보자:

집합 A가 두 개의 원소를 가지고 있으면 card $A = 2$라 쓴다; 기수 2는 집합 $\{1, 2\}$와 대등한 모든 집합들의 모임이다. 즉, 두 개의 원소를 가진 모든 집합들의 모임인 것이다.

집합 S가 가산무한이면, card $S = \aleph_0$라 쓴다; 이 경우 기수 $\aleph_0$는 $\mathbb{N}$과 대등한 모든 집합들의 모임이다.

S와 T가 집합이라 하자. 그러면 S와 T가 대등할 필요충분조건은 card $S =$ card T이다.

A1.2.3 정의. $\mathbb{R}$의 기수는 $\boldsymbol{\mathfrak{c}}$로 표기한다; 즉, card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$라 쓴다. $\mathbb{N}$의 기수는 $\boldsymbol{\aleph_0}$로 표기한다.

우리는 $\mathbb{R}$을 "연속체(continuum)"로 생각하기 때문에, 정의 A1.2.3에 기호 $\mathfrak{c}$를 사용한다.

이제 기수들의 순서를 정의하겠다.

A1.2.4 정의. m과 n이 기수라 하자. 기수 m이 n보다 작거나 같다, 즉, $\boldsymbol{m \le n}$이라는 것은 다음을 만족하는 집합 S와 T가 존재함을 의미한다: card $S = m$, card $T = n$, 그리고 S는 T의 부분집합과 대등하다. 더욱이 기수 m이 n보다 작다, 즉, $\boldsymbol{m < n}$이라는 것은 $m \le n$이고 $m \ne n$임을 의미한다.

$\mathbb{N}$은 $\mathbb{R}$의 부분집합으로 card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$, card $\mathbb{N} = \aleph_0$이며, $\mathbb{R}$은 $\mathbb{N}$과 대등하지 않기 때문에, 다음 결과를 얻는다.

A1.2.5 명제. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

우리는 또한 임의의 집합 S에 대하여, S는 $\mathcal{P}(S)$의 한 부분집합과 대등하고 S는 $\mathcal{P}(S)$와 대등하지 않다는 것을 알고 있다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

A1.2.6 정리. 임의의 집합 S에 대하여, card $S <$ card $\mathcal{P}(S)$이다. □

다음은 Cantor-Schröder-Bernstein 정리 A1.2.1를 재서술한 것이다.

A1.2.7 정리. m과 n이 기수라 하자. $m \leq n$이고 $n \leq m$이면, $m = n$이다. □

A1.2.8 주목. 무한개의 무한기수들이 존재함을 관찰하자. 이것은 다음 사실로부터 분명하다:

$$\aleph_0 = \text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots \tag{$*$}$$ □

다음은 정리 A1.2.6의 직접적인 결과이다.

A1.2.9 따름정리. 가장 큰 기수는 존재하지 않는다. □

유한집합 S가 n개의 원소를 가지고 있다면, 그 멱집합 $\mathcal{P}(S)$는 2^n개의 원소를 가지고 있음을 주목하자. 이로부터 다음 기호를 소개하는 것은 자연스럽다.

A1.2.10 정의. 집합 S가 기수 $\aleph$를 갖는다면, $\mathcal{P}(S)$의 기수는 $\mathbf{2^{\aleph}}$로 표기한다.

그러므로 위의 $(*)$를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots . \tag{$**$}$$

이 기수들의 수열을 살펴보면, 다음 질문들을 생각할 수 있다:

(1) $\mathfrak{c}$는 이 리스트에 있는 기수들 중 어느 하나와 같을까?

(2) $\aleph_0$와 $2^{\aleph_0}$ 사이에 기수가 존재할까?

이 질문들, 특히, (2)는 쉽게 답해질 수 없다. 실제로 그것들은 집합론의 공리를 주의깊게 살펴볼 필요가 있다. 이 부록에서 집합론의 공리를 진지하게 논하는 것은 불가능하다. 그럼에도 불구하고 우리는 부록에서 위 질문들을 나중에 다룰 것이다.

우리는 몇몇 친숙한 집합들의 기수들을 확인함으로써 이 절을 마치겠다.

A1.2.11 보조정리. a와 b가 $a < b$인 실수라 하자. 그러면

(i) $[0,1] \sim [a,b]$;

(ii) $(0,1) \sim (a,b)$;

(iii) $(0,1) \sim (1,\infty)$;

(iv) $(-\infty,-1) \sim (-2,-1)$;

(v) $(1,\infty) \sim (1,2)$;

(vi) $\mathbb{R} \sim (-2,2)$;

(vii) $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

증명의 개요. (i)은 $[0,1]$로부터 $[a,b]$로의 일대일함수 $f(x) = a+(b-a)x$를 정의함으로써 증명된다. (ii)와 (iii)도 적당한 함수들을 찾음으로써 비슷하게 증명된다. (iv)는 (iii)과 (ii)를 사용하면 증명된다. (v)는 (iv)로부터 얻어진다. (vi)은 (iv)와 (v)으로부터 $\mathbb{R}$이 서로소인 집합 $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$ 그리고 $(1,\infty)$들의 합집합이라는 것을 관찰하면 얻어진다. (vii)은 (vi)과 (ii)로부터 얻어진다. □

A1.2.12 명제. a와 b가 $a < b$인 실수라 하자. S가 $(a,b) \subseteq S$을 만족하는 $\mathbb{R}$의 부분집합이면, card $S = \mathfrak{c}$이다. 특히, card $(a,b) =$ card $[a,b] = \mathfrak{c}$이다.

증명. 보조정리 A1.2.11을 사용하여

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card } (a,b) \leq \text{card } [a,b] \leq \text{card } \mathbb{R}$$

임을 관찰하자. 따라서 card $(a,b) =$ card $[a,b] =$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$이다. □

A1.2.13 명제. $\mathbb{R}^2$가 유클리드 평면에 있는 점들의 집합이면, $\text{card}\,(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}$이다.

증명의 개요. 명제 A1.2.12에 의하여 $\mathbb{R}$은 반열린구간 $[0,1)$와 대등하다. 그리고 $[0,1) \times [0,1) \sim [0,1)$을 증명하는 것으로 충분하다.

$f : [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$를 $f(x) = \langle x, 0 \rangle$로 정의하자. 그러면 f는 $[0,1)$로부터 $[0,1) \times [0,1)$로의 일대일함수이다. 따라서 $\mathfrak{c} = \text{card}\,[0,1) \leq \text{card}\,[0,1) \times [0,1)$이다.

Cantor-Schröder-Bernstein 정리 A.2.1에 의하여, $[0,1)\times[0,1)$로부터 $[0,1)$로의 일대일함수 g를 찾는 것으로 충분하다.

$$g(\langle 0.a_1a_2\dots a_n\dots, 0.b_1b_2\dots b_n\dots, \rangle) = 0.a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n\dots$$

를 정의하자. 분명히 g는 잘 정의되고 ($[0,1)$에 있는 각 실수는 99. . . 9. . . 로 끝나지 않는 유일한 소수표현을 갖기 때문에) 일대일이다. 이것으로 증명은 완성된다. □

A1.3 기수의 연산

우선 기수들의 합을 정의하겠다. 물론, 기수들이 유한이면, 이 정의는 유한수들의 합과 같아야 한다.

A1.3.1 정의. α와 β가 기수라 하고 card $A = \alpha$와 card $B = \beta$를 만족하는 서로소인 집합 A와 B를 선택하자. 이때, **기수 $\boldsymbol{\alpha}$와 $\boldsymbol{\beta}$의 합**은 $\text{card}\,(A \cup B)$로 정의하고 $\boldsymbol{\alpha + \beta}$로 표기한다.

A1.3.2 주목. 위 정의가 타당하다는 것, 특히 집합 A와 B의 선택에 영향을 받지 않는다는 것을 알기 전에, A_1과 B_1이 서로소인 집합이고, A와 B가 서로소인 집합이고, card A = card A_1과 card B = card B_1이면, $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$이다; 즉, $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A_1 \cup B_1)$이다. 이것은 복잡하지 않으므로 연습문제로 남겨두겠다. □

A1.3.3 명제. 임의의 기수 α, β, γ에 대하여

(i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(ii) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

(iii) $\alpha + 0 = \alpha$;

(iv) $\alpha \leq \beta$이면, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ 이다.

증명. 연습문제. □

A1.3.4 명제.

(i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(iv) 임의의 유한기수 n에 대하여, $n + \aleph_0 = \aleph_0$이고 $n + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$이다.

증명.

(i) 리스트 $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$은 두 가산무한집합 $\mathbb{N}$과 음의 정수들의 집합의 합집합이 가산무한집합임을 보여준다.

(ii) $[-2, -1] \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$으로부터, card $[-2, -1]$ + card $\mathbb{N} \leq$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$임을 알 수 있다. 따라서 $\mathfrak{c} =$ card $[-2, -1] \leq$ card $([-2, -1] \cup \mathbb{N}) =$ card $[-2, -1]$ + card $\mathbb{N} = \mathfrak{c} + \aleph_0 \leq \mathfrak{c}$이다.

(iii) $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} =$ card $((0, 1) \cup (1, 2)) \leq$ card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$이므로 성립한다.

(iv) $\aleph_0 \leq n + \aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$이고 $\mathfrak{c} \leq n + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$이므로 성립한다. □

다음으로 기수들의 곱을 정의하겠다.

A1.3.5 정의. α와 β가 기수라 하고 card $A = \alpha$와 card $B = \beta$를 만족하는 서로소인 집합 A와 B를 선택하자. 이때, **기수 α와 β의 곱**은 card $(A \times B)$으로 정의하고 $\alpha\beta$로 표기한다.

기수들의 합의 경우처럼 정의 A1.3.5에서 $\alpha\,\beta$가 집합 A와 B의 선택에 영향을 받지 않는다는 것을 확인할 필요가 있지만 이것은 보통의 방법으로 확인 가능하다.

A1.3.6 명제. 임의의 기수 α, β, γ에 대하여

(i) $\alpha\beta = \beta\alpha$;

(ii) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;

(iii) $1.\alpha = \alpha$;

(iv) $0.\alpha = 0$;

(v) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

(vi) 임의의 유한기수 n에 대하여, $n\alpha = \alpha + \alpha + \ldots \alpha$ (n개의 항);

(vii) $\alpha \leq \beta$ 이면, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ 이다.

증명. 연습문제. □

A1.3.7 명제.

(i) $\aleph_0\,\aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{c}\,\aleph_0 = \mathfrak{c}$;

(iv) 임의의 유한기수 n에 대하여, $n\,\aleph_0 = \aleph_0$이고 $n\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

증명의 개요. (i)은 명제 A1.1.16로부터 얻어지고, (ii)는 명제 A1.2.13로부터 얻어진다. (iii)을 보이기 위해서는, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.1 \leq \mathfrak{c}\,\aleph_0 \leq \mathfrak{c}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$임을 관찰하여라. 또한 (iv)의 증명은 복잡하지 않다. □

기수의 연산에서 다음 단계는 기수들의 거듭제곱을 정의하는 것이다; 즉, α와 β가 기수일 때, α^{β}을 정의하고자 한다.

A1.3.8 정의. α와 β가 기수이고, 집합 A와 B가 card $A = \alpha$와 card $B = \beta$을 만족한다고 하자. B로부터 A로의 모든 함수 f들의 집합을 $\boldsymbol{A^B}$로 표기하고, $\boldsymbol{\alpha^{\beta}}$을 card A^B로 정의한다.

다시 한 번, 이 정의가 타당한지, 즉, α^{β}가 집합 A와 B의 선택에 영향을 받지 않는다는 것을 확인할 필요가 있다. 우리는 또한 n과 m이 유한기수이고 집합 A는 n개의 원소들을 가지고 집합 B는 m개의 원소들을 가지고 있다면, B로부터 A로의 서로 다른 n^m개의 함수들이 존재함을 확인할 필요가 있다.

또한 고민을 한 가지 더 해 볼 필요가 있다: α가 기수이고 A가 card $A = \alpha$을 만족하는 집합이라면, 2^{α}은 두 개의 다른 정의를 갖는다. 위 정의는 2^{α}을 A로부터 두 점 집합 $\{0,1\}$로의 모든 함수들의 집합의 기수로서 생각한다. 반면에, 정의 A1.2.10는 2^{α}을 card $(\mathcal{P}(A))$로서 생각한다. $\{0,1\}^A$로부터 $\mathcal{P}(A)$로의 전단사 θ를 찾는 것으로 충분하다. $f \in \{0,1\}^A$라 하자. 그러면 $f\colon A \to \{0,1\}$이다. $\theta(f) = f^{-1}(1)$라 정의하자. θ가 전단사임을 검증하는 것은 연습문제로 남겨둔다.

A1.3.9 명제. 임의의 기수 α, β, γ에 대하여:

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$;

(ii) $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$;

(iii) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{(\beta\gamma)}$;

(iv) $\alpha \le \beta$이면, $\alpha^{\gamma} \le \beta^{\gamma}$이다;

(v) $\alpha \le \beta$이면, $\gamma^{\alpha} \le \gamma^{\beta}$이다.

증명. 연습문제. □

정의 A1.2.10 뒤에 세 개의 질문을 했었는데, 이제 세 개 중 두 번째 질문에 답할 준비가 되었다.

A1.3.10 보조정리. $\aleph_0{}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

증명. card $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \aleph_0{}^{\aleph_0}$와 card $(0,1) = \mathfrak{c}$를 관찰하자. $f(0.a_1a_2\ldots a_n\ldots) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\rangle$로 정의된 함수 $f\colon (0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$는 단사이기 때문에, $\mathfrak{c} \leq \aleph_0{}^{\aleph_0}$을 얻는다.

Cantor-Schröder-Bernstein 정리 A1.2.1을 사용하여 증명을 끝내려면 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$로부터 $(0,1)$로의 단사함수 g를 찾을 필요가 있다. $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\rangle$가 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$의 임의의 원소이면 각각의 i에 대해 $a_i \in \mathbb{N}$이고, 어떤 $M_i \in \mathbb{N}$이 존재해서 모든 $n > M_i$에 대하여 $a_{in} = 0$인 $a_i = \ldots a_{in}\, a_{i(n-1)}\, \ldots\, a_{i2}\, a_{i1}$로 쓸 수 있다. [예를 들면 $187 = \ldots 0\,0 \ldots 0\,1\,8\,7$이므로 $a_i = 187$이면 $a_{i1} = 7$, $a_{i2} = 8$, $a_{i3} = 1$이고 $n > M_i = 3$에 대하여 $a_{in} = 0$이다.] 이제 함수 g를 다음과 같이 정의하자:

$$g(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\rangle) = 0.a_{11}a_{12}a_{21}a_{13}a_{22}a_{31}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{16}\ldots.$$

(이것과 보조정리 A1.1.13을 비교하여라.)

분명히 g는 단사이므로, 이 증명은 완료되었다. $\square$

이제 Georg Cantor에 의해 처음으로 증명된 아름다운 결과를 서술하겠다.

A1.3.11 정리. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

증명. 먼저 보조정리 A1.3.10로부터 $2^{\aleph_0} \le {\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$임을 관찰하자. 따라서 우리는 $\mathfrak{c} \le 2^{\aleph_0}$를 증명해야 한다. 이것을 증명하기 위해 $[0,1)$로부터 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$로의 단사함수 f를 찾을 필요가 있다. $[0,1)$의 각 원소 x는 이진수 표현 $x = 0.x_1x_2 \dots x_n \dots$을 갖는다. 여기서 각 x_i는 0 또는 1과 같다. 이진수 표현은 어느 자리 이후 계속 1이 나타나는 표현을 제외하고는 유일하다; 예를 들어,

$$1/4 = 0.0100\dots0\dots = 0.0011\dots1\dots$$

이다. 모든 이러한 경우에서, 1보다는 0이 계속 나타나는 표현을 선택하는 것으로 규정하면, $[0,1)$에 있는 수들의 표현은 유일하다. 각 $x \in [0,1)$를 함수 $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$로 보내는 함수 $f\colon [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$를 생각하자. 여기서 $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$는 $f(x)(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$으로 정의된 함수이다. f가 단사임을 보이기 위하여, $x \ne y$인 $[0,1)$의 원소 x와 y를 생각하자. 그러면 어떤 $m \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_m \ne y_m$이다. 그래서 $f(x)(m) = x_m \ne y_m = f(y)(m)$이다. 따라서 두 함수 $f(x)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$와 $f(y)\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$는 같지 않다. x와 y는 $[0,1)$의 임의의 (같지 않은) 원소이기 때문에, f는 단사이다. □

A1.3.12 따름정리. α가 $2 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$을 만족하는 기수라면, $\alpha^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$이다.

증명. $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \alpha^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$임을 관찰하시오. □

A1.4 서수[12]

A1.4.1 정의. $(X, \leq)$를 반순서집합이라 하자. X의 모든 두 원소가 비교가능(comparable)하면, $(X, \leq)$를 **선형순서(linearly ordered)집합** (또는 **전순서(totally ordered)집합**)이라 부른다. 이 때 순서 $\leq$는 **선형순서** (또는 **전순서(total order)**)라고 불린다. 선형순서가 다음을 만족하면 **순선형순서(strict linear ordering)** (또는 **순 전순서(strict total ordering)**)라고 불린다:

$$a, b \in X\text{에 대하여, } a \leq b \text{ 그리고 } b \leq a \implies a = b.$$

A1.4.2 정의. 순전순서집합 $(S, \leq)$의 공집합이 아닌 모든 부분집합이 최소원을 가지면, $(S, \leq)$를 **정렬순서집합(well-ordered set)**이라 부른다. 이 때 전순서는 **정렬순서(well-ordering)**라고 불린다.

[12]서수의 상세한 설명을 위해서는 Abian [1], Ciesielski [67], Kamke [176], Roitman [273]을 보시오.

A1.4.3 주목. 다음 정리는 모든 집합이 정렬순서집합이 될 수 있다는 것을 말한다. 이것을 정리라고 부르는 반면에, 이것은 선택공리 A6.1.26 그리고 Zorn의 보조정리 10.2.16과 동치이다. 보통은 Zermelo-Fraenkel (ZF) 공리계를 갖는 집합론으로 시작한다. (주목 A6.1.26을 보고, 아래의 Zermelo-Fraenkel 공리계에 관한 세 개의 비디오를 시청하시오:
Video 2a – http://youtu.be/9h83ZJeiecg,
Video 2b – http://youtu.be/QPSRB4Fhzko, 그리고
Video 2c – http://youtu.be/YvqUnjjQ3TQ.)
ZF 내에서, 선택공리를 증명할 수 없다. 그러므로 정렬순서 정리 A1.2.4를 ZF 내에서 증명할 수 없다. 만약 선택공리, Zorn의 보조정리, 또는 정렬순서 정리 중의 어느 $\boxed{\text{하나가}}$ 참이라고 가정하면, 다른 두 개가 증명될 수 있다. (선택공리와 동치인 많은 명제를 위해서는, Rubin and Rubin [275] 그리고 Rubin and Rubin [276]를 보시오.) 만약 우리가 Zermelo-Fraenkel공리계에 선택공리를 추가하면, 소위 말하는 ZFC 공리계를 얻는다. 물론 모두는 아니지만 많은 수학자들이 전적으로 ZFC 공리계 내에서 일을 수행한다.

A1.4.4 정리. [정렬순서 정리(Well-Ordering Theorem)] S를 공집합이 아닌 임의의 집합이라 하자. 그러면 S 위에 하나의 정렬순서 $\leq$가 존재한다.

A1.4.5 정의. $(X, \leq)$와 $(Y, \preceq)$를 반순서집합이라 하자. 만약 전단사 함수 $f : X \to Y$가 존재해서 모든 $a, b \in X$에 대하여, $a \leq b$일 필요충분조건은 $f(a) \preceq f(b)$임을 만족하면, $(X, \leq)$와 $(Y, \preceq)$가 **순서동형(order isomorphic)** (또는 **같은 순서형태(same order type)를 갖는다**)라고 말한다. 그 함수 f를 **순서동형함수(order isomorphism)**라고 부른다.

A1.4.6 명제. $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$, 그리고 $(Z, \ll)$를 반순서집합이라 하자.

(i) 만약 $f : X \to Y$가 순서동형함수이면, 역함수 $f^{\leftarrow} : Y \to X$도 역시 순서동형함수이다.

(ii) 만약 $f : X \to Y$와 $g : Y \to Z$가 순서동형함수이면, $g \circ f : X \to Z$도 역시 순서동형함수이다.

(iii) $f : X \to Y$를 순서동형함수라 하자. 만약 $(X, \leq)$가 전순서집합이면, $(Y, \preceq)$도 전순서집합이다.

(iv) $f : X \to Y$를 순서동형함수라 하자. 만약 $(X, \leq)$가 정렬순서집합이면, $(Y, \preceq)$도 정렬순서집합이다.

증명. 연습문제. $\square$

A1.4.7 주목. 우리는 집합론의 ZF 공리계를 가지고 시작한다는 것을 나타냈었다. 다음으로 자연수를 정의할 필요가 있다. 우리는 귀납법을 이용할 것이다. 수 0을 공집합 $\emptyset$으로 정의함으로써 시작하자. 그 다음에 수 $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$; 수 $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$으로 정의한다. 이제 수학적 귀납법을 이용하여, 우리는 수 n을 $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$으로 정의한다. 더욱이, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$으로 정의한다. 자연수를 집합으로 생각하면 우리는 다음을 인지하게 된다.

(i) n은 $\subset$에 의하여 정렬순서집합이다;

(ii) $n \notin n$;

(iii) 만약 $m \in n$이면, $m \notin m$이다;

(iv) 만약 $m \in n$이면, $m \subset n$이다;

(v) 만약 $m \in n$ 그리고 $p \in m$이면, $p \in n$이다.

그러므로 마음속에 이것을 가지고 각각의 자연수 n, 마찬가지로 $\mathbb{N}$은 자연스러운 정렬순서를 갖는 집합이라는 것을 안다.

이것이 John von Neumann (1903-1957)이 1923년에 그의 논문 von Neumann [321]에 처음으로 소개한 서수의 정의를 위한 장을 마련했다. 또한 von Neumann [322]를 보시오.

A1.4.8 정의. 집합 α가 $\subset$에 의하여 정렬순서가 주어진 모든 서수 $\beta < \alpha$의 집합이면, α를 **서수(ordinal number)** (또는 **서수적(ordinal)**)이라 한다 .

A1.4.9 명제. 집합 α가 서수 (또는 서수적)일 필요충분조건은 α가 다음 성질을 갖는 것이다:

(i) α는 $\subset$에 의하여 정렬순서집합이다;

(ii) $\alpha \notin \alpha$;

(iii) 만약 $\beta \in \alpha$이면, $\beta \notin \beta$이다;

(iv) 만약 $\beta \in \alpha$이면, $\beta \subset \alpha$이다;

(v) 만약 $\beta \in \alpha$ 그리고 $\gamma \in \beta$이면, $\gamma \in \alpha$이다.

증명. 연습문제. □

A1.4.10 주목. 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$을 정렬순서집합으로 간주하면, $n \in \mathbb{N}$은 서수임을 안다. 더욱이, 모든 자연수의 집합 $\mathbb{N}$의 정의가 정의 A1.4.8를 만족한다. 그러므로 $\mathbb{N}$은 서수이고, 이것을 $\boldsymbol{\omega}$로 나타낸다.

A1.4.11 주목. 서수 위의 관계 $\subset$는 대개 $\leq$로 나타낸다. 그러면 관계 $<$는 분명히 $\in$와 같다.

다음 명제에 몇 가지 중요한 결과를 모아 두었고 증명은 간단하다.

A1.4.12 명제.
(i) 만약 α가 서수이고 $\beta \in \alpha$이면, β도 역시 서수이다;
(ii) 서수 α, β에 대하여, 만약 α가 β에 순서동형이면 $\alpha = \beta$이다;
(iii) 서수 α, β에 대하여, (a) $\alpha = \beta$ 또는 (b) $\alpha < \beta$ 또는 (c) $\beta < \alpha$이다;
(iv) 만약 $\mathcal{S}$가 공집합이 아닌 임의의 서수 집합이면, $\bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i$는 서수이다;
(v) 모든 정렬집합 $(S, \leq)$에 대하여, $(S, \leq)$에 순서동형인 오직 하나의 서수 α가 존재한다.

증명. 연습문제. □

이제 우리는 두 서수 α와 β의 합과 곱을 정의하겠다. α와 β가 서로소가 아닌 경우에, 합에 대해서는 그들을 동치집합 $(\{0\} \times \alpha)$와 $(\{1\} \times \beta)$로 대치한다. 그 다음에 α와 β 위의 원래 순서를 유지하고, α의 모든 원소가 β의 모든 원소보다 작게 만들어서 이 두 집합의 합에 대한 순서를 정의한다.

A1.4.13 정의. 만약 α와 β가 서수이면, 그들의 **합(sum)**은 $\boldsymbol{\alpha + \beta}$로 나타내고, $(i, \delta) \leq (j, \gamma)$일 필요충분조건은 $i < j$ 또는 $\delta \leq \gamma$인 순서가 주어진 정렬집합 $S = (\{0\} \times \alpha) \bigcup (\{1\} \times \beta)$의 순서형태(order type)이다.
곱(product)은 $\boldsymbol{\alpha\beta}$로 나타내고, 정렬집합 $\alpha \times \beta$의 순서의 형태이다. 여기서 순서는 사전체식 순서이다; 즉,

$$(a, b) \leq (c, d)\text{일 필요충분조건은 (i) } a < b \text{ 또는 (ii) } a = b \text{ 그리고 } c \leq d.$$

A1.4.14 주목. **서수의 덧셈과 곱셈은 결합적이다**; 즉, 서수 α, β, γ에 대하여, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ 그리고 $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$임은 쉽게 입증된다. 그러나, **서수의 덧셈과 곱셈은 교환적이 아니다**. 예를 들어

$$3 + \omega = \omega \neq \omega + 3 \quad \text{그리고} \quad \omega 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2\omega$$

은 쉽게 입증된다. 다음 도표는 증명하는 데 도움이 된다.

집합	서수
$\emptyset$	0
$\{0\}$	1
$\{0,1\}$	2
$\{0,1,2\}$	3
$\dots$	$\dots$
$\{0,1,2,\dots,n,\dots\}$	ω
$\{0',0,1,2,\dots,n,\dots\}$	$1+\omega=\omega$
$\{0',1',2',\dots,(n'-1),0,1,2,\dots,n,\dots\}$	$n+\omega=\omega$
$\{0,1,0',1',0'',1'',0''',1''',0^{iv},\dots\}$	$2\omega=\omega$
$\{0,1,\dots,n,0',1',\dots,n',0'',1'',\dots,n'',0''',1''',\dots,n''',\dots\}$	$n\omega=\omega$
$\{0,1,2,\dots,n,\dots,0'\}$	$\omega+1>\omega$
$\{0,1,2,\dots,n,\dots,0',1',\dots,\dots,(n'-1)\}$	$\omega+n>\omega+1>\omega$
$\{0,1,2,\dots,n,\dots,0',1',2',\dots,n',\dots\}$	$\omega+\omega>\omega+n$
$\{0,1,\dots,n,\dots,0',1',\dots,n',\dots,0''',1''',\dots,n''',\dots,0^{iv},1^{iv},\dots,n^{iv},\dots,\dots\}$	$\omega2>\omega+\omega>\omega$

A1.4.15 주목. 모든 서수 집합은 $\subset$에 의한 정렬순서집합이다.

A1.4.16 정의. $(S,\leq)$를 반순서집합이라 하자. 만약 $a\in S$이면, $x<a$을 만족하는 모든 원소 $x\in S$의 집합은 a에 의하여 결정된 $(S,\leq)$의 **초기절편(initial segment)**이라 불린다.

A1.4.17 주목. 서수의 모든 초기절편은 서수이다.

A1.4.18 명제. 임의의 두 서수 α와 β에 대하여, 다음의 오직 한 경우만 참이다:

(i) $\alpha=\beta$;

(ii) α가 β의 초기절편이다;

(iii) β가 α의 초기조건이다.

증명. 연습문제. $\square$

A1.4.19 정의. 서수 α의 **후계자(successor)**는 α^+로 나타내고, $\beta>\alpha$을 만족하는 가장 작은 서수 β이다; 즉, $\alpha^+=\alpha\cup\{\alpha\}$이다. 만약 α가 γ의 후계자이면, 서수 γ는 α의 **선조(predecessor)**라 부르고, α^-으로 나타낸다. 만약 $\alpha\neq 0$이고 α가 선조를 가지고 있지 않으면, α를 **극한서수(limit ordinal)**라 부른다.

A1.4.20 주목. 분명히 유한서수는 극한서수가 아니다. 그러나 ω는 극한서수이다. 물론 서수 $\omega+1=\omega^+$이고, 따라서 $\omega+1$은 극한서수가 아니다. 사실상 각각의 유한서수 n에 대하여, $\omega+n$은 극한서수가 아니지만, $\omega+\omega$는 극한서수이다.

A1.4.21 명제. 만약 Γ가 서수 집합이면, $\bigcup_{\gamma_i\in\Gamma}\gamma_i$는 서수이고, Γ의 최소상계이다. 즉, $\bigcup_{\gamma_i\in\Gamma}\gamma_i$는 $\sup\Gamma=\sup_{\gamma_i\in\Gamma}\gamma_i$와 같다.
서수 α에 대하여,

(i) 만약 $\alpha=0$ 또는 α가 극한서수이면, $\bigcup_{\gamma_i\in\alpha}\gamma_i=\alpha$이다;

(ii) 만약 $\alpha\neq 0$ 그리고 α가 극한서수가 아니면, $\bigcup_{\gamma_i\in\alpha}\gamma_i=\alpha^-$이다.

증명. 연습문제. □

A1.4.22 명제. 모든 서수 집합 Γ에 대하여, Γ에 있는 모든 서수보다 큰 서수가 존재한다.

증명. 연습문제. □

A1.4.23 주목. 모든 서수의 집합류(class)는 집합이 아니다. 그것은 진부분 집합류를 갖는다.

A1.4.24 주목. 이제 서수의 지수 개념으로 돌아가자; 즉, 서수 α와 β에 대하여, 서수 α^β를 정의 하고자 한다. 이것은 무한서수인 경우에 $\boxed{\text{상당한 주의}}$를 가지고 행해져야 하거나 또는 결과적으로 얻어지는 집합이 정렬순서집합이 아닐 수 있으므로 서수가 아닐 수 있다.

A1.4.25 정의. α와 β를 서수라 하자. $\boldsymbol{\alpha^\beta}$를 집합 β에서 집합 α로의 모든 함수들의 집합이라 하고, 집합 β의 오직 $\boxed{\text{유한개}}$의 원소만이 집합 α의 0이 아닌 원소로 대응된다고 하자. 함수들에 다음과 같은 사전체식 순서를 주자:
만약 $f, g \in \alpha^\beta$이면, 어떤 유한집합 $\{c_1 < c_2 < \cdots < c_n\} \subseteq \beta$가 존재해서, $b \in \beta$에 대하여 $f(b) = 0$이고, $b \notin \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$에 대해서 $g(b) = 0$을 만족한다. c_i를 $f(c_i) \neq g(c_i)$를 만족하는 $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$의 가장 작은 원소라 하자. 그 다음에 $f(c_i) < g(c_i)$이면 $f < g$라 정의하고, 그렇지 않으면 $g < f$라 정의하자.

A1.4.26 주목. 정의 A1.4.25에서 정의한 α^β가 실제로 서수이고, 특히 정렬순서집합임을 확인할 필요가 있다. 정의에서 유한성에 대한 제한이 없으면, 그렇지 않을 수도 있다.

A1.4.27 정리. [초한귀납법(Transfinite Induction)] $P(\gamma)$를 모든 서수 γ에 대하여 정의된 명제라 하자. 만약 $P(0)$가 참이고, 각각의 서수 α에 대하여,

모든 $\beta < \alpha$에 대하여 $P(\beta)$가 참일 때 $P(\alpha)$가 참이면,

P는 모든 서수에 대하여 참이다.

A1.4.28 명제. 서수 α와 β에 대하여,

(i) 만약 $\beta > 0$가 극한서수가 아니면, $\alpha^\beta = (\alpha^{\beta^-})\,\alpha$이다;
(ii) 만약 β가 극한서수이고 $\alpha > 0$이면, $\alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$이다.

증명. 연습문제. □

A1.4.29 주목. 아래의 내용은 쉽게 확인된다:

(i) $\omega^2 = \omega\,\omega$;
(ii) 임의의 자연수 $n > 2$에 대하여, $\omega < \omega^2 < \cdots < \omega^n$이다;
(iii) $\omega^\omega = \sup_{n\in\omega} \omega^n$;
(iv) 임의의 자연수 $n > 1$에 대하여 $\omega < \omega^n < \omega^\omega$이다.

A1.4.30 주목. 각각의 서수 ω, ω^ω, ω^{ω^ω}, $\ldots$는 가산서수이다; 즉, 각각의 집합 ω, ω^ω, ω^{ω^ω}, $\ldots$는 가산집합이다. 더욱이, 서수 $\boldsymbol{\varepsilon_0}$는 $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$으로 정의되고, 이것도 또한 가산서수이다. 분명히 $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$이다. 식 $\omega^\alpha = \alpha$를 만족하는 서수 α는 **ε-수**라고 불린다. 서수 ε_0는 가장 작은 ε-수이다. 이 식을 만족하는 다음 서수는 $\boldsymbol{\varepsilon_1}$으로 나타내고, $\sup\{\varepsilon_0 + 1, \omega^{\varepsilon_0+1}, \omega^{\omega^{\varepsilon_0+1}}, \ldots\}$과 같다. 모든 ε-수는 역시 가산서수이다.
이제 우리는 부득이하게 애매모호해진다. 그렇지 않으면 우리는 꽤 많은 깊은 내용을 포함시켜야 되기 때문이다. (Pohlers [259]를 보시오.) 우리는 재귀적인 방법으로 서수를 계속적으로 정의할 수 있다. 더 작은 서수에 의하여 재귀적으로 정의할 수 없는 가장 작은 서수를 **Church-Kleene 서수**라고 부르고, $\boldsymbol{\omega_1^{\mathsf{CK}}}$로 나타낸다. 이것도 또한 가산서수이다. **제1비가산 서수(first uncountable ordinal)**는 $\boldsymbol{\omega_1}$로 나타낸다.

A1.4.31 주목. 기수와 서수는 어떤 관계가 있는가? 모든 기수는 사실상 서수이다. 만약 $Z(\alpha)$를 서수 α에 대등한 모든 서수로 이루어졌다고 정의하면, $Z(\alpha)$는 사실상 집합 α의 멱집합의 부분집합이고, 그러므로 하나의 집합임을 주목하자. 더욱이 $Z(\alpha)$는 **초기서수(initial ordinal)**라고 불리는 최소원 (또는 첫 번째 원소)를 갖는다. 각각의 기수는 어떤 서수 α의 초기서수이다. 우리는 각각의 기수는 극한서수임을 안다.
기수는 항상 서수임을 언급하여, **기수 연산은 서수 연산과 많이 다르다**는 점을 관찰하는 것이 필수적이다. 기수 $\aleph_0$가 서수 ω라는 것 이상으로 멀리 갈 필요는 없다. 그러나, $\aleph_0^{\aleph_0}$는 비가산이지만 ω^ω는 가산이다. 서수의 덧셈과 곱셈은 교환적이 아니지만, 기수의 덧셈과 곱셈은 교환적이다.

우리는 Cantor의 서수에 대한 정규형(Normal Form for ordinals)을 서술하고 이 절을 마치겠다.

A1.4.32 명제. [Cantor의 정규형] 모든 서수는 다음과 같은 형태로 유일하게 표현할 수 있다: $\omega^{\beta_1}c_1 + \omega^{\beta_2}c_2 + \cdots + \omega^{\beta_n}c_n$, 여기서 n은 자연수, $c_1, c_2, \ldots, c_n$은 양의 정수, 그리고 $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \beta_n \geq 0$는 서수이다.

부록 2: 위상수학 유명인들

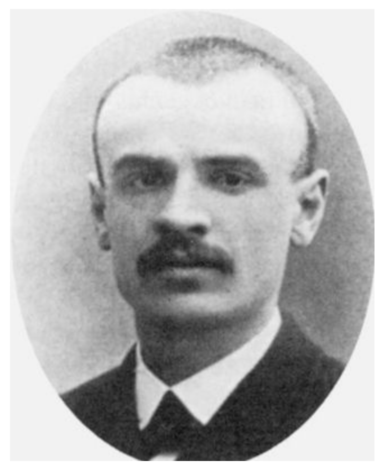
이 부록에 발췌된 자료의 원천은 주로 *The MacTutor History of Mathematics Archive* [304], Bourbaki [43] 그리고 http://en.wikipedia.org이다. 솔직히 말하면 이 절에 있는 모든 내용은 이 자료들로부터 필수적으로 직접 인용이 되도록 다루어져야 하지만, 나는 가끔 단어를 약간 바꾸었고, 여기에는 이 책에 관련성이 있다고 생각되는 내용만 포함시켰다.

그러나, 독자는 http://tinyurl.com/hr4cq3c에 있는 캘리포니아 공과대학의 Barry Simon이 쓴 "조상의 상속(Tales of our Forefathers)"이라는 제목의 재미있는 발표를 읽을 수 있다.

만약 수학사에 관하여 더 배우기를 원한다면, http://tinyurl.com/joelwmy에 있는 호주 New South Wales 대학의 부교수 Norman J. Wildberger의 YouTube 비디오 "Math History: A course in the history of mathematics"를 모두 보거나 일부를 보아도 좋다.

René Louis Baire

René Louis Baire는 1874년에 프랑스 파리에서 태어났다. 1905년에 그는 Dijon 대학의 자연과학부 교수진으로 임명되었고, 1907년에 해석학 교수로 승진했다. 그는 여러 해 동안 병을 앓고난 후 1925년에 퇴직을 했고, 1932년에 사망하였다. 아마도 그의 건강 때문에 가름침에 대한 평가는 다른 것 같다: "어떤 사람은 그의 강의가 매우 분명했다고 서술했지만, 다른 사람은 그가 가르친 것이 너무 어려웠고 이해하는 데 인간의 능력을 넘어섰다고 주장했다."

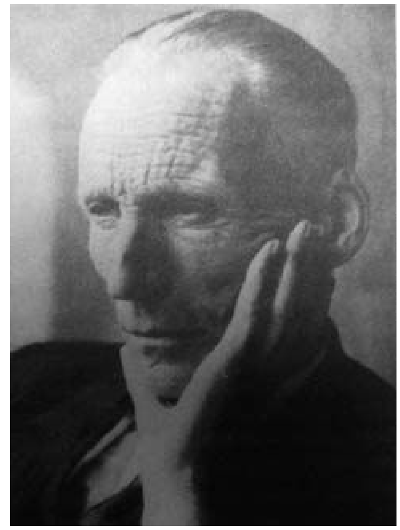


Stefan Banach

Stefan Banach는 1892년에 오스트리아-헝가리–지금은 폴란드–에 있는 Ostrowsko에서 태어났다.

그는 1920년부터 Lvov 공과대학에서 수학을 강의했다. 거기서 함수해석의 탄생이라고 불리는 그의 박사학위를 완성했다. 1920년에 쓴 박사학위 논문에서 그는 오늘날 Banach 공간이라고 불리는 것을 공리적으로 정의했다. 'Banach 공간'이라는 이름은 Fréchet에 의하여 지어졌다. 1924년에 Banach는 정교수로 승진했다. 중요한 일련의 논문을 계속해서 출판했을 뿐 아니라, 그는 고등학교용 산술, 기하, 그리고 대수학에 관한 교재를 썼다. 1929년의 Banach의 열린함수 정리(Open Mapping Theorem)는 1899년 자신의 논문에서 Baire에 의하여 소개했던 집합론적 개념을 사용한다. 두 수학자(Banach와 Alfred Tarski|textbf)의 공동논문인 Banach-Tarski 역설은 1926에 논문집 Fundamenta Mathematicae에 *Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent*라는 제목으로 출판되었다. 수수께끼같은 역설은 하나의 공은 여러 부분으로 나누어질 수 있는데 서로 잘 맞추면 각각이 처음 공과 똑같은 두 개의 공을 만들 수 있다는 것을 보여준다. 선택공리는 분할을 정의하는 데 필요하고, 선택공리가 그러한 비직관적인 결과를 보여줄 수 있다는 사실에 대하여 어떤 수학자들은 공리 사용에 대한 질문을 했다. Banach-Tarski 역설이 이 시기에 공리론적 집합론 상에 행해진 연구에 주요한 공헌을 했다. 1929년에, 그는 Hugo Dyonizy Steinhaus와 함께 새로운 저널 *Studia Mathematica*를 시작했고, Banach와 Steinhaus는 첫 번째 편집자가 되었다. 편집정책은 함수해석과 그에 관련된 주제에 관한 연구에 중점을 두는 것이었다. Banach가 연구했던 방법은 독특했다. 그는 Lvov 카페에서 동료들과 함께 수학을 연구하는 것을 좋아했다. Stanislaw Ulam은 Scottish Café (cf. Mauldin [216])에서 자주 했던 토론을 회상한다: "토론을 하는 동안 Banach보다 더 오래 있거나 더 마시는 것은 어려웠다. 바로 거기서 제안된 문제를 논의했고, 많은 시간 동안 생각했음에도 종종 해결책은 명백히 드러나지 못했다. 그러면 그 다음날 Banach는 그가 완성한 증명을 요약한 여러 장의 작은 종이를 가지고 나타나곤 했었다." 1939년에 제2차 세계대전이 시작되기 바로 직전, Banach는 폴란드 수학회 회장으로 당선되었다. 1941년 6월에 나찌(Nazi)의 Lvov 점령은 Banach가 매우 어려운 환경하에서 살았음을 의미한다. 1941년 말 무렵에 Banach는 감염질병을 다루는 독일 연구소에서 이(lice)에게 먹이를 주는 일을 했다. 이에게 먹이를 주는 일은 1944년 7월까지 나찌의 Lvov 점령의 나머지 기간 동안 그의 삶이 되어 버렸다. Banach는 1945년에 사망하였다.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer



Luitzen Egbertus Jan Brouwer는 1881년 네덜란드 로테르담(Rotterdam)에서 태어났다. 그가 암스테르담(Amsterdam) 대학의 학부생일 때, 4차원 공간에서 연속적 움직임에 대한 독창적인 결과를 증명했다. 그는 1904년에 석사학위를 취득했다. 1907년에 출판된 Brouwer의 박사학위 논문은 수학의 논리기초에 대한 Bertrand Russell과 Jules Henri Poincaré 사이에 진행되는 논쟁에 중대한 기여를 했다. Brouwer는 그의 철학적 발상이 논란을 불러 일으켰다는 것을 빨리 발견했다. Brouwer는 그가 도전한 다양한 문제를 연구하는데 아주 많은 노력을 했다. 왜냐하면 그 문제들이 1900년에 파리 국제수학자총회(International Congress of Mathematicians)에서 제시된 David Hilbert의 목록에 나타났기 때문이다. 특히 Brouwer는 Lie 군론에 관련된 Hilbert의 다섯번째 문제에 도전했다. 그는 1908년 로마 국제수학자총회에서 Lie군의 위상적 기초에 대한 연설을 했다. Brouwer는 1912년에 로얄 과학아카데미(Royal Academy of Sciences)로 선출되었고, 같은 해에 암스테르담 대학에서 집합론, 함수론 그리고 공리론의 객원교수로 임명받았다; 1951년 정년퇴임할 때까지 그 지위을 유지했다. 1919년에서 1923년까지 암스테르담에서 공부했던 Bartel Leendert van der Waerden은 강사 Brouwer에 대하여 이렇게 썼다: *강의를 하기 위해서는 일반적으로 암스테르담에서 살아야 했지만 Brouwer는 예외로 Laren에서 살면서 일주일에 단 한 번 대학에 왔다. ... 나는 한 번 질문을 하느라 강의시간에 그를 방해했다. 그 다음 주 강의 전에 조교가 나에게 와서 Brouwer는 수업시간에 질문을 받기를 원하지 않는다고 말했다. 그는 결코 질문을 원치 않았고, 결코 학생들을 향하지 않고 항상 칠판만 바라보고 있었다.* 그의 대부분의 중요한 연구 기여는 위상수학였을지라도, Brouwer는 결코 위상수학에 관한 강의는 하지 않았다. 그러나 항상 – 그리고 오직 – 직관주의 기초에 대한 강의만 했다. 그는 위상수학에서 그의 결과를 더 이상 확신하지 못한 것처럼 보였다. 왜냐하면 그 결과들이 직관주의 관점에서 보면 옳지 않았기 때문이고, 그가 전에 행했던 모든 위대한 결과들을 그의 철학에 따르면 거짓이라고 판단했기 때문이다. 이 인용구에서 언급한 것처럼, Brouwer는 위상수학 이론에 주요한 기여자였고 그리고 많은 사람들이 그를 위상수학 창시자로 생각한다. 1909년과 1913년 사이의 초기 경력 상에는 위상수학에 관한 거의 모든 연구를 했다. 그는 데카르트 평면 위의 위상적 함수의 특성화와 많은 고정점 정리를 발견했다. 그의 첫 번째 고정점 정리는 Hilbert의 다섯 번째 문제에 대한 연구에서 나온 정리로써 구(sphere)에서 구 자신으로의 방향을 보존하는 연속인 단사함수는 항상 적어도 하나의 고정점을 갖는다는 것을 보였다. 원래는 2-차원 구에 대하여 증명했고, 나중에 n-차원 구로 결과를 일반화했다. 특별히

중요한 다른 결과는 위상적 차원의 불변량을 증명한 것이었다. 위상수학에서 매우 중요한 정리의 증명 뿐 아니라 그 주제에 관한 표준 도구가 된 방법을 발전시켰다. 특히 그는 구간적 선형 연속함수에 의하여 연속함수를 근사시키는 단순근사법(simplicial approximation)을 사용했다. 그는 또한 함수의 차수에 관한 아이디어를 소개했고, Jordan 곡선정리(Jordan curve theorem)를 n-차원 공간으로 일반화했고, 1913년에 위상공간을 정의했다. 위의 인용에서, Van der Waerden에 의하면, Brouwer는 위상적 결과가 수학적 직관주의와 맞지 않아서 자신의 결과에 대해서 강의를 하지 않았다고 말했다. 사실상 Brouwer는 많은 수학자들에게 수학적 직관주의의 창시자로 잘 알려져 있는데, 수학적 직관주의는 수학을 자명한(self-evident) 법칙에 의하여 지배되는 정신상태의 형식화로 본다. 그의 주의는 Hilbert의 형식주의와 Russell의 논리주의와는 상당히 다르다. 1907년에 그의 박사학위 논문에서 수학의 논리적 기초에 도전했고, 직관론자 학파를 창시했다. 1908년 그의 논문 *논리적 원리의 불확실성(The Unreliability of the Logical Principles)*에서, Brouwer는 수학적 증명에서 모든 수학적 명제는 참 또는 거짓이라는 배중률(Principle of the Excluded Middle)을 거부했다. 1918년에 그는 배중률을 사용하지 않고 진보된 집합론을 출간했다. 그는 1932년에 네덜란드 사자 훈장(Order of the Dutch Lion)의 기사(Knight)가 되었다. 그는 새로운 저널을 만드는데 적극적이었고 1934년에 출간을 시작한 Compositio Mathematica의 설립 편집장이 되었다. 제2차 세계대전 중에 Brouwer는 네덜란드 레지스탕스를 돕는데 적극적이었고, 특히 이 어려운 시기에 유태인 학생을 후원했다. 1951년 정년퇴임 후에, Brouwer는 1952년에 남아프리카에서 강의했고, 1953년에 미국과 캐나다에서 강의했다. 1962년에, 그의 80대 나이에 잘 지내야 함에도 불구하고, Montana에서 직위를 부여받았다. 그는 1966년에 네덜란드 Blaricum에서 교통사고로 사망하였다.

Maurice Fréchet

Maurice Fréchet는 1878년 프랑스에서 태어났고 1906년에 그의 박사학위 논문에서 거리공간의 개념과 컴팩트성 (7장 참조)을 소개했다. 1928년에서 1948년 사이에 파리 대학을 포함한 여러 대학에서 교수직을 맡았다. 그의 연구는 위상수학, 확률론, 그리고 통계학에 중요한 기여를 했다. 그는 1973년에 사망했다.

Felix Hausdorff

Sketch by Karl Heinrich Hofmann

20세기 전반의 뛰어난 수학자 중의 한 명은 **Felix Hausdorff**였다. 그는 위상수학, 거리공간, 함수해석, Lie 대수와 집합론 분야에서 획기적인 일을 했다. 그는 1868년에 독일 Breslau–지금은 폴란드 Wrocław–에서 태어났다. 그는 Leipzig 대학을 졸업하고 그 대학에서 일을 하다가 1910년에 Bonn 대학의 학과장으로 부임했다. 1935년에 유태인으로서 그는 나찌 뉘른베르크(Nazi Nuremberg) 법에 의하여 그의 교수직을 떠나게 되었다. 그는 여러 해 동안 수학 연구를 계속 했지만, 오직 독일 외 지역에만 그의 연구결과를 발표할 수 있었다. 1942년에 그는 포로 수용소로 되돌아갈 예정이었지만, 아내와 누이와 함께 자살을 했다.

Wacław Sierpiński

Wacław Sierpiński는 1882년에 러시아 제국–지금은 폴란드–바르샤바(Warsaw)에서 태어났다. 바르샤바 대학을 졸업한지 50년 후에, Sierpiński는 러시아 점령시대에 학위를 받은 폴란드 사람으로서 그가 가지고 있었던 문제를 되돌아 보았다: *. . . 우리는 1년에 한 번 있는 러시아어 강의에 출석해야 했다. . . . 학생들 각자는 그 과목에서 최악의 결과를 얻는 것을 영광으로 생각했다. . . . 나는 한 질문에 대해서도 답변을 안했다. . . . 그리고 나는 불만족스러운 학점을 받았다. ... 나는 모든 시험을 통과했다. 그 당시에 대학 강사는 나에게 재시험을 치르기를 제안했다. 그렇지 않으면, 나는 수리과학 후보자의 학위를 얻을 수 없었다. . . . 나는 우리대학에서 모든 과목에서 매우 우수한 학점을 받고, 논문이 통과되고 금메달을 받은 어떤 학생이 수리과학 후보자 학위를 받지 못하고, 러시아어 과목 하나만 낮은 학점을 받았기 때문에 하위등급 학위인 '실제 대학생(real student)'학위를 (이상하게도 그것을 소위 하위등급 학위라고 부름) 받은 첫 경우가 될 것이라고 말하며 그의 제안을 거절했다. Sierpiński는 운이 좋게도 대학강사가 러시아어 과정 학점을 '우수'로 변경해 주어서 학위를 받을 수 있었다.* Sierpiński는 1904년에 졸업하고 여학교에서 수학과 물리 교사로 일했다. 그러나 파업으로 인해 학교가 폐교되고, Sierpiński는 박사학위 공부를 위해 Kraków로 갔다. Kraków에 있는 Jagiellonian 대학에서 박사학위를 받고 1908년에 Lvov 대학 교수로 임명되었다. 1907년에 Sierpiński는 처음으로 집합론에 관심을 갖게 되었다. 그는 평면에 있는 점들은 하나의 좌표로 언급될 수 있다고 말하는 정리를 우연히 발견했다. 그는 그러한 결과가 어떻게 가능한지를 물었던 Tadeusz Banachiewicz에게 편지를 썼다. 그는 한마디 답변 (Georg) 'Cantor'을 받았다. Sierpiński는 집합론 공부를 시작했고, 1909년에 그는 생전 처음으로 집합론 강의에 열정을 쏟았다. 그가 Lvov 대학에서 가르친 기간인 1908년에서 1914년까지 많은 연구 논문 외에 세 권의 책을 출판했다. 이 세 권의 책은 *무리수 이론(The theory of Irrational numbers)*(1910), *집합론의 개요(Outline of Set Theory)*(1912) 그리고 *정수론(The Theory of Numbers)*(1912)이었다. 1914년에 제1차 세계대전이 시작되었을 때, Sierpiński와 그의 가족은 러시아에 있게 되었다. Sierpiński는 Viatka에 억류되어 있었다. 그러나 Dimitri Feddrovich Egorov와 Nikolai Nikolaevich Luzin이 그가 억류되어 있다는 소식을 듣고 그에게 모스크바(Moscow)로 가는 것이 허용되도록 계획을 세웠다. Sierpiński는 Luzin과 함께 일하면서 나머지 전쟁기간을 모스크바에서 보냈다. 그들은 함께 해석적 집합의 연구를 시작했다. 1918년 제1차 세계대전이 끝났을 때, Sierpiński는 Lvov로 돌아왔고 곧바로 바르샤바 대학에서 교수직을 수락받았다. 1919년에 그는 정교수로 승진하고 거기서 여생을 보냈다. 1920

년에 Sierpiński는 그의 제자 Stefan Mazurkiewicz와 함께 중요한 수학 학술지 Fundamenta Mathematica를 창간했다. Sierpiński는 집합론에 관한 논문의 전문 학술지를 편집했다. 이 시점으로부터 Sierpiński는 대부분이 집합론을 공부했지만 점집합 위상과 실변수 함수론도 공부했다. 집합론에서 그는 선택공리와 연속체 가설에 중요한 기여를 했다. 그는 Sierpiński 곡선을 연구했다. 이것은 정사각형의 모든 내점을 포함하는 닫힌 경로–"공간-채우기 곡선(space-filling curve)"을 묘사한다. 곡선의 길이는 무한대이지만, 곡선에 의하여 둘러싸인 면적은 단위 정사각형의 5/12이다. 두 개의 프랙탈–Sierpiński 삼각형 그리고 Sierpiński 카펫–은 그의 이름을 따서 명명되었다. Sierpiński는 Luzin과 함께 해석적 집합과 사영적 집합에 대한 공동연구를 계속했다. Sierpiński는 또한 폴란드의 수학발전과 깊이 관련되어 있다. 1921년에 그는 폴란드 아카데미에 선출되었고, 바르샤바 대학 학장이 되었다. 1928년에 그는 바르샤바 과학자 협회의 부회장이 되었고, 폴란드 수학회 회장으로 선출되었다. 1939년에 제2차 세계대전의 도래로 인하여 바르샤바에서의 삶이 비극적으로 바뀌었다. Sierpiński는 '지하 바르샤바 대학(Underground Warsaw University)'에서 계속해서 일을 했지만, 그의 공식적인 직업은 바르샤바 의회사무실의 사무원이었다. 그의 논문은 가까스로 이탈리아로 보내졌기 때문에 출판은 계속되었다. 각각의 논문은 다음과 같은 말로 끝을 맺었다: *이 정리의 증명은 Fundamenta Mathematica에 출판될 것이다*, 이것으로부터 모든 사람은 '폴란드는 살아 있다'는 것을 의미하는 것으로 이해했다. 1944년 폭동 후에 나찌는 그의 집을 불태워 서재와 개인편지를 없애 버렸다. 1945년에 Sierpiński는 그의 강의시간에 전쟁의 비극적인 사건을 이야기했다. 그는 전쟁에서 죽은 그의 제자 이야기를 했다: *1941년 7월에 나의 가장 오래된 제자 중의 한 명인 Stanislaw Ruziewicz가 살해되었다. 그는 Lvov에 있는 Jan Kazimierz 대학의 퇴직교수였다. . . . 그는 뛰어난 수학자였고 탁월한 선생님이었다. 1943년에 나의 가장 쟁쟁한 제자 중의 한 명인 Stanislaw Saks가 살해되었다. 그는 바르샤바 대학의 조교수였고, 적분론 분야의 세계적인 선두 전문가였다. . . . 1942년에 나의 또 다른 학생인 Adolf Lindenbaum이 살해되었다. 그는 바르샤바 대학의 조교수였고 집합론 분야의 뛰어난 저자였다.* 전쟁에서 살해된 동료들의 명단, 예를 들어, Juliusz Pawel Schauder 그리고 전쟁의 결과로 죽은 다른 사람들, 예를 들어, Samuel Dickstein과 Stanislaw Zaremba를 추가한 후에, Sierpiński는 계속했다: *그러므로 우리의 아카데미 스쿨에서 강의했던 수학자의 절반 이상이 목숨을 잃었다. 그것은 집합론과 위상수학과 같은 몇몇의 분야에서 호의적으로 발전을 시킨 폴란드 수학자의 큰 손실이었다. . . . 전쟁 중에 독일의 만행 때문에 애통한 인적손실로 폴란드 수학이 고통을 겪었을 뿐 아니라, 물질적 손실을 입었다. 그들은 수천권의 논문집, 잡지, 수학책 그리고 여러 저자들의 수천권의 수학에 관한 저작물의 재판을 보유하고 있던 바르샤바 대학 도서관을 불태웠다. Fundamenta Mathematica(32권)의 거의 모든 판과 10권의 수학논문(Mathematical Monograph)이 완전히 타 버렸다. 바르샤바 대학의 4명의 수학 교수의 개인 서재와 전쟁 기간에 쓴 그들의 상당히 많은 논문 그리고 편람 역시 타 버렸다.* Sierpiński는 724편의 놀랄만한 논문과 50권의 책의 저자였다. 그는 바르샤바 대학에서

1960년에 교수로 퇴직했지만 1967년까지 폴란드 과학 아카데미(Polish Academy of Sciences)에서 정수론 세미나를 계속했다. 그는 또한 1958년에 시작한 Acta Arithmetica의 주편집자로서 편집일을 계속해서 했고, Rendiconti dei Circolo Matimatico di Palermo, Compositio Mathematica 그리고 Zentralblatt für Mathematik의 편집위원 역할을 했다. Sierpiński의 제자였던 Andrzej Rotkiewicz는 다음과 같이 기록했다: *Sierpiński는 특별히 좋은 건강과 쾌활한 성격의 소유자였다. . . . 그는 어느 상황 하에서도 연구를 할 수 있었다.* Sierpiński는 1969년에 사망하였다.

부록 3: 카오스 이론과 동력계

§A3.0 소개

이 부록에서 우리는 동력계(dynamical systems)와 카오스 이론을 간단히 맛보려 한다. 대부분의 내용은 연습문제에 들어있다. 이 부록의 어떤 부분은 약간의 미적분학 지식을 필요로 한다. 만약 미적분학[13]을 배우지 않았다면, 독자는 이 부록 모두를 생략하거나 맛을 보기 위하여 전체를 훑어 볼 수 있다.

A3.1 반복과 궤도

A3.1.1 정의. S를 집합 그리고 f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하자; 즉, $f\colon S \to S$라 하자. 함수 $f^1, f^2, f^3, \ldots, f^n, \ldots$은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다:
$f^1\colon S \to S$는 $f^1(x) = f(x)$로 주어진다; 즉, $f^1 = f$;
$f^2\colon S \to S$는 $f^1(x) = f(f(x))$로 주어진다; 즉, $f^2 = f \circ f$;
$f^3\colon S \to S$는 $f^3(x) = f(f(f(x)))$로 주어진다; 즉, $f^3 = f \circ f \circ f = f \circ f^2$;
그리고 만약 f^{n-1}이 알려져 있으면
$f^n\colon S \to S$는 $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$로 정의된다; 즉, $f^n = f \circ f^{n-1}$.
각각의 함수 $f^1, f^2, f^3, \ldots, f^n, \ldots$을 함수 f의 **반복(iterate)**이라고 부른다.

$n, m \in \mathbb{N}$에 대하여 $f^{n+m} = f^n \circ f^m$임을 주목하자.

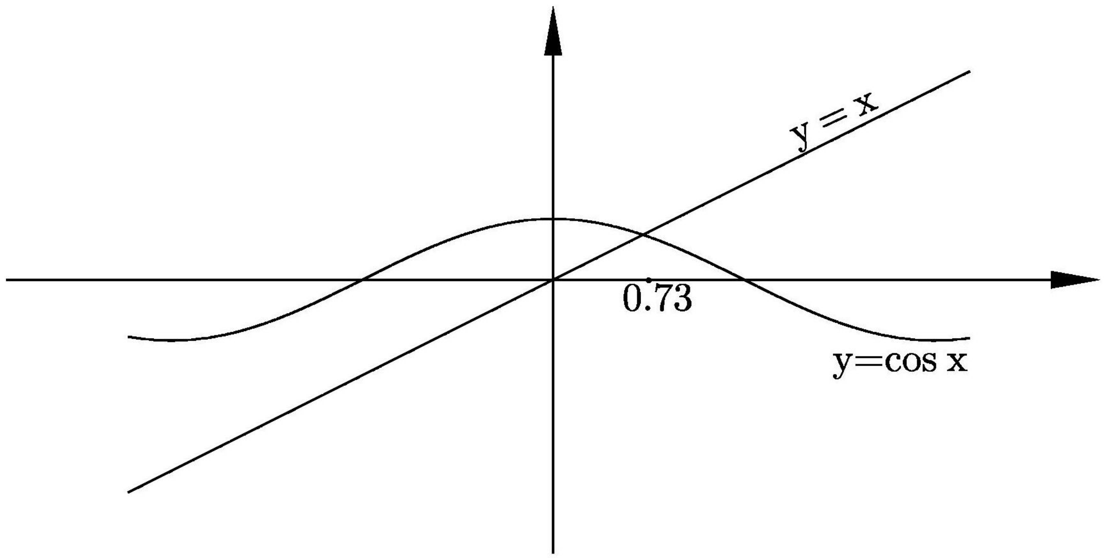
A3.1.2 정의. f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하자. 만약 $x_0 \in S$이면, 수열 $x_0, f^1(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots$를 점 x_0의 **궤도(orbit)**라고 부른다. 점 x_0은 궤도의 **씨(seed)**라고 불린다.

궤도에 대한 여러 가능성이 있지만, 가장 중요한 유형은 고정점이다.

A3.1.3 정의. f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하자. 점 $a \in S$에 대하여 만약 $f(a) = a$이면, $a \in S$를 f의 **고정점(fixed point)**이라고 부른다.

[13]만약 이 영역에서 독자의 지식을 재충전하고 싶으면, G.H. Hardy가 쓴 고전적인 책 "A course of pure mathematics"를 보아도 좋다. 이것은 http://www.gutenberg.org/ebooks/38769에 있는 Project Gutenberg 로부터 무료로 내려 받을 수 있다.

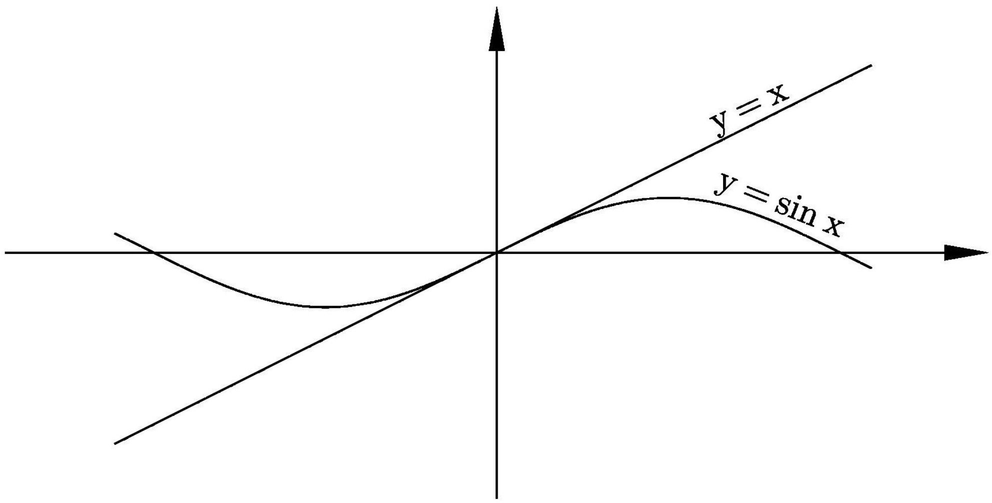
A3.1.4 보기. 그래프를 이용하여, 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 모든 고정점을 찾을 수 있다. 곡선 $y = f(x)$를 스케치하고 곡선이 직선 $y = x$와 만나는 곳을 보면 간단하게 고정점을 찾을 수 있다. 교차점과 이러한 점들에 대해서만 $f(x) = x$가 성립한다.



The fixed point of f(x) = cos x is x = .739085133 approximately

□

A3.1.5 보기.



The fixed point of f(x) = sin x is x = 0

□

연습문제 A3.1

1. 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여, 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 그리고 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = x\sin x$, 그리고 $h(x) = x^2 - 2$로 주어졌다고 하자.
   (a) $f^1(x)$와 $f^2(x)$의 값을 구하시오.
   (b) $g^2(x)$와 $g^2(1)$의 값을 구하시오.
   (c) $h^2(x)$와 $h^3(x)$의 값을 구하시오.

2. (a) $C(x) = \cos(x)$일 때, [소수점 4자리 라디안의] 계산기를 이용하여 $C^{10}(123)$, $C^{20}(123)$, $C^{30}(123)$, $C^{40}(123)$, $C^{50}(123)$, $C^{60}(123)$, $C^{70}(123)$, $C^{80}(123)$, $C^{90}(123)$, $C^{100}(123)$, $C^{100}(500)$ 그리고 $C^{100}(1)$을 계산하시오. 무엇을 주목했는가?
   (b) $S(x) = \sin(x)$일 때, 계산기를 이용하여 $S^{10}(123)$, $S^{20}(123)$, $S^{30}(123)$, $S^{40}(123)$, $S^{50}(123)$, $S^{60}(123)$, $S^{70}(123)$, $S^{80}(123)$, $S^{90}(123)$, $S^{100}(123)$을 계산하시오. 무엇을 주목했는가?

3. $x \in \mathbb{R}$에 대하여, 함수 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $h(x) = x^2$에 의하여 정의되었다고 하자. 다음의 각각의 씨에 대하여 함수 h의 궤도를 계산하시오: 0, 1, -1, 0.5, 0.25.

4. 위의 연습문제 1에 있는 함수 f의 모든 고정점을 찾으시오.
5. 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(x) = x^3 - 3x$로 주어졌다고 하자. 함수 f의 모든 고정점을 찾으시오.

A3.2 고정점과 주기점

A3.2.1 정의. f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하자. 만약 점 $a \in S$가 고정점은 아니지만, a의 궤도 상의 어떤 점이 고정점이면, a를 **궁극적인 고정점(eventually fixed point)**이라고 부른다.

A3.2.2 정의. f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하고, $x \in S$라 하자. 만약 어떤 양의 정수 p가 존재하여 $f^p(x) = x$이면, x를 **주기점(periodic point)**이라 부른다. 만약 m이 $f^n(x) = x$를 만족하는 최소의 $n \in \mathbb{N}$이면, m을 x의 **소주기(prime period)**라 부른다.

A3.2.3 정의. f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하자. 만약 점 $x_0 \in S$가 자신은 주기적은 아니지만, x_0의 궤도에 있는 어떤 점이 주기적이면, x_0를 **궁극적으로 주기적(eventually periodic)**이라고 한다.

A3.2.4 주목. 우리는 주어진 점이 고정적, 궁극적으로 고정적, 주기적, 또는 궁극적으로 주기적일 수 있음을 보았다. 그러나, 대부분의 점들은 이러한 부류의 어디에도 속하지 않는다는 것을 깨닫는 것이 중요하다. □

연습문제 A3.2

1. 점 -1은 $f(x) = x^2$의 궁극적인 고정점임을 입증하시오.
2. 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$의 궁극적인 고정점을 찾으시오.
3. 만약 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$로 주어지면, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, 그리고 $f(2) = 0$이다. 따라서 0의 궤도는 $0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots$임을 입증하시오. 따라서 0은 소주기 3의 주기점이다.

4. 만약 x가 함수 $f\colon S \to S$의 소주기 m의 주기점이면, x의 궤도는 정확하게 m개의 점을 갖는다는 것을 증명하시오.

   [힌트: 먼저 점 x의 궤도를 적어 놓고 그 안에 많아야 m개가 있음을 유도하시오. 다음으로 x의 궤도 안에 m개 미만의 서로 다른 점이 존재한다고 $\boxed{\text{가정}}$하고, 이것은 주기 m을 갖는 x에 $\boxed{\text{모순}}$임을 보이시오.]

5. 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(x) = x^2 - 1$로 주어졌다고 하자. 점 $\sqrt{2}$와 1은 궁극적으로 주기적임을 입증하시오.

6. 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |1 - x|$를 생각하자.
   (i) f의 모든 고정점을 찾으시오.
   (ii) 만약 m이 홀수이면, m의 궤도에 대하여 무엇을 말할 수 있는가?
   (iii) 만약 m이 짝수이면, m의 궤도에 대하여 무엇을 말할 수 있는가?

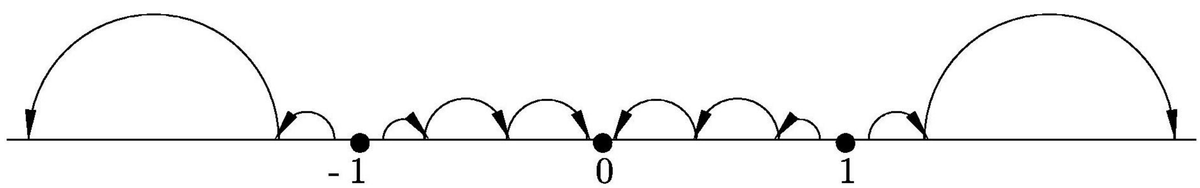
A3.3 위상모방, 끌어당기고 밀어내는 고정점

우리는 동력계(dynamical systems), 즉, 움직이는 과정을 공부하려고 한다. 예를 들어 행성의 움직임이 그러한 과정에 포함되고, 이 이론이 적용되는 다른 동력계에는 기후(weather)와 인구성장(population growth)이 있다. 어떤 사람은 동력계의 연구가 주식시장의 움직임을 이해하는데 도움이 될 것으로 느낀다.

동력계의 모든 궤도를 그리는 아주 좋은 방법은 동력계의 위상모방(phase portrait)이다. 이것은 궤적의 실직선 상의 그림이다.

위상모방에서 우리는 고정점은 **솔리드 점(solid dots)**으로 나타내고 궤적을 따라 움직이는 동역학은 **화살표(arrows)**로 나타낸다.

A3.3.1 보기. 만약 $f(x) = x^3$이면, 고정점은 0, 1, 그리고 -1이다. 만약 $|x_0| < 1$이면, x_0의 궤도는 0에 수렴하는 수열이다; 우리는 이것을 $f^n(x_0) \to 0$로 쓴다. 만약 $|x_0| > 1$이면, 궤도는 ∞로 발산하는 수열이다; 즉, $f^n(x_0) \to \pm\infty$이다. 위상모방은 아래에 있다:



Phase portrait of $f(x) = x^3$

□

A3.3.2 정의. a를 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 고정점이라 하자. 만약 a를 포함하는 열린구간 I가 존재해서, 임의의 $x \in I$에 대하여, $n \to \infty$일 때 $f^n(x) \to a$이면, 점 a를 $\boldsymbol{f}$의 **끌어당기는 고정점 (attracting fixed point)**이라 부른다.

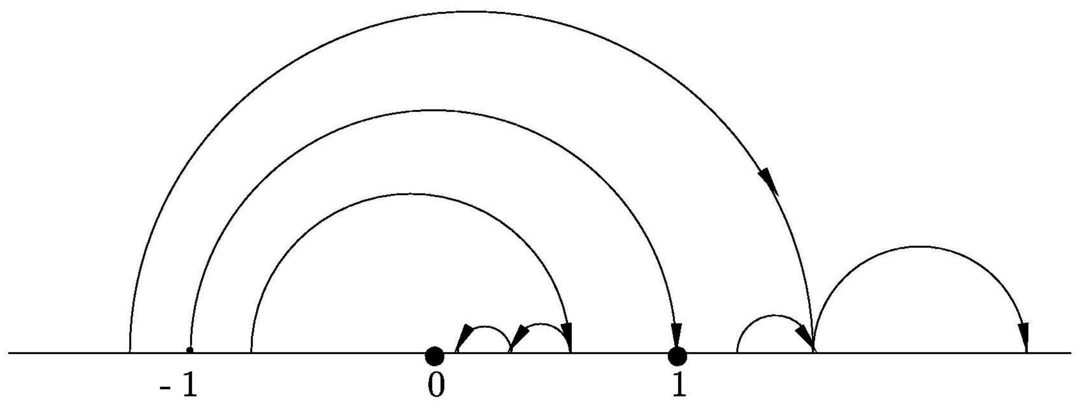
A3.3.3 정의. a를 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 고정점이라 하자. 만약 a를 포함하는 열린구간 I가 존재해서, 임의의 $x \in I$에 대하여, $x \neq a$일 때 어떤 정수 n이 존재하여 $f^n(x) \notin I$이면, 점 a를 $\boldsymbol{f}$의 **밀어내는 고정점(repelling fixed point)**이라 부른다.

A3.3.4 보기. 0은 $f(x) = x^3$의 끌어당기는 고정점이지만, -1과 1은 이 함수의 밀어내는 고정점임을 관찰하자. □

A3.3.5 정의. 끌어당기지도 않고 밀어내지도 않는 고정점을 **중립적인 고정점(neutral fixed point)**이라 부른다.

연습문제 A3.3

1. 아래 그림은 $f(x) = x^2$의 올바른 위상모방임을 입증하고, 밀어내거나, 끌어당기거나, 또는 중립적인 고정점을 찾으시오.



Phase portrait of $f(x) = x^2$

2. 다음 각각의 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여 위상모방을 그리시오. 어느 고정점이 끌어당기거나, 밀어내거나, 또는 중립적인지를 결정하시오.

   (i) $f(x) = -x^3$.

   (ii) $f(x) = 4x$.

   (iii) $f(x) = x - x^2$.

   (iv) $f(x) = \sin x$.

3. $D\colon [0,1) \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의된 **배가함수(doubling function)**라 하자:

$$D(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

[우리는 D를 더 간결하게 $D(x) = 2x \pmod 1$로 정의할 수 있다.]

(i) 점 $\frac{1}{99}$은 주기점임을 입증하고 그것의 소주기를 찾으시오.

(ii) 각각의 양의 정수 n에 대하여, $\frac{1}{n}$이 주기점이거나 궁극적인 주기점인 이유를 설명하시오.

(iii) 각각의 양의 정수 n에 대하여, $\frac{1}{2^n}$이 궁극적인 고정점인 이유를 설명하시오.

(iv) $0 \le x < 1$에 대하여, $D^2(x)$와 $D^3(x)$에 대한 명확한 공식을 쓰시오.

(v) D^2와 D^3의 모든 고정점을 찾으시오.

4. 함수 $f(x) = 2x(1-x)$의 위상모방을 그리시오. [이것이 인구 증가(population growth)와 생태학(ecology)의 연구에서 자연스럽게 야기되는 소위 말하는 **로지스틱 함수(logistic function)**이다.]

A3.4 그래프 분석

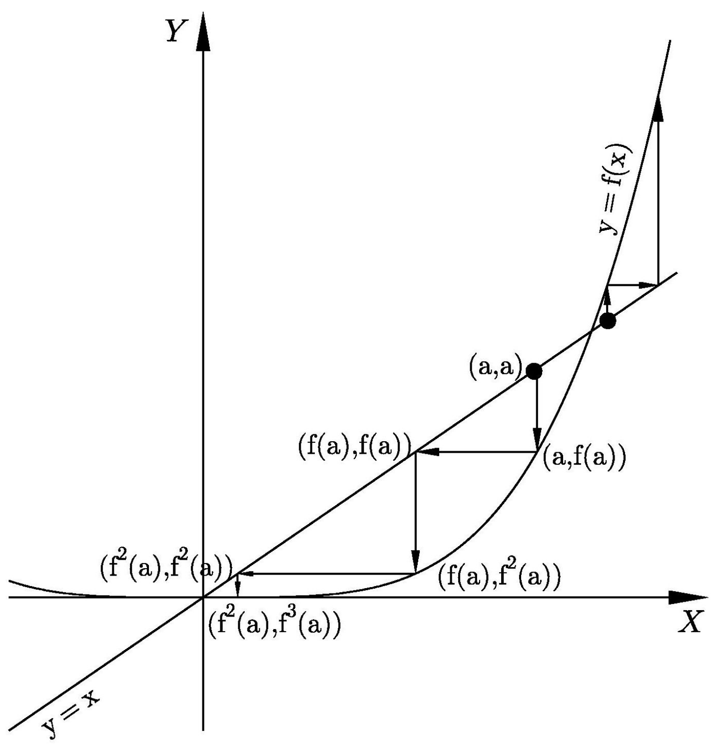
A3.4.1 주목. 우리는 점 x_0가 고정점, 주기점, 또는 궁극적인 주기점인지를 결정하기 위하여 위상모방을 사용했다. 이 방법은 2차원 이상을 다룰 때 특히 유용하다. 그러나 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여, 우리는 **그래프 분석(graphical analysis)**을 이용할 수 있다. 이것은 다음과 같이 수행된다.

주어진 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여, 우리는 점 $x_0 \in \mathbb{R}$의 성질을 결정하라는 질문을 받는다. 우리가 해야 할 것은 x_0 근처의 점 a의 궤적을 찾는 것이다. 함수 f의 개형을 그리고 그 그래프와 직선 $y = x$의 그래프와의 겹치기 기법에 의하여 시작한다.

점 a의 궤적을 찾기 위하여, 점 (a, a)를 표시하자. 다음에 점 $(a, f(a))$에서 f의 그래프를 만나도록 수직선을 그리자. 그 다음에 점 $(f(a), f(a))$에서 직선 $y = x$를 만나도록 수평선을 그리시오. 이제 점 $(f(a), f^2(a))$에서 f의 그래프를 만나도록 수직선을 그리시오. 다시 점 $(f^2(a), f^2(a))$에서 직선 $y = x$를 만나도록 수평선을 그리시오. 이 과정을 계속하면 점 a, $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $\ldots$이 a의 궤도를 이룬다. $\square$

A3.4.2 보기. 이제 우리는 $f(x) = x^4$에 의하여 정의된 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 생각하자. 곡선 $y = x^4$의 그래프와 직선 $y = x$가 겹쳐지게 그리자. 고정점을 찾기 위해서 $f(x) = x$의 해를 구한다; 즉, $x^4 = x$을 푼다.

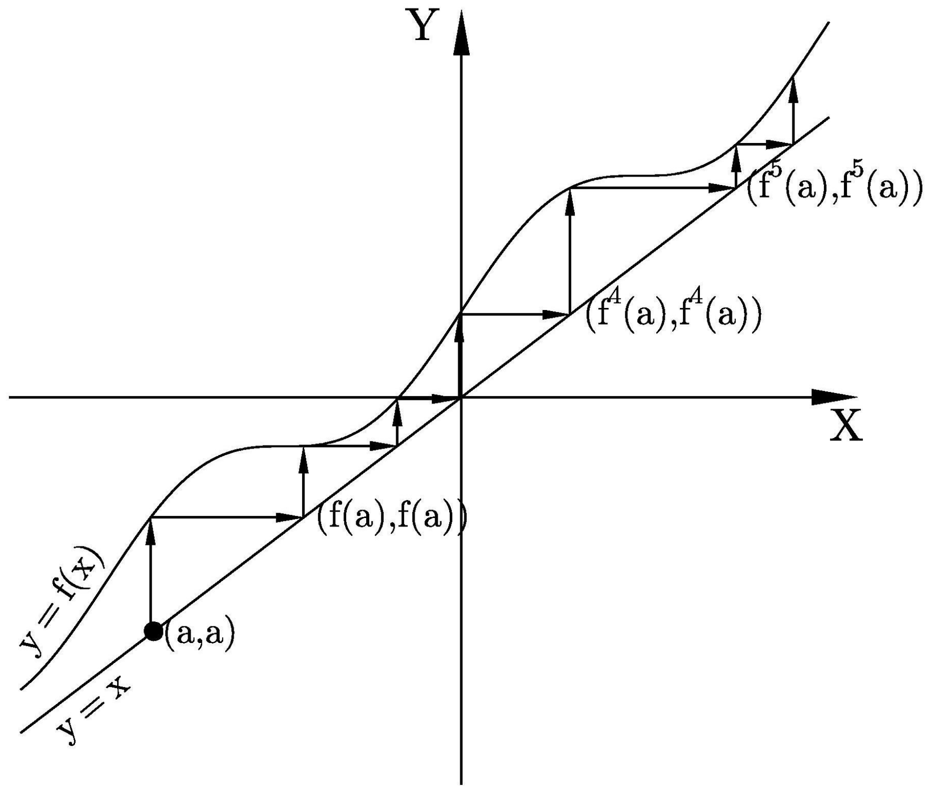
고정점은 0과 1임을 쉽게 알 수 있다. 0과 1 근처에 있는 점들의 궤도를 찾기 위하여, 위에서 언급한 그래프 분석을 적용하자. 아래 그림에 있는 분석은 1 근처에 있는 점들에서 일어나는 것을 보여준다.



□

다음 예제는 서로 다른 함수에 대하여 그래프 분석이 어떻게 다른지를 나타내는 두 개 이상의 그래프 분석을 보여준다. 그러면 독자 스스로가 그래프 분석을 수행하는 경험을 얻게 될 것이다.

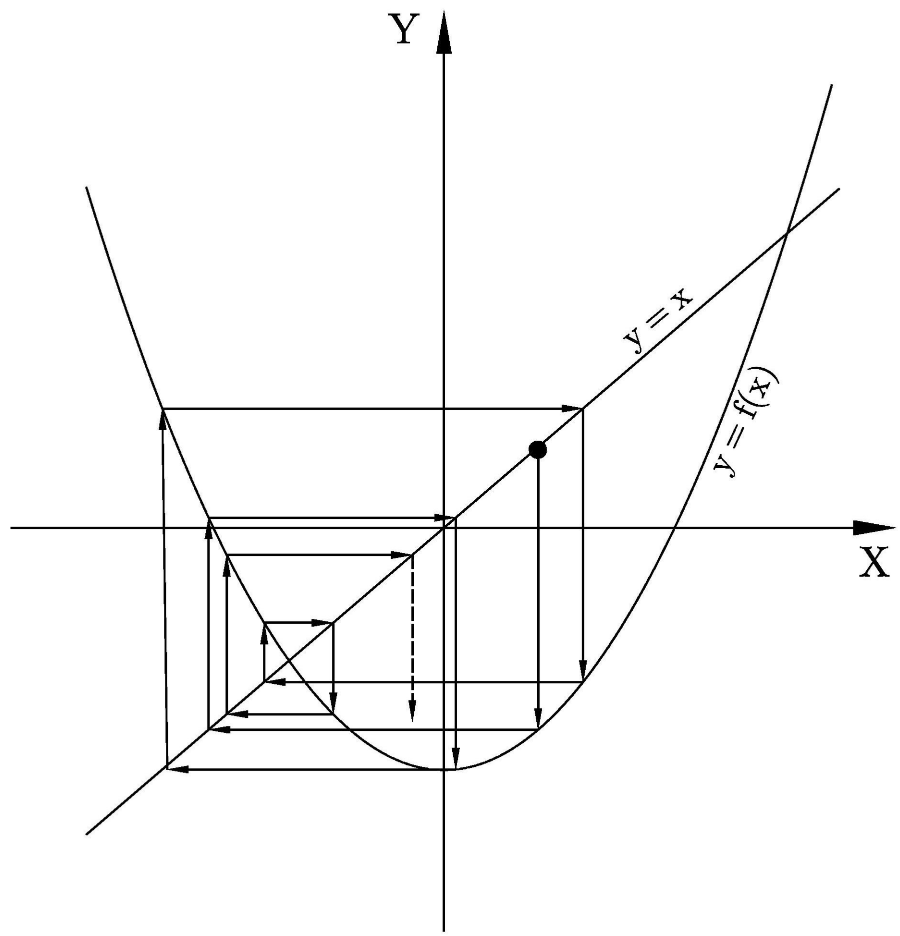
A3.4.3 보기.



위의 그림에서 $f(x) = \sin x + x + 2.$

□

A3.4.4 보기.



위의 그림에서 $f(x) = x^2 - 1.5$.

□

연습문제 A3.4

1. 그래프 분석에 의하여 함수 $f(x) = x^4$의 각각의 고정점이 끌어당기는 고정점, 밀어내는 고정점, 또는 중립적 고정점인지를 결정하시오.

2. 그래프 분석을 이용하여 함수 $f(x) = 2x$의 궤도를 서술하고, 그것이 가지고 있는 고정점의 형태를 결정하시오.

3. 함수 $f(x) = \sqrt{x}$의 고정점을 찾고 그래프 분석을 이용하여 그들의 성질을 결정하시오 (즉, 그들이 끌어당기는 고정점인지, 밀어내는 고정점인지, 또는 중립적 고정점인지를 결정하시오).

4. 그래프 분석을 이용하여 함수 $f(x) = x - x^2$의 모든 궤도의 운명을 서술하시오.

5. 그래프 분석을 이용하여 함수 $f(x) = e^x$의 모든 궤도의 운명을 서술하시오.

6. $f(x) = |x - 2|$라 하자. 그래프 분석을 이용하여 f의 다양한 궤도를 나열하시오. 다른 색깔을 사용하면 도움이 될 수 있다; 예를 들어, 주기적 궤도에 대해서 하나의 색깔, 궁극적인 주기적 궤도에 대해서 다른 색깔, 궁극적 고정점에 대해서 또 다른 색깔의 사용이 도움이 될 수 있다.

7. $D : [0, 1) \to [0, 1)$를 $D(x) = 2x \pmod 1$에 의하여 주어진 배가함수라 하자.

   (i) $x \in [0, 1)$는 유리수일 $\boxed{\text{필요충분조건}}$은 x가 D의 주기점이거나 궁극적인 주기점임을 증명하시오.

   (ii) D의 모든 주기점들의 집합은
   $$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{0, \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2}{2^n - 1}, \frac{3}{2^n - 1}, \dots, \frac{2^n - 2}{2^n - 1}\right\}$$
   임을 입증하시오.

   [힌트: D^n에 대한 공식을 적어 놓고 D^n의 그래프와 직선 $y = x$의 교점을 계산하는 것이 도움이 될 수 있다.]

   (iii) D의 주기점의 집합은 $[0, 1)$에서 조밀함을 입증하시오. [우리는 이것이 동력계 $([0, 1), D)$가 혼돈(chaotic)임을 보이기 위하여 요구되는 두 조건 중의 하나임을 알게 될 것이다.]

A3.5 분기점

A3.5.1 주목. 모든 연속함수 $f\colon S \to \mathbb{R}$가 고정점을 갖는지를 묻는 것은 당연하다. 여기서 $S \subseteq \mathbb{R}$이다. 대답은 쉽게 $\boxed{\text{아니오}}$이다. 예를 들어, 만약 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$이면, 분명히 고정점이 존재하지 않는다. 그러므로 $[0,1]$에서 자기자신으로의 $\boxed{\text{모든}}$ 연속함수의 고정점의 존재성을 보장할 수 있다는 것은 주목할만 하다. 보다 구체적으로, 우리는 이미 다음의 따름정리를 보았고 증명했다:

5.2.11 따름정리. (고정점 정리) f를 $[0,1]$에서 $[0,1]$로의 연속함수라 하자. 그러면 어떤 $z \in [0,1]$가 존재하여 $f(z) = z$이다.

물론 위의 따름정리는 고정점을 찾는데는 도움이 되지 못하고, 오히려 그것은 적어도 하나의 고정점이 존재한다는 것만 말해준다.

특별한 고정점이 끌어당기는 것인지, 밀어내는 것인지, 또는 중립적인지를 정하는 간단한 방법을 구하는 것도 좋을 것이다. 이것과 관련해서 세련된 함수에 관한 정리 A3.5.2와 A3.5.3이 매우 유용하다. □

A3.5.2 정리. S를 $\mathbb{R}$의 구간이라 하고 a를 S의 내점이라 하자. 더욱이, a를 함수 $f\colon S \to \mathbb{R}$의 고정점이라 하자. 만약 f가 점 a에서 미분가능하고 $|f'(a)| < 1$이면, a는 f의 끌어당기는 고정점이다.

증명. $|f'(a)| < 1$이므로, $|f'(a)| < k < 1$를 얻는다. 여기서 k는 $k = \frac{|f'(a)|+1}{2}$에 의하여 주어진 양의 실수이다.

정의에 의하여, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이다. 따라서 a에 "충분히 가까운" x에 대하여, $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \le k$을 얻는다; 보다 구체적으로, 어떤 구간 $I = [a-\delta, a+\delta]$, $\delta > 0$가 존재해서 모든 $x \in I$, $x \neq a$에 대하여 $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \le k$이다.

a가 고정점이기 때문에, $f(a) = a$이다. 따라서

$$\text{모든 } x \in I\text{에 대하여,} \quad |f(x) - a| \le k|x - a| \tag{1}$$

이다. 이것은 x보다도 $f(x)$가 a에 더 가깝다는 것을 말한다. 그러므로 $f(x)$도 역시 I에 속한다. 따라서 x 대신에 $f(x)$를 가지고 같은 주장을 반복하여

$$\text{모든 } x \in I\text{에 대하여,}\quad |f^2(x) - a| \leq k|f(x) - a| \tag{2}$$

을 얻는다. (1)과 (2)로부터,

$$\text{모든 } x \in I\text{에 대하여,}\quad |f^2(x) - a| \leq k^2|x - a| \tag{3}$$

을 얻는다. $|k| < 1$이면 $k^2 < 1$임을 주목하여, 같은 주장을 다시 반복할 수 있다. 수학적 귀납법에 의하여,

$$\text{모든 } x \in I\text{와 모든 } n \in \mathbb{N}\text{에 대하여,}\quad |f^n(x) - a| \leq k^n|x - a| \tag{4}$$

을 얻는다. $|k| < 1$이므로, $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$이다. (4)에 의하여, 이것은 $n \to \infty$일 때 $f^n(x) \to a$임을 함의한다. 그리고 a가 끌어당기는 고정점임을 증명했다. $\square$

정리 A3.5.3의 증명은 정리 A3.5.2의 증명과 유사하므로 연습문제로 남겨둔다.

A3.5.3 정리. S를 $\mathbb{R}$의 구간이라 하고 a를 S의 내점이라 하자. 더욱이, a를 함수 $f\colon S \to \mathbb{R}$의 고정점이라 하자. 만약 f가 점 a에서 미분가능하고 $|f'(a)| > 1$이면, a는 f의 밀어내는 고정점이다.

A3.5.4 주목. 정리 A3.5.2와 정리 A3.5.3은 $\boxed{\text{필요충분}}$조건이 아님을 주목하는 것이 중요하다. 오히려 그 정리들은 $\boxed{\text{만약}}$ f'이 존재하고 고정점 a를 포함하는 구간 안에서 $|f'(x)| < 1$이면, a는 끌어당기는 고정점이고; $\boxed{\text{만약}}$ 고정점 a를 포함하는 구간안에서 $|f'(x)| > 1$이면, a는 밀어내는 고정점이라는 것을 말한다. 만약 이러한 조건 중 어느 것도 참이 아니면 우리는 아무것도 말할 수 없다! 예를 들어, f가 a에서 미분 불가능이지만, f는 그럼에도 불구하고 a에서 끌어당기는 고정점을 가질 수 있다. (이것이 바로 그 경우다. 예를 들어, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 는 끌어당기는 고정점 0을 갖는다.)

f가 a에서 미분가능일지라도, 만약 $f'(a) = 1$이면, 정리 A3.1.17과 A3.1.18은 우리에게 전혀 아무것도 말해주지 않는다. $f(x) = \sin x$를 생각해 보자. 이 함수는 0에서 미분가능하고, $f'(0) = \cos(0) = 1$이다. 따라서 정리 A3.1.17 그리고 A3.1.18은 우리에게 아무것도 말해주지 않는다. 그러나, 0은 f의 끌어당기는 고정점이다. $\square$

A3.5.5 주목. 이 이론에서 가장 중요한 함수족 중의 하나는 **이차함수(quadratic maps) 족 $Q_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**이다. 여기서 $c \in \mathbb{R}$, 그리고 $Q_c(x) = x^2 + c$이다. 각각의 다른 c값에 대하여 다른 이차함수를 얻는다. 그러나 놀라운 특징은 c가 변함에 따라 Q_c의 동역학이 변하는 것이다. 다음 정리가 이것을 나타낸다. 정리의 증명은 연습문제로 남겨둔다.

A3.5.6 정리. (제1분기점 정리(The First Bifurcation Theorem))
Q_c를 $c \in \mathbb{R}$에 관한 이차함수라 하자.

(i) 만약 $c > \frac{1}{4}$이면, 모든 궤도는 무한대로 접근한다; 즉, 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여, $n \to \infty$일 때 $(Q_c)^n(x) \to \infty$이다.

(ii) 만약 $c = \frac{1}{4}$이면, Q_c는 $x = \frac{1}{2}$에서 정확하게 하나의 고정점을 갖고 이것은 중립적인 고정점이다.

(iii) 만약 $c < \frac{1}{4}$이면, Q_c는 두 개의 고정점 $a_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$와 $a_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$를 갖는다.

(a) a_+는 항상 밀어내는 고정점이다.

(b) 만약 $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$이면, a_-는 끌어당기는 고정점이다.

(c) 만약 $c < -\frac{3}{4}$이면, a_-는 밀어내는 고정점이다.

A3.5.7 주목. 용어 **분기점(bifurcation)**은 둘로 나눈다는 것을 의미한다. 우리는 위의 정리에서 본 것처럼, $c > \frac{1}{4}$에 대하여 고정점이 존재하지 않고; $c = \frac{1}{4}$에 대하여 오직 하나의 고정점이 존재하지만; $c < \frac{1}{4}$에 대해서는 이 고정점이 둘로 나누어진다 — a_+에서 하나 그리고 a_-에서 하나로 나누어진다. 우리는 곧 분기점에 대하여 더 많은 것을 이야기할 것이다.

A3.5.8 정의. f를 집합 S에서 자기자신으로의 함수라 하자. 만약 점 $x \in S$가 소주기 m을 가지면, x의 궤도는 $\{x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\}$이고, **$m$-사이클(cycle)**이라고 불린다.

A3.5.9 정의. a를 소주기 $m \in \mathbb{N}$을 갖는 함수 $f\colon S \to S$의 주기점이라 하자. [따라서 a는 분명히 $f^m\colon S \to S$의 고정점이다.] 만약 a가 f^m의 끌어당기는 고정점이면, a를 f의 **끌어당기는 주기점(attracting periodic point)**이라고 부른다. 비슷하게 만약 a가 f^m의 밀어내는 고정점이면, a를 f의 **밀어내는 주기점(repelling periodic point)**이라고 부른다.

다음 정리의 증명은 연습문제로 남겨둔다.

A3.5.10 정리. (제2분기점 정리(The Second Bifurcation Theorem)) Q_c를 $c \in \mathbb{R}$에 관한 이차함수라 하자.

(a) 만약 $-\frac{3}{4} \le c < \frac{1}{4}$이면, Q_c는 2-사이클을 갖지 않는다.

(b) 만약 $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$이면, Q_c는 끌어당기는 2-사이클, $\{q_-, q_+\}$를 갖는다. 여기서, $q_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c-3})$ 그리고 $q_- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c-3})$이다.

(c) 만약 $c < -\frac{5}{4}$이면, Q_c는 밀어내는 2-사이클 $\{q_-, q_+\}$를 갖는다.

A3.5.11 주목. 제2분기점 정리에서 **주기 배가 분기점(period doubling bifurcation)** 이라고 불리는 새로운 종류의 분기점을 보았다. c가 $-\frac{3}{4}$ 아래로 감소함에 따라, 두 가지 일이 발생한다: 고정점 a_-가 끌어당김에서 밀어내기로 변하고 새로운 2-사이클, $\{q_-, q_+\}$가 나타난다. $c = -\frac{3}{4}$일 때, $q_- = q_+ = -\frac{1}{2} = a_-$가 성립함을 주목하자. 따라서 $c = -\frac{3}{4}$일 때 a_-에서 이 두 개의 새로운 주기점이 유래된다.

우리가 단일매개변수 함수족 (가령, 매개변수 c에 달려 있는 $Q_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 매개변수 λ에 달려 있는 로지스틱 함수 $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$)을 생각할 때 주기 배가 분기점에 대하여 할 말이 더 있을 것이다. □

연습문제 A3.5

1. 정리 A3.5.3을 증명하시오.

2. 정리 A3.5.2와 A3.5.3을 이용하여 아래의 각 함수의 고정점의 특성을 결정하시오:

   (i) $f_1(x) = 3x$.

   (ii) $f_2(x) = \frac{1}{4x}$.

   (iii) $f_3(x) = x^3$.

3. 제1분기점 정리 A3.5.6을 증명하시오.

4. x를 이차함수 Q_c의 주기가 2인 주기점이라 하자.

   (i) $x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$임을 증명하시오.

   (ii) 점 $a_+ = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4c})$와 $a_- = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4c})$가 왜 (i)에 있는 방정식을 만족해야 하는가? [힌트: 제1분기점 정리 A3.5.6을 이용하시오.]

   (iii) (ii)를 이용하여, 만약 x가 Q_c의 소주기가 2인 주기점이면, $x^2+x+c+1=0$임을 보이시오.

   (iv) 만약 x가 Q_c의 소주기가 2인 주기점이면, x는 점 $q_+ = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-4c-3})$와 $q_- = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-4c-3})$ 중의 하나임을 보이시오.

   (v) Q_c가 2-사이클을 가질 필요충분조건은 $c < -\frac{3}{4}$임을 유도하시오. [$c = -\frac{3}{4}$의 경우를 없애는 것에 주의하시오.]

   (vi) 정리 A3.1.17을 이용하여, $x = q_-$와 $x = q_+$에서 $|\frac{dQ_c^2(x)}{dx}| = |4x^3 + 4cx| < 1$이면, 이차함수 Q_c의 끌어당기는 주기점으로 q_-와 q_+를 가짐을 보이시오.

   (vii) (위의 (iii)과 (iv)로부터) q_-와 q_+가 둘 다 방정식 $x^2+x+c+1=0$을 만족함을 주목하여,

   $$4x^3 + 4cx = 4x(x^2+c) = 4x(-1-x) = 4(c+1)$$

   임을 보이시오.

   (viii) (vi), (vii), 그리고 (v)를 이용하여, $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$에 대하여, q_+와 q_-는 Q_c의 끌어당기는 주기점임을 보이시오.

   (ix) 비슷한 방법으로 $c < -\frac{5}{4}$에 대하여, q_+와 q_-는 밀어내는 주기점임을 보이시오.

   (x) 바로 위의 연습문제에서 증명한 것으로부터 제2분기점 정리 A3.5.10을 유도하시오.

A3.6 주기 3의 마술: 주기 3은 카오스를 함의한다

A3.6.1 주목. 1964년에 (구)소련 수학자 A.N. Sarkovskii는 우크라니아(Ukranian) 저널에 러시아어로 논문(Sarkovskii [283])을 출판했다. 그 논문에서 눈에 띄지 않고 넘어간 주목할 만한 정리를 증명했다. 1975년에 James Yorke와 T-Y. Li는 *American Mathematical Monthly*에 논문(Yorke and Li [336])을 출판했다. 비록 "카오스(chaos)"라는 용어가 과학문헌에 이전부터 사용되어 왔지만, 그것은 카오스라는 용어를 대중화한 처음 논문이었다. 이 논문의 주 결과인 주기 3 정리(The Period Three Theorem)는 놀라운 것이었지만, 10년 전에 증명한 Sarkovskii 정리의 아주 특별한 경우이다. 여기에서 논의한 주기 3 정리는 Robert L. Devaney의 책(Devaney [80])에 발표된 것에 근거를 두고 있다.

A3.6.2 정리. 주기 3 정리(The Period Three Theorem) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 연속함수라 하자. 만약 f가 소주기 3인 주기점을 가지고 있다면, 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 f는 소주기 n의 주기점을 갖는다.

증명. 연습문제 A3.6 #1–4. □

A3.6.3 주목. 주기 3 정리는 놀랄만한 것이다. 그러나 앞에서 서술한 것처럼 보다 더 일반적인 결과가 성립한다. 이것이 Sarkovskii 정리로 알려졌다. 우리는 증명은 하지 않고, 단순히 증명은 위에서 한 것과 비슷한 성질임을 언급한다.

Sarkovskii 정리를 서술하기 위하여 **Sarkovskii의 자연수 순서(Sarkovskii's ordering of the natural numbers)**로 알려진 자연수 순서에 관한 다음의 특이한 방법이 필요하다:

$$
\begin{array}{l}
3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots \\
2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ \dots \\
2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7\dots \\
2^3\cdot 3,\ 2^3\cdot 5,\ 2^3\cdot 7\dots \\
\qquad\qquad \vdots \\
\dots,\ 2^n,\ 2^{n-1},\ \dots,\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1,\ 1.
\end{array}
$$

A3.6.4 정리. (Sarkovskii 정리) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 연속함수라 하자. 만약 f가 소주기 n의 주기점을 갖고 Sarkovskii의 자연수 순서에서 n이 k보다 앞서면, f는 소주기 k의 주기점을 갖는다.

A3.6.5 주목. (i) 먼저 3이 Sarkovskii의 자연수 순서에서 처음 나오는 수이므로 Sarkovskii 정리는 주기 3 정리를 함의함을 주목하자.

(ii) 두 번째로 2^n 형태의 수가 Sarkovskii의 자연수 순서에서 꼬리를 이루므로, 만약 f가 오직 $\boxed{\text{유한개}}$의 주기점을 가지면, 그들은 모두가 2^n 형태가 됨을 주목하자.

(iii) 세 번째로 Sarkovskii 정리는 $\mathbb{R}$에서 자기자신으로의 연속함수에 적용됨을 주목하자. 만약 $\mathbb{R}$을 다른 순서공간으로 대치하면 정리는 참이 아닐 수도 있다. 그러나, $\mathbb{R}$은 임의의 닫힌구간 $[a, b]$로 대치할 수 있다. 이것을 알아보기 위하여, $f : [a, b] \to [a, b]$를 연속함수라 하자. 그 다음 f를 다음과 같이 정의된 연속함수 $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$로 확장하자:

$x \in [a, b]$에 대하여, $f'(x) = f(x)$;

$x < a$이면, $f'(x) = f(a)$; 그리고

$x > b$이면, $f'(x) = f(b)$

이다. 그러면 f에 대한 정리는 f'에 관한 정리로부터 유도될 수 있다.

Sarkovskii 정리의 역도 역시 참이다는 것은 주목할 만하다. 그러나 여기서는 그것을 증명하지 않는다. (Dunn [93])을 보시오.

A3.6.6 정리. (Sarkovskii 정리의 역) $n \in \mathbb{N}$이라 하고 Sarkovskii의 자연수 순서에서 l이 n을 앞선다고 하자. 그러면 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 존재하여, 소주기 n의 주기점을 갖지만, 소주기 l의 주기점은 갖지 않는다.

A3.6.7 주목. 예를 들어, Sarkovskii 정리의 역으로부터, $\mathbb{R}$에서 wkrl자신으로의 연속함수가 존재하여 소주기 6의 주기점을 가지게 된다. 그러므로 모든 짝수 소주기의 주기점을 갖지만, 1을 제외한 홀수 소주기의 주기점은 갖지 않는다.

연습문제 A3.6

1. f를 구간 I에서 $\mathbb{R}$로의 연속함수라 하자. 명제 4.3.5와 5.2.1을 이용하여, $f(I)$는 구간임을 증명하시오.

2. Weierstrass의 중간값 정리 5.2.9를 이용하여 다음 결과를 증명하시오:

   명제 A. *$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$라 하고 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$를 연속함수라 하자. 만약 $f(I) \supseteq I$이면, f는 I에서 고정점을 가짐을 증명하시오.*

   [힌트: (i) 어떤 점 $s, t \in [a, b]$가 존재하여 $f(s) = c \leq a \leq s$ 그리고 $f(t) = d \geq b \geq t$임을 보이시오.

   (ii) $g(x) = f(x) - x$라 놓고, g는 연속이고 $g(s) \leq 0$ 그리고 $g(t) \geq 0$임을 관찰하시오.

   (iii) g에 Weierstrass 중간값 정리를 적용하시오.]

3. Weierstrass의 중간값 정리 5.2.9를 이용하여 다음 결과를 증명하시오:

   명제 B. *$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$라 하자. 더욱이, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$를 연속함수 그리고 $c < d$인 $c, d \in \mathbb{R}$에 대하여, $f([a, b]) \supseteq J = [c, d]$이라 하자. $I = [a, b]$의 부분구간 $I' = [s, t]$가 존재하여 $f(I') = J$임을 증명하시오.*

   [힌트: (i) $f^{-1}(\{c\})$와 $f^{-1}(\{d\})$는 공집합이 아닌 닫힌집합임을 입증하시오.

   (ii) (i)과 보조정리 3.3.2를 이용하여 최대수 s가 존재하여 $f(s) = c$임을 입증하시오.

   (ii) $\boxed{\text{어떤 } x > s\text{가 존재하여 } f(x) = d\text{를 만족하는 경우를 생각하자.}}$ 최소수 $t > s$가 존재하여 $f(t) = d$임을 입증하시오.

   (iii) 어떤 $y \in [s, t]$가 존재하여 $f(y) < c$라고 $\boxed{\text{가정하자}}$. Weierstrass의 중간값의 정리를 이용하여 모순을 얻으시오.

   (iv) 비슷한 방법으로 $f(z) > d$를 만족하는 $z \in [s, t]$가 존재하지 않음을 보이시오.

   (v) (ii)의 조건하에서, 우리가 원했던, $f([s, t]) = [c, d] = J$임을 유도하시오.

   (vi) 이제 $f(x) = d$인 $x > s$가 존재하지 않는 경우를 생각하자. s'를 $f(s') = d$인 최대수라고 하자. 분명히 $s' < s$이다. t'를 $t' > s'$이고 $f(t') = c$인 최소수라고 하자. 우리가 원했던, $f([s', t']) = [c, d] = J$임을 입증하시오.]

4. f는 주기 3 정리 A3.6.2에서와 같다고 하자. 따라서 $\mathbb{R}$ 안에 소주기 3인 점 a가 존재한다. 따라서 $f(a) = b$, $f(b) = c$, 그리고 $f(c) = a$이다. 여기서 $a \neq b$, $a \neq c$, 그리고 $b \neq c$이다. 우리는 $a < b < c$인 경우를 생각할 것이다. 다른 경우는 비슷하게 다루어진다. $I_0 = [a, b]$ 그리고 $I_1 = [b, c]$라 놓자.

 (i) 위의 연습문제 1을 이용하여, $f(I_0) \supseteq I_1$임을 입증하시오.

 (ii) 위의 연습문제 1을 다시 이용하여, $f(I_1) \supseteq I_0 \cup I_1$임을 입증하시오.

 (iii) (ii)와 위의 명제 B로부터, 닫힌구간 $A_1 \subseteq I_1$가 존재하여 $f(A_1) = I_1$임을 유도하시오.

 (iv) $f(A_1) = I_1 \supseteq A_1$임을 주목하고, 위의 명제 B를 다시 이용하여 닫힌구간 $A_2 \subseteq A_1$가 존재하여 $f(A_2) = A_1$임을 보이시오.

 (v) $A_2 \subseteq A_1 \subseteq I_1$과 $f^2(A_2) = I_1$임을 관찰하시오.

 (vi) 수학적 귀납법을 이용하여 $\boxed{n \geq 3\text{에 대하여}}$ 닫힌구간 $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$가 존재하여

$$A_{n-2} \subseteq A_{n-3} \subseteq \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq I_1$$

 $f(A_i) = A_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n-2$, 그리고 $f(A_1) = I_1$임을 보이시오.

 (vii) (vi)로부터 $f^{n-2}(A_{n-2}) = I_1$과 $A_{n-2} \subseteq I_1$임을 유도하시오.

 (viii) $f(I_0) \supseteq I_1 \supseteq A_{n-2}$을 주목하여, 닫힌구간 $A_{n-1} \subseteq I_0$가 존재해서 $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$임을 보이시오.

 (ix) 마지막으로, $f(I_1) \supset I_0 \supseteq A_{n-1}$라는 사실을 이용하여, 닫힌구간 $A_n \subset I_1$이 존재해서 $f(A_n) = A_{n-1}$이 성립함을 보이시오.

 (x) 위의 내용을 합치면

$$A_n \xrightarrow{f} A_{n-1} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} A_1 \longrightarrow I_1$$

 $f(A_i) = A_{i-1}$ 그리고 $f^n(A_n) = I_1$임을 안다. $A_n \subset I_1$이라는 사실과 명제 A를 이용하여 $f^n(x_0) = x_0$를 만족하는 점 $x_0 \in A_n$가 존재함을 보이시오.

 (xi) (x)으로부터 점 x_0는 주기가 n인 f의 주기점임을 관찰하자. [아직은 x_0가 **소**주기 n의 점임을 보여야 한다.]

 (xii) $f(x_0) \in A_{n-1} \subseteq I_0$, 그리고 $i = 2, \ldots, n$에 대하여 $f^i(x_0) \in I_1$, 그리고 $I_0 \cap I_1 = \{b\}$라는 사실을 이용하여, x_0가 소주기 n임을 보이시오. [$f(x_0) = b$는 제거될 가능성이 있음을 주목하시오. 이것은 $f^3(x_0) \in I_1$이지만, $f^2(b) = a \notin I_1$임을 관찰함으로써 수행될 수 있다.]

 (xiii) (xi), (xii), 그리고 (vi)으로부터, 모든 $n \geq 3$에 대하여 f가 소주기 n의 주기점을 가짐을 유도하시오. [우리는 아래에서 $n = 1$ 그리고 $n = 2$인 경우만 다룬다.]

 (xiv) 명제 A와 $f(I_1) \supseteq I_1$이라는 사실을 이용하여 I_1 안에 f의 고정점이 존재함을 보이시오; 즉, 소주기 1의 주기점이 존재한다.

(xv) $f(I_0) \supseteq I_1$와 $f(I_1) \supseteq I_0$임을 주목하자. 명제 B는 닫힌구간 $B \subseteq I_0$가 존재하여 $f(B) = I_1$ 임을 보여준다. 그 다음 $f^2(B) \supseteq I_0$임을 관찰하고, 명제 A로부터, 어떤 점 $x_1 \in B$이 존재하여 $f^2(x_1) = x_1$임을 유도하시오. $f(x_1) \in f(B) = I_1 = [b,c]$ 그리고 $x_1 \neq b$일 때, $x_1 \in B \subseteq I_0 = [a,b]$임을 입증하시오. x_1은 f의 소주기 2의 주기점임을 유도하시오. 이것으로 주기 3 정리 A3.6.2의 증명이 완성된다.

5. (i) 만약 $\mathbb{R}$이 $\mathbb{R}^2$로 대치되었다면 주기 3 정리 A3.6.2는 거짓일 수도 있음을 보이시오. [힌트: 원점에 관한 회전을 생각하시오.]

   (ii) 만약 $\mathbb{R}$이 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$으로 대치되었다면, 주기 3 정리 A3.6.2는 거짓일 수 있음을 보이시오.

   (iii) 만약 $\mathbb{R}$이 S^1으로 대치되었다면, 여기서 S^1은 $\mathbb{R}^2$에서 중심이 원점이고 반경이 1인 원, 주기 3 정리 A3.6.2는 거짓일 수도 있음을 보이시오.

6. $\mathbb{R}$이 열린구간 (a,b)로 대치되었을 때, 여기서 $a,b \in \mathbb{R}$ 그리고 $a < b$, 왜 Sarkovskii 정리 A3.6.4는 참인가? [힌트: 그것은 $\mathbb{R}$에 대한 Sarkovskii 정리로부터 쉽게 유도된다.]

A3.7 카오스 동력계

A3.7.1 주목. 오늘날 카오스 동력계를 다루는 수천 편의 연구논문과 수백 권의 책이 출판되었다. 카오스 동력계는 예술, 생물학, 경제학, 생태학 그리고 금융 등의 다양한 교과목과 관련이 있다. 카오스의 확정적인 역사를 말하는 것은 어리석은 일이다. 카오스는 성경의 창세기에서 사용된 용어이고, 2,200년 전 중국의 한 왕조의 철학적 전통인 도교(Girardot [129])에서 (카오스로 번역된) 혼돈(Hun-Tun)이라는 용어가 사용되었다. 여기서 우리는 20세기에 초점을 맞춘다.

또한 여기에서 카오스의 수학적 개념에 관한 "올바른" 정의를 내리려고 시도하는 것도 어리석은 일이다. 오히려, 우리는 동등하지 않은 다른 정의들이 존재한다는 것을 주목하며 합리적인 정의를 소개하겠다. 사실상 몇몇 수학자들은 현존하는 어떤 정의도 우리가 원하는 카오스가 무엇인지를 정확하게 포착하고 있지 않다고 주장한다.

일찍이 언급했던 것처럼, Yorke와 Li [336]의 1975년 논문이 카오스 동력계의 폭넓은 관심을 촉발시켰다. 그러나 그 전년에 호주 과학자 Robert M. May, 나중에 Robert May 경(Lord)이 되고, 런던의 명망있는 Royal Society의 회장이 되었던 그가 출판한 논문 [217]에서 다음과 같이 서술했다:

"겹치지 않는 세대를 갖는 생물학적 인구증가를 서술하는 몇몇의 가장 단순한 비선형계차방정식 (nonlinear difference equations)은, 안정적인 평형점(stable equilibrium points)으로부터 2개의 인구 지점(population points) 사이의 안정된 주기적 진동에 이르기까지, 그리고 4,

8, 16, ...의 인구 지점을 갖는 안정적인 사이클까지, (초기 인구값에 달려 있는) 임의 주기의 사이클까지, 오히려 완전 비주기적이지만 유계 인구 변동(bounded population fluctuations)이 일어날 수 있는 혼돈된 레짐(chaotic regime)에 이르기까지, 동적행동(dynamical behavior)의 주목할 만한 스펙트럼을 보일 수 있다."

프랑스의 위대한 수학자 중의 한 명인, Jules Henri Poincaré (1854–1912)는 현대 비선형 동력계, 에르고딕 이론(ergodic theory), 그리고 위상수학을 포함한 많은 수학분야의 창시자로 인정을 받는다. 그의 업적은 카오스 이론을 위한 기반을 다졌다. 그는 1903년 그의 책, 2003년에 재출판된 번역본(Poincarè [260])에서 다음과 같이 서술했다: **"만약 우리가 처음 순간에 자연의 법칙과 우주의 현상을 정확히 알았다면, 다음 순간에 같은 우주의 현상을 정확하게 예측할 수 있다. 그러나 자연의 법칙이 우리에게 더 이상 어떤 비밀도 갖지 않을 경우일지라도, 우리는 그럼에도 불구하고 초기 현상을 대략은 알 수 있다. 그것이 같은 근사치를 가지고 계속되는 현상을 예측하는데 도움이 된다면, 그게 우리가 필요로 하는 모든 것이고, 현상은 예견되었다고 말해야 하고 그것은 법칙의 지배를 받는다. 그러나 항상 그렇게 되지는 않는다; 초기조건의 약간의 차이가 마지막 현상에서 아주 큰 차이를 유도하는 일이 생길 수도 있다. 처음에 작은 오류가 나중에 엄청난 오류를 유도할 것이다. 예측이 불가능하게 된다".** Poincaré가 아주 자세하게 서술한 것이 나중에 카오스의 핵심적인 특징인 *나비효과(butterfly effect)*가 일상적인 것으로 알려지게 되었다.

1952년에 명성이 높은 저자인 Ray Bradbury (1920–2012)가 "천둥소리(A Sound of Thunder)"라고 불리는 단편소설을 Collier 잡지에 출판했다. 그 소설에서 부자 경영인 일행이 선사시대로 되돌아가는 여행을 위해 시간여행을 사용하고 공룡을 사냥하기 위해 사냥여행을 간다. 그러나, 사냥꾼 중의 한 사람이 사고로 인해 선사시대의 나비를 죽인다. 그리고 이 악의없는 사건이 그들이 떠난 미래의 세계를 극적으로 바꾼다. 이것이 아마 1973년에 Washington, D.C.에 있는 미국과학진흥협회(American Association for the Advancement of Science)에 "예측가능성(Predictability): 브라질에서 나비가 날개를 펄럭이면 텍사스에 태풍이 일어나지 않느냐?"라는 이름의 기상학자의 발표에 인센티브가 되었다. 기상학자는 Edward Norton Lorenz (1917–2008)이었고 펄럭이는 날개는 초기조건의 미미한 변화가 나중에 엄청난 변화를 일으키는 것으로 표현되었다. Lorenz는 우연히 초기조건의 민감성을 발견했다. 그는 날씨를 예측하기 위하여 컴퓨터 상에서 수학적 모델작업을 하고 있었다. 그는 특별한 수열을 가동시켜서, 실험을 되풀이 하기로 결정했다. 그는 수열을 통해서 도중에 취한 출력물에 숫자를 재입력했고, 그것을 작동시켰다. 그가 발견한 것은 새로운 결과가 처음 결과와 근본적으로 달랐던 것이었다. 그의 출력물은 소숫점 넷째 자리에서 반올림을 했기 때문에, 그는 여섯 자리 수 0.506127보다는 수 0.506을 입력했었다. 그렇기는 하지만, 그는 결과적으로 얻어진 수열이 처음 작동했을 때 원래의 수열과 약간의 차이가 있을 것으로 기대했었다. 그와는 달리 반복된 실험의 증명 때문에, Lorenz는 초기조건에서 단순한 차이가 결과

에서는 크게 다르게 된다는 결론을 내렸다. 그래서 사실상 예측은 불가능했다. 초기조건의 민감성, 또는 나비효과가 기상학에서 이론적으로 중요할 뿐만 아니라 사실상 실질적으로 중요하다는 것을 입증했다. 적어도 그 모델을 가지고는–날씨를 예측하는데는 심각한 한계가 있었다. 아마 이 효과가 또한 다양한 다른 실질적인 응용분야에 증거가 되었다.

미국 수학자 George David Birkoff (1884-1944)와 Harold Calvin Marston Morse (1892–1977)는 동력계에 대한 Poincaré의 연구를 계속했다. 반면에 Poincaré는 동력계 이론에 위상수학을 사용했다. 특히, Birkhoff는 Lebesgue 측도론(Lebesgue measure)을 사용하여 이 이론을 보충했다. 1931년에 Birkhoff와 P.A. Smith는 그들의 논문[37]에서 에르고딕 이론에서 중심인 거리 추이성(metric transitivity)의 개념을 소개했고, 1986년에 Robert L. Devaney가 카오스의 정의와 카오스 접근에 사용했다. 세 가지 조건: 주기 3 정리에 나타난 것처럼 추이성, 초기조건의 민감성, 그리고 주기점의 조밀성이 Devaney가 카오스의 정의에서 사용한 바로 그것이었다. □

A3.7.2 정의. (X,d)를 거리공간 그리고 $f\colon X \to X$를 집합 X에서 자기자신으로의 함수라 하자. 이 때 (X,f)를 **동력계(dynamical system)**라고 부른다.

A3.7.3 주목. 동력계를 (X,d,f)로 나타내는 것이 더 적절할 수도 있지만, 문헌에서는 관례가 꼭 그렇지는 않다.

A3.7.4 정의. (X,d)를 거리공간 그리고 $f\colon X \to X$를 집합 X에서 자기자신으로의 함수라 하자. 주어진 $x,y \in X$에 대하여, 그리고 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여, 어떤 $z \in X$와 $n \in \mathbb{N}$이 존재해서, $d(z,y) < \varepsilon$ 그리고 $d(f^n(z),x) < \varepsilon$를 만족하면, 동력계 (X,f)가 **추이적(transitive)**이라고 불린다.

A3.7.5 주목. 간단히 말하자면, 추이성은 y "가까이"에 점 z가 존재하여 z의 궤적 안의 어떤 점이 x에 "가깝다"는 것을 말한다.

A3.7.6 주목. 마침내 우리는 카오스를 정의하겠다. 그러나, 문헌에는 동치가 아닌 많은 카오스 정의가 존재하고, 카오스의 의미를 애매모호하게 말하는 저자들이 많음에 주의를 기울일 필요가 있다. 우리의 정의는 1992년에 호주 수학자 그룹 Banks et al. [26]의 업적으로부터 모방한 Robert L. Devaney가 사용한 것이다.

A3.7.7 정의. 동력계 (X, f)가 다음 두 조건을 만족하면 **카오스(chaotic) 동력계**라고 불린다:

(i) f의 모든 주기점의 집합은 집합 X에서 조밀하고,

(ii) (X, f)는 추이적이다.

A3.7.8 주목. 1992년까지 카오스 동력계의 정의에 세 번째 조건을 추가하는 것이 자연스러웠다. 이 조건은 동력계 (X, f)에서, f는 초기조건에 민감하게 의존한다는 것이다. 그러나 1992년에 호주 멜버른에 있는 La Trobe 대학의 수학자 그룹이 정의 A3.7.7에 있는 두 조건이 성립하면 이 조건은 자동적으로 참이다는 것을 증명했다. 이 업적은 American Mathematical Monthly (Banks et al. [26])에 공동 저자 John Banks, Gary Davis, Peter Stacey, Jeff Brooks 그리고 Grant Cairns에 의한 논문 "카오스에 대한 Devaney의 정의(On Devaney's definition of chaos)"에 나타났다. 또한 (Banks et al. [27])를 보시오.

A3.7.9 정의. 동력계 (X, f)가 다음 조건을 만족하면 **초기조건에 민감하게 의존한다 (depend sensitively on initial conditions)**고 말한다: 어떤 $\beta > 0$가 존재해서 임의의 $x \in X$와 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 $n \in \mathbb{N}$과 $y \in X$가 존재하여 $d(x, y) < \varepsilon$ 그리고 $d(f^n(x), f^n(y)) > \beta$이다.

A3.7.10 주목. 이 정의는 어느 x를 가지고 시작하든 우리가 선택한 x의 아무리 작은 근방이든 관계없이, 항상 이 근방 안에 y가 존재해서 그 근방의 궤적은 x의 궤적으로부터 적어도 β만큼 떨어져 있다는 것을 말한다. [그리고 β는 x와는 독립적이다.]

A3.7.11 주목. 주목 A3.7.8에서 우리가 말한 것은 **모든 카오스 동력계는 초기조건에 민감하게 의존한다**는 것이다. 우리는 이것을 여기서 증명하지는 않는다. 그러나 연습문제 A3.7 #2에서 배가함수(doubling map)가 실제로 초기조건에 민감하게 의존함을 보일 것이다.

A3.7.12 주목. 1994년에, Michel Vellekoop와 Raoul Berglund [316]가 (X, d)가 유한이거나 유클리드 거리를 갖는 무한구간인 특별한 경우에는, 추이성이 정의 A3.7.7에 있는 조건 (ii), 즉, 모든 주기점의 집합이 조밀함을 함의한다는 것을 증명했다. 그러나, David Asaf와 Steve Gadbois [169]는 이것이 일반 거리공간에 대해서는 참이 아님을 보였다.

연습문제 A3.7

1. $D\colon [0,1) \to [0,1)$, $D(x) = 2x \pmod 1$를 배가함수(doubling map)라 하자. $([0,1), D)$는 카오스 동력계임을 증명하시오.

   [힌트: 연습문제 A3.4 #7에서 D의 모든 주기점의 집합은
   $$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{0, \frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}, \frac{3}{2^n-1}, \dots, \frac{2^n-2}{2^n-1}\right\}$$
   이고, 집합 P는 $[0,1)$에서 조밀함을 증명했음을 상기하자. 그러므로 정의 A3.7.7의 조건 (i)이 만족되었다. 조건 (ii)를 입증하기 위해서 다음 단계를 사용하자:

   (a) $x, y \in [0,1)$ 그리고 $\varepsilon > 0$이 주어졌다고 하자. $n \in \mathbb{N}$이 $2^{-n} < \varepsilon$을 만족한다고 하자. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$에 대하여,
   $$J_{k,n} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$$
   라 하자. 어떤 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$가 존재하여 $x \in J_{k,n}$임을 보이시오.

   (b) $f^n(J_{k,n}) = [0,1)$임을 입증하시오.

   (c) (b)로부터 어떤 $z \in J_{k,n}$가 존재하여 $f^n(z) = y$임을 유도하시오.

   (d) z가 정의 A3.7.4의 요구된 성질을 가지고 있음을 유도하시오. 따라서 $([0,1), D)$는 추이적 동력계이다.

   (e) $([0,1), D)$가 카오스 동력계임을 유도하시오.]

2. 위의 연습문제 1의 배가함수는 초기조건에 민감하게 의존함을 증명하시오.

   [힌트: $\beta = \frac{1}{4}$이라 하자. 주어진 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여, $n \in \mathbb{N}$이 $2^{-n} < \varepsilon$을 만족한다고 하자. $s = f^n(x) + 0.251$ (mod 1)이라 놓자. 먼저, $d(f^n(x), s) > \beta$임을 입증하시오. 연습문제 1 (a)에서 관찰한 것처럼, 어떤 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$에 대하여 $x \in J_{k,n}$이다. 그러나 연습문제 1 (b)에 의하여, $f^n(J_{k,n}) = [0,1)$이다. $y \in J_{k,n}$이고 $f^n(y) = s$라 놓자. 이제 y가 요구된 성질 (i) $d(x,y) < \varepsilon$ 그리고 (ii) $d(f^n(x), f^n(y)) > \beta$를 가짐을 입증하시오.]

3. m을 (고정된) 양의 정수라하고 동력계 $([0,1), f_m)$을 생각하자. 여기서 $f_m(x) = mx \pmod 1$이다. $([0,1), f_m)$는 카오스 동력계임을 증명하시오.

   [힌트: 위의 연습문제 1을 보시오.]

4. $(X, \mathcal{T})$를 위상공간 그리고 f를 X에서 자기자신으로의 연속함수라 하자. $(X, \mathcal{T})$의 공집합이 아닌 임의의 열린집합의 쌍 U와 V에 대하여 어떤 $n \in \mathbb{N}$이 존재하여 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$이면, f를 **위상적으로 추이적(topologically transitive)**이라 부른다. 거리공간 (X, d)와 거리 d에 의하여 유도된 위상 $\mathcal{T}$에 대하여, f가 추이적일 필요충분조건은 위상적으로 추이적임을 증명하시오.

A3.8 공액 동력계

A3.8.1 정의. (X_1, d_1)과 (X_2, d_2)를 거리공간이라 하고, (X_1, f_1)과 (X_2, f_2)를 동력계라 하자. 만약 위상동형함수 $h\colon (X_1, d_1) \to (X, d_2)$가 존재하여 $f_2 \circ h = h \circ f_1$; 즉, 모든 $x \in X_1$에 대하여, $f_2(h(x)) = h(f_1(x))$이면, (X_1, f_1)과 (X_2, f_2)를 **공액 동력계(conjugate dynamical systems)**라고 부른다. 함수 h는 **공액 함수(conjugate map)**라 불린다.

3A.8.2 주목. 연습문제 A3.8 #2에서, 만약 (X_1, f_1)과 (X_2, f_2)가 공액 동력계이면, (X_2, f_2)와 (X_1, f_1)이 공액 동력계임을 입증했다. 따라서 동력계를 고려할 때는 순서가 중요하지 않음을 알 수 있다. □

A3.8.3 주목. 공액 동력계는 위상동형인 위상공간이 동치라는 것과 같은 의미에서 동치이다. 다음 정리는 이 사실을 입증한다. 매우 자주 복소동력계가 우리가 이미 알고 있는 동력계의 공액이라는 것을 보임으로써 복소동력계의 분석이 가능할 것이다. □

A3.8.4 정리. (X_1, f_1)과 (X_2, f_2)를 공액 동력계라 하고, h를 공액 함수라 하자.

(i) 점 $x \in X_1$가 X_1에서 f_1의 고정점일 필요충분조건은 $h(x)$가 X_2에서 f_2의 고정점이다.

(ii) 점 $x \in X_1$가 X_1에서 f_1의 주기가 $n \in \mathbb{N}$인 주기점일 필요충분조건은 $h(x)$가 X_2에서 f_2의 주기가 n인 주기점이다.

(iii) (X, f_1)가 카오스 동력계일 필요충분조건은 (X, f_2)가 카오스 동력계이다.

증명. (i)과 (ii)는 간단하므로 연습문제로 남긴다.

(iii)을 증명하기 위하여, (X_1, f_1)이 카오스 동력계라고 가정하자. P를 f_1의 주기점의 집합이라 하자. (X_1, f_1)이 카오스 동력계이므로, P는 X_1에서 조밀하다. h가 연속이므로, $h(P)$가 집합 $h(X_1) = X_2$에서 조밀함을 보이는 것은 쉽다. $h(P)$가 (X_2, f_2)의 주기점의 집합이므로, (X_2, f_2)가 정의 A3.7.7의 조건 (i)을 만족한다.

증명을 완성하기 위해서, (X_2, f_2)가 추이적임을 보여야 한다. 이것을 위해서, $\varepsilon > 0$ 그리고 $u, v \in X_2$라 하자. 그러면 $x, y \in X_1$가 존재해서 $h(x) = u$ 그리고 $h(y) = v$이다. h가 연속함수이기 때문에, 점 $x, y \in X_1$에서 연속이다. 그러므로, $\delta > 0$가 존재하여

$$z \in X_1 \quad \text{그리고} \quad d_1(x, z) < \delta \Rightarrow d_2(h(x), h(z)) < \varepsilon, \tag{10.1}$$

그리고

$$z' \in X_1 \quad \text{그리고} \quad d_1(y, z') < \delta \Rightarrow d_2(h(y), h(z')) < \varepsilon \tag{10.2}$$

이다.

(X_1, f_1)이 추이적이므로, $z \in X_1$와 $n \in \mathbb{N}$이 존재하여

$$d_1(x, z) < \delta \Rightarrow d_1(f_1^n(z), y) < \delta \tag{10.3}$$

이다. (10.3)이 성립하도록 z를 선택하고, $w = h(z)$라 놓자. (10.1)에 있는 z에 대한 이 값을 이용하고, $f_1^n(z)$를 (10.2)에 있는 z'으로 택하여, 우리는 다음을 얻는다: (10.1) 그리고 (10.3)으로부터,

$$d_2(u, w) = d_2(h(x), h(z)) < \varepsilon, \tag{10.4}$$

그리고 (2)와 (3)으로부터,

$$\begin{aligned} d_2(f_2^n(w), v) &= d_2(f_2^n(h(z)), h(y)) \\ &= d_2(h(f_1^n(z), h(y)) \quad (\because h \circ f_1 = f_2 \circ h) \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{10.5}$$

이다. 이제 (10.4)와 (10.5)로부터, (X_2, f_2)는 추이적임이 유도된다. □

연습문제 A3.8

1. $T\colon [0,1] \to [0,1]$를 다음과 같이 정의된 **텐트함수(tent function)**라 하자.

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

   (i) T의 그래프의 개형을 그리시오.

   (ii) T^2에 대한 공식을 계산하고 T^2의 그래프의 개형을 그리시오.

   (iii) T^3에 대한 공식을 계산하고 T^3의 그래프의 개형을 그리시오.

   (iv) $k \in \{1,2,\dots,2^n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $I_{k,n} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$라 하자. $T^n(I_{k,n}) = [0,1]$임을 입증하시오.

   (v) 연습문제 3.6 #2의 명제 A를 이용하여, T^n은 각각의 $I_{k,n}$에서 고정점을 가짐을 보이시오.

   (vi) (v)로부터 각각의 $I_{k,n}$에서 T의 주기점이 존재함을 유도하시오.

   (vii) 위의 결과를 이용하여 $(T,[0,1])$은 카오스 동력계임을 보이시오.

2. 만약 (X_1, f_1)과 (X_2, f_2)가 공액 동력계이면, (X_2, f_2)와 (X_1, f_1)은 공액 동력계임을 입증하시오. (그러므로 동력계를 고려할 때 순서는 중요하지 않다.)

3. $L\colon [0,1] \to [0,1]$을 $L(x) = 4x(1-x)$에 의해서 정의된 로지스틱함수라 하자.

   (i) 함수 $h\colon [0,1] \to [0,1]$, $h(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x)$는 $[0,1]$에서 자기자신 위로의 위상동형함수이고 $h \circ T = L \circ h$를 만족함을 보이시오. 여기서 T는 텐트함수이다.

   (ii) $([0,1], T)$와 $([0,1], L)$은 공액 동력계임을 유도하시오.

   (iii) (ii), 정리 A3.8.4 그리고 위의 연습문제 1로부터, $([0,1], L)$은 공액 동력계임을 유도하시오.

4. 이차함수 $Q_{-2}\colon [-2,2] \to [-2,2]$, $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$를 생각하시오.

   (i) 위의 연습문제 3의 동력계 $([-2,2], Q_{-2})$와 $([0,1], L)$은 공액임을 증명하시오.

   (ii) $([-2,2], Q_{-2})$는 카오스 동력계임을 유도하시오.

참고 문헌

[1] Alexander Abian. *The theory of sets and transfinite arithmetic*. Saunders., Philadelphia, 1965.

[2] Colin C. Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. Freeman and Co., New York, 1994.

[3] J. Frank Adams. *Lectures on Lie Groups*. University of Chicago PressPress, Chicago, 1969.

[4] J. Frank Adams. *Algebraic topology: a student's guide*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1972.

[5] G.N. Afanasiev. *Topological effects in quantum mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1999.

[6] M.A. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Springer, New York, 2002.

[7] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[8] *Algebraic and Geometric Topology*. http://www.maths.warwick.ac.uk/agt, 2001– . a refereed electronic journal.

[9] R.D. Anderson and R.H. Bing. A completely elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable product of lines. *Bull. Amer. Math.Soc.*, 74:771–792, 1968.

[10] Charilaos N. Aneziris. *The mystery of knots: computer programming for knot tabulation*. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, N.J., 1999.

[11] Alexander Arhangel'skii and Mikhail Tkachenko. *Topological Groups and Related Structures*. Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam and Paris, 2008.

[12] A.V. Arhangel'skii, editor. *General Topology II*. Springer-Verlag, Berlin etc., 1995.

[13] A.V. Arhangel'skii, editor. *General Topology III*. Springer-Verlag, Berlin etc., 1995.

[14] A.V. Arkhangel'skiĭ. *Fundamentals of general topology: problems and exercises*. Kluwer, Boston, 1984.

[15] A.V. Arkhangel'skiĭ. *Topological function spaces*. Kluwer, Boston, 1992.

[16] A.V. Arkhangel'skiĭ and L.S. Pontryagin, editors. *General Topology I*. Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.

[17] D.L. Armacost. *The structure of locally compact abelian groups*. M. Dekker, New York, 1981.

[18] M.A. Armstrong. *Basic topology*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] V.I. Arnold and B.A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*. Springer, New York, 1999.

[20] Emil Artin. *Introduction to algebraic topology*. C.E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1969.

[21] C.E. Aull and R. Lowen, editors. *Handbook of the history of general topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 1997.

[22] Taras Banakh. *Strongly σ-metrizable spaces are super σ-metrizable*, 2016 https://arxiv.org/pdf/1611.05351.pdf.

[23] Taras Banakh. *Topological spaces with an ω^ω-base*, 2017 https://arxiv.org/pdf/1607.07978.pdf.

[24] Taras Banakh and Arkady Leiderman. *ω^ω-dominated function spaces and ω^ω-bases in free objects of topological algebra*, 2016 https://arxiv.org/pdf/1611.06438.pdf.

[25] Wojciech Banaszczyk. *Additive subgroups of topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1991.

[26] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:332–334, 1992.

[27] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. *Chaos: A Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[28] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. *Additive subgroups of topological vector spaces*. Imperial College Press, London, 2003.

[29] Michael Barr. A closed category of reflexive topological abelian groups. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 18:221–248, 1977.

[30] Stephen Barr. *Experiments in topology*. Dover Publications, New York, 1989.

[31] Gerald Alan Beer. *Topologies on closed and convex sets*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1993.

[32] Martin P. Bendsoe. *Optimization of structural topology*. Springer, Berlin, New York, 1995.

[33] Martin P. Bendsoe. *Topology, optimization: theory, methods and applications*. Springer, Berlin, New York, 2003.

[34] S. Bernstein. Démonstration du théorème de weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications of the Kharkhov Mathematical Society*, 13: 1–2, 1912/13
http://tinyurl.com/nzvhjk5.

[35] A. S. Besicovitch. On linear sets of points of fractal dimension. *Math. Annalen*, 101:161–193, 1929.

[36] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. *Selected topics in infinite-dimensional topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

[37] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. *Jour. Math (Liouville)*, (9) 7:345–379, 1928.

[38] Donald W. Blackett. *Elementary topology; a combinatorial and algebraic approach*. Academic Press, New York, 1967.

[39] Robert L. Blair. The hewitt-pondiczery-marczewski theorem on the density character of a product space. *Archiv der Mathematik*, 23:422–424, 1972.

[40] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray, editors. *Chemical topology : introduction and fundamental*. Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

[41] Armand Borel. *Seminars on transformation groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[42] Karol Borsuk. *Collected Papers/ Karol Borsuk*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983.

[43] Nicolas Bourbaki. *General topology v.1 & v.2*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[44] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale, Chap. 1-4 and Chap. 5-10*. Hermann, Paris, 1971 and 1974.

[45] Nicolas Bourbaki. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1987.

[46] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*. Springer, New York, 1997.

[47] B. Brosowski and F. Deitsch. An elementary proof of the Stone-Weierstrass Theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81:89–92, 1982.

[48] R. Brown, P.J. Higgins, and Sidney A. Morris. Countable products and sums of lines and circles: their closed subgroups, quotients and duality properties. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 78:19–32, 1975.

[49] Robert F. Brown. *The Lefschetz fixed point theorem*. Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[50] Ronald Brown. *Elements of modern topology*. McGraw Hill, New York, 1968.

[51] Ronald Brown. *Topology : a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid*. Halstead Press, New York, 1988.

[52] Georg Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, by Georg Cantor; tr., and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain*. The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1915.

[53] Stephen C. Carlson. *Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course*. Wiley, New York, 2001.

[54] H. Cartan. Théorie des filtres. *C. R. Acad. Paris*, 205:595–598, 1937.

[55] H. Cartan. Filtres et ultrafiltres. *C. R. Acad. Paris*, 205:777–779, 1937.

[56] H. Cartan and R. Godement. Th'eorie de la dualit'e et analyse harmonique dans les groupes ab'eliens localement compacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup*, 64:79–99, 1947.

[57] J. Scott Carter. *How surfaces intersect in space : an introduction to topology*. World Scientific Publishers, Singapore ; River Edge, N.J., 1995.

[58] Eduard Čech. *Topological spaces*. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966.

[59] Eduard Čech. *Point sets*. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1969.

[60] M.J. Chasco. pontryagin duality for metrizable groups. *Arch. Math.*, 70:22–28, 1998.

[61] M.J. Chasco and X. Domínguez. Topologies on the direct sum of topological abelian groups. *Topology and its applications*, 133:209—-223, 2003.

[62] M.J. Chasco and E. Martin-Peinador. On strongly reflexive topological groups. *Appl. Gen. top.*, 2 (2):219–226, 2001.

[63] M.J. Chasco, D. Dikranjan, and E. Martin-Peinador. A survey of reflexivity of abelian topological groups. *Topology and its Applications*, 159:2290–2309, 2012.

[64] Graciela Chichilnisky. *Topology and markets*. American Mathematical society, Providence, R.I., 1999.

[65] Gustave Choquet. *Topology*. Academic Press, New York, 1966.

[66] Gustave Choquet. *Lectures on analysis*. W.A. Benjamin, New York, 1969.

[67] Krzysztof Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.

[68] Daniel E. Cohen. *Combinatorial group theory: a topological approach*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989.

[69] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *The theory of ultrafilters*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[70] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Continuous pseudometrics*. M. Dekker, New York, 1975.

[71] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Chain conditions in topology*. Cambridge University Press, Cambridge, England; New York, 1982.

[72] James P. Corbett. *Topological principles in cartography*. US Department of Commerce, Washington, D.C., 1980.

[73] J.-M. Cordier. *Shape theory: categorical methods of approximation*. Halstead Press, Chichester, England; New York, 1989.

[74] Jane Cronin. *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[75] R.J. Daverman and R.B. Sher, editors. *Handbook of geometric topology*. Elsevier, Amsterdam; New York, 2002.

[76] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[77] H. de Vries. *Compact spaces and compactifications: an algebraic approach*. Van Gorcum, Assen, 1962.

[78] J.V. Deshpande. *Introduction to topology*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, New York, etc., 1988.

[79] Robert L. Devaney. *Chaos, fractals and dynamics: computer experiments in mathematics*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.

[80] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.

[81] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition*. Westview Press, Boulder, Colorado, 2003.

[82] Tammo tom Dieck. *Topologie*. de Gruyter, Berlin, 2000.

[83] Egbert Dierker. *Topological methods in Walrasian economics*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[84] Joe Diestel and Angela Spalsbury. *The Joys of Haar Measure*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.

[85] Jean Alexandre Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Birkhauser, Boston, 1989.

[86] Dikran N. Dikranjan. *Categorical structure of closure operators with applications to topology, algebra and discrete mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995.

[87] Dikran N. Dikranjan, Ivan R. Prodanov, and Luchezar N. Stoyanov. *Topological Groups: Characters, Dualities, and Minimal Topologies*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1990.

[88] Mircea V. Diudea and L. Jantschi. *Molecular topology*. Nova Science Publishers, Huntington, N.Y., 2001.

[89] C.T.J. Dodson. *Category bundles and spacetime topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1988.

[90] C.T.J. Dodson. *A user's guide to algebraic topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1997.

[91] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology*. Springer, Berlin, 1995.

[92] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[93] Alan Dunn. *Sarkovskii's Theorem–Part 1*, http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-091Spring--2005/A335FB2E-7381--49D4--B60C--7CBD2F349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.

[94] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2001.

[95] Gerald A. Edgar. *Measure, topology and fractal geometry*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[96] R.E. Edwards. *Curves and topological questions*. Australian National University, Canberra, Australia, 1969.

[97] Robert E. Edwards. *Functional analysis: theory and applications*. Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1965.

[98] James Eels. *Singularities of smooth maps*. Gordon and Breach, New York, 1967.

[99] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

[100] Murray Eisenberg. *Topology*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[101] Patrik Eklund. *Categorical fuzzy topology*. Abo Akademi, Abo, 1986.

[102] Glenn Elert. *The Chaos Hypertextbook*, http://hypertextbook.com/chaos/, 2003.

[103] P. Enflo. On the invariant subspace problem in Banach spaces. *Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)*, pages 1–6, 1976 http://tinyurl.com/gwr3u4n.

[104] Per Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta mathematica*, 130:309–317, 1973 http://tinyurl.com/gvfdjho.

[105] Ryszard Engelking. *General topology*. PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[106] Ryszard Engelking. *Dimension theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York, 1978.

[107] *Eric W. Weinstein*. http://mathworld.wolfram.com/AxiomofChoice.html, Accessed, January 2011. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[108] William W. Fairchild and Cassius Ionescu Tulceac. *Topology*. W.B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1971.

[109] K.J. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Wiley, Chichester, New York, 1990.

[110] Erica Flapan. *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality*. Cambridge University Press, cambridge; New York, 2000.

[111] Graham Flegg. *From geometry to topology*. Dover Publications, Mineola, N.Y., 2001.

[112] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice. *Fundamenta Math.*, 57: 107–115, 1965.

[113] D.H. Fremlin. *Consequences of Martin's Axioms*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1984.

[114] Peter Freyd. *Abelian categories: An introduction to the theory of functors*. Harper & Rowe, New York, 1964.

[115] Robert Froman. *Rubber bands, baseballs and doughnuts; a book about topology. Illustrated by Harvey Weiss*. Crowell, New York, 1972.

[116] László Fuchs. *Abelian groups*. Pergamon Press, Edinburgh, 1960.

[117] Saak Gabriyelyan and Jerzy Kąkol. *Free locally convex spaces with a small base*, 2016
https://arxiv.org/pdf/1604.02555.pdf.

[118] Saak Gabriyelyan, Jerzy Kąkol, and Arkady Leiderman. On topological groups with a small base and metrizability. *Fundamenta Math.*, 229:129–158, 2015.

[119] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. *Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[120] David Gale. The game of hex and the brouwer fixed-point theorem. *Amer. Math. Monthly*, 86:818–827, 1979.

[121] David B. Gauld. *Differential topology: an introduction*. M. Dekker, New York, 1982.

[122] I.M. Gelfand and M.A. Naimark. On the embedding of normed rings into the ring of operators on a hilbert space. *Math. Sbornik*, 12:197–217, 1943 http://tinyurl.com/h3oubks.

[123] *General Topology Front for the Mathematics ArXiv*. http://front.math.ucdavis.edu/math.gn, 1992–. Los Alamos National Laboratory e-Print archive.

[124] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *A compendium of continuous lattices*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[125] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *Continuous lattices and domains*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[126] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of continuous functions*. Springer-Verlag, New York, 1976.

[127] Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. Wiley-Interscience, New York, 2002.

[128] John Ginsburg and Bill Sands. Minimal infinite topological spaces. *Amer. Math. Monthly*, 86:574–576, 1979.

[129] Norman J. Girardot. *Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun)*. University of California Press, Berkeley, California, 1983.

[130] H. Brian Griffiths. *Surfaces*. Cambridge University Press, London; New York, 1976.

[131] Jonathan L. Gross. *Topological graph theory*. Wiley, New York, 1987.

[132] A. Grothendieck. *Topological vector spaces*. Gordon and Breach, New York, 1973.

[133] Paul Halmos. *Naive set theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.

[134] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002
https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf.

[135] Felix Hausdorff. Dimension und außeres maß. *Math. Annalen*, 79:157–159, 1919.

[136] Felix Hausdorff. *Set Theory (translated from the original German)*. Chelsea, New York, 1962.

[137] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914)*. Chelsea, New York, 1965.

[138] Horst Herrlich. *Axiom of Choice*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

[139] Horst Herrlich and Hans-E. Porst, editors. *Category theory at work*. Heldermann-Verlag, Berlin, 1991.

[140] Edwin Hewitt. A remark on density characters. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52: 641–643, 1946.

[141] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[142] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis II: structure and analysis for compact groups, analysis on locally compact abelian groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[143] P.J. Higgins. *An introduction to topological groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[144] Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann, and Jimmie D. Lawson. *Lie groups, convex cones and semigroups*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[145] Peter John Hilton. *Homology theory: an introduction to algebraic topology*. Cambridge University Press, London, 1967.

[146] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications*. W. de Gruyter, New York, 1998.

[147] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition*. Elsevier, Oxford, UK, 2004.

[148] John Gilbert Hocking and Gail S. Young. *Topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1961.

[149] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups*. European Mathematical Society Publishing House, Tracts in Mathematics 2, Zurich, Switzerland, 2007.

[150] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert*. de Gruyter, Studies in Mathematics 25, Berlin, third edition, 2013.

[151] Karl Heinrich Hofmann. Finite dimensional submodules of g-modules for a compact group. *Proc. cambridge Philos. Soc.*, 65:47–52, 1969.

[152] Karl Heinrich Hofmann and Paul S. Mostert. *Elements of compact semigroups*. C.E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.

[153] *Hopf Topology Archive*. http://hopf.math.purdue.edu, 1996–. Purdue University Hopf Archive of Topology preprints.

[154] Juan Horváth. *Topological vector spaces and distributions*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[155] Paul Howard. *Consequences of the Axiom of Choice Project Homepage*, http://www.math.purdue.edu/~hrubin/JeanRubin/Papers/conseq.html, 1998 –.

[156] Paul Howard and Jean Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. Mathematical Surveys and Monographs 59; American Mathematical Society, Providence, R.I., 1988.

[157] Norman R. Howes. *Modern analysis and topology*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[158] S.T. Hu. *Introduction to general topology*. Holden-Day, San Francisco, 1966.

[159] S.T. Hu. *Differentiable manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[160] Sze-Tsen Hu. *Homotopy Theory*. Academic Press, London, 1959 http://tinyurl.com/zb4x6q4.

[161] Sze-Tsen Hu. *Elements of general topology*. Holden-Day, San Francisco, 1964.

[162] Sze-Tsen Hu. *Homology theory; a first course in algebraic topology*. Holden-Day, San Francisco, 1966.

[163] Witold Hurewicz and Witold Wallman. *Dimension theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

[164] Taqdir Husain. *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces*. Clarendon Press, Oxford, 1965.

[165] Taqdir Husain. *Introduction to topological groups*. W.B. Saunders, Philadelphia, 1966.

[166] Taqdir Husain. *Topology and maps*. Plenum Press, New York, 1977.

[167] Miroslav Husek and Jan Van Mill. *Recent progress in general topology*. North-Holland, Amsterdam; New York, 1992.

[168] J.R. Isbell. *Uniform spaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[169] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:865, 1992.

[170] I.M. James. *General topology and homotopy theory*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[171] I.M. James. *Handbook of algebraic topology*. Elsevier, Amsterdam; New York, 1995.

[172] I.M. James. *Topologies and uniformities*. Springer, London; New York, 1999.

[173] I.M. James. *History of topology*. Elsevier, Amsterdam; New York, 1999.

[174] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. *Abstract algebra and famous impossibilities*. Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

[175] I. Juhász. *Cardinal functions in topology, ten years later*, 1983 http://oai.cwi.nl/oai/asset/12982/12982A.pdf.

[176] E. Kamke. *The theory of sets*. Dover, Mineola, New York, 1950.

[177] V. Kannan. *Ordinal invariants in topology*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1981.

[178] S. Kaplan. Extensions of pontryagin duality i. *Duke Math. J.*, 15:419–435, 1948.

[179] S. Kaplan. Extensions of pontryagin duality ii. *Duke Math. J.*, 17:649–658, 1950.

[180] Christian Kassel. *Quantum groups*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[181] Louis H. Kauffman and Randy A. Baadhio. *Quantum topology*. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, 1993.

[182] John L. Kelley. *General topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[183] Sir William Thomson Lord Kelvin. *The Tides Evening Lecture To The British Association At The Southampton Meeting, 1882*, http://http://tinyurl.com/zkbrmu5.

[184] S.M. Khaleelulla. *Counterexamples in topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1982.

[185] Wan-hui Kim and Robert Tien-wen Chien. *Topological analysis and synthesis of communication networks*. Columbia University Press, New York, 1962.

[186] Bruce R. King. *Applications of graph theory and topology in inorganic cluster and coordination chemistry*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[187] Martin Kleiber and W.J. Pervin. A generalized Banach-Mazur theorem. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1:169–173, 1969 http://tinyurl.com/ohcwwxg.

[188] Felix Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Math. Annalen*, 43:63–100, 1893.

[189] T. Yung Kong and Azriel Rosenfeld. *Topological algorithms for digital image processing*. Elsevier, Amsterdam; New York, 1996.

[190] Gottfried Köthe. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1983.

[191] H. Kuhn. Ein elementar beweis des weierstrasschen approximationssztes. *Arch. der. Math. (Basel)*, 15:316–317, 1964.

[192] Kenneth Kunen. *Set theory*. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[193] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[194] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to set theory and topology*. Pergamonn Press, New York, 1961.

[195] A. G. Kurosh. *Theory of Groups: Volume 1*. AMS Chelsea Publishing, New York, 1956; Reprinted 1960.

[196] N.P. Landsman. *Lecture notes on C^* algebras and quantum mechanics*, 1998 http://tinyurl.com/zxsg54u.

[197] Serge Lang. *Real and functional analysis, third edition*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993
http://tinyurl.com/zmxpfmv.

[198] H.A. Lauwerier. *Fractals: endlessly repeated geometrical figures*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.

[199] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Springer, New York, 2000.

[200] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York, 2002.

[201] Arkady G. Leiderman, Vladimir G. Pestov, and Artur H. Tomita. *Topological groups admitting a base at identity indexed with ω^ω*, 2016
https://arxiv.org/pdf/1511.07062.pdf.

[202] H. Leptin. Zur dualit´ atstheorie projectiver limites abelscher gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 19:264–268, 1955.

[203] Huaxin Lin. *An introduction to the classification of amenable C^*-algebras*. World Scientific, London, Singapore, 2001.

[204] Seymour Lipschutz. *Schaum's outline of general topology*. McGraw Hill, 1968.

[205] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo. *Fuzzy topology*. World Scientific Publishers, River Edge, N.J., 1997.

[206] Charles Livingston. *Knot theory*. The Mathematical association of America, 1993.

[207] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.

[208] Ian D. Macdonald. *The theory of Groups*. Oxford University Press, Oxford, 1968 http://tinyurl.com/h47qwe3.

[209] Saunders Maclane. *Categories for the working mathematician, second edition*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[210] I.J. Maddox. *Elements of functional analysis, second edition*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988 http://tinyurl.com/pwyeelq.

[211] Benoit B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 155:636–638, 1967.

[212] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman, New York, 1983.

[213] Mark Mandelkern. A short proof of the tietze-urysohn extension theorem. *Arch. Math.*, 60:364–366, 1993.

[214] Edward Marczewski. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques. *Fundamenta Math.*, 34:137–143, 1947.

[215] Per Martin-Löf. *100 years of Zermelo's axiom of choice: What was the problem with it?, in Logicism, Intuitionism, and Formalism: What Has Become of Them?, Sten Lindström, Erik Palmgren, Krister Segerberg, and Viggo Stoltenberg-Hansen editors*. Springer, London, 2009.

[216] R.D. Mauldin, editor. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*. Birkhäuser, Boston, 1981.

[217] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645–647, 1974.

[218] George McCarty. *Topology; an introduction with application to topological groups*. McGraw Hill, New York, 1967.

[219] Robert A. McCoy and Ibulu Ntantu. *Topological properties of spaces of continuous functions*. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1988.

[220] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, New York, 1998.

[221] Richard E. Merrifield and Howard E. Simmons. *Topological methods in chemistry*. Wiley, New York, 1989.

[222] Emil G. Milewski. *The topology problem solver: a complete solution guide to any textbook*. Research and Education Association, Piscataway, N.J., 1994.

[223] M. Mimura and Hirosi Toda. *Topology of Lie groups*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[224] Edward E. Moise. *Introductory problem courses in analysis and topology*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[225] Mikhail I. Monastyrskaei. *Topology of gauge fields and condensed matter*. Plenum Press, New York, 1993.

[226] Deane Montgomery and Leo Zippin. *Topological transformation groups*. Interscience Publishers, New York, 1955.

[227] E.H. Moore and H.L. Smith. A general theory of limits. *American Journal of Mathematics*, 44:102–121, 1922.

[228] Robert L. Moore. *Foundations of point set topology*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[229] Giuseppe Morandi. *The role of topology in classical and quantum physics*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1992.

[230] K. Morita and J. Nagata, editors. *Topics in general topology*. North Holland, Amsterdam, 1989.

[231] Sidney A. Morris. *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1977.

[232] Sidney A. Morris. Varieties of topological groups ... a survey. *Colloquium Mathematicum*, 46:147–165, 1982
http://tinyurl.com/zwpssww.

[233] Sidney A. Morris. Are finite topological spaces worthy of study. *Austral. Math. Soc. Gazette*, 11:31–32, 1984.

[234] Sidney A. Morris. An elementary proof that the Hilbert cube is compact. *Amer. Math. Monthly*, 91:563–564, 1984.

[235] Sidney A. Morris, editor. *Topological Groups: Yesterday, Today, Tomorrow*. MDPI, Basel, Switzerland, 2016
http://tinyurl.com/hc5th7g.

[236] Jan Mycielski. A system of axioms of set theory for the rationalists. *Notices Ameri. Math. Soc.*, 53 (2):209, 2006.

[237] Gregory L. Naber. *Topological methods in Euclidean spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1980.

[238] Gregory L. Naber. *Topology, geometry and gauge fields: foundations*. Springer, New York, 1997.

[239] Keio Nagami. *Dimension theory*. Academic Press, New York, 1970.

[240] Jun-iti Nagata. *Modern dimension theory*. Interscience Publishers, New York, 1965.

[241] Jun-iti Nagata. *Modern general topology*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985.

[242] M.A. Naimark. *Normed Rings*. P. Noordhoff, 1959.

[243] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. A. Hilger, Bristol, England; New York, 1990.

[244] H. Nakano. *Topology and linear topological spaces*. Maruzen Co., Tokyo, 1951.

[245] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. *Topological vector spaces*. M. Dekker, New York, 1985.

[246] Charles Nash. *Topology and geometry for physicists*. Academic Press, London, New York, 1983.

[247] M.H.A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points*. Greenwood Press, Westport, Conn., 1985.

[248] Peter Nickolas. Reflexivity of topological groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65: 137–141, 1977.

[249] Peter Nickolas. Coproducts of abelian topological groups. *Topology and its Applications*, 120:403–426, 2002.

[250] Ivan Niven. *Numbers: Rational and Irrational*. The L.W. Singer Company, Connecticut, 1961
http://users.auth.gr/siskakis/Niven-NumbersRationalAndIrrational.pdf.

[251] N. Noble. k-groups and duality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151:551–561, 1970.

[252] A.L. Onishchik. *Topology of transitive transformation groups*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.

[253] John C. Oxtoby. *Measure and category; a survey of the analogies between topological and measure spaces*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[254] A.R. Pears. *Dimension Theory of general spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1975.

[255] Anthony L. Peressini. *Ordered topological vector spaces*. Harper and Row, New York, 1967.

[256] Vladimir Pestov. Free abelian topological groups and pontryagin-van kampen duality. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 52:297–311, 1995.

[257] Les A. Piegl. *Fundamental developments of computer-aided geometric modeling*. Academoc Press, 1993.

[258] C.G.C. Pitts. *Introduction to metric spaces*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

[259] Wolfram Pohlers. *Proof theory: an introduction*. Springer, Berlin, 1989.

[260] Henri Poincarè. *Science and method; translated and republished*. Dover Press, New York, 2003.

[261] E.S. Pondiczery. Power problems in abstract spaces. *Duke Math. J.*, 11: 835–837, 1944.

[262] L.S. Pontryagin. *Topological Groups*. Princeton University Press, Princeton, 1946.

[263] Ian R. Porteous. *Topological geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1981.

[264] Gavriil Pāltineanu. Some applications of bernoulli's inequality in the approximation theory. *Romanian J. Math. Comp. Sc.*, 4:1–11, 2014.

[265] Bodo von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[266] D.A. Raikov. Harmonic analysis on commutative groups with haar measure and the theory of characters (russian with english abstract). *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 14:1–86, 1945.

[267] George M. Reed. *Surveys in general topology*. Academic Press, New york, 1980.

[268] G.M. Reed, A.W. Roscoe, and R.F. Wachter. *Topology and category theory in computer science*. Oxford University Press, Oxford, England, 1991.

[269] Renzo L. Ricca. *An introduction to the geometry and topology of fluid flows*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 2001.

[270] David S. Richeson. *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2008.

[271] A.P. Robertson and Wendy Robertson. *Topological vector spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.

[272] D.W. Roeder. Category theory applied to pontryagin duality. *Pacific J. Math.*, 52:519–527, 1974.

[273] Judith Roitman. *Introduction to modern set theory*. Virginia Commonwealth University Mathematics, Virginia, 2011.

[274] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[275] Herman Rubin and Jean E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North Holland, 1963.

[276] Herman Rubin and Jean E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice II*. North Holland/Elsevier, 1985.

[277] Mary-Ellen Rudin. A normal space x for which $x \times i$ is not normal. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77:246, 1971.

[278] Mary Ellen Rudin. *Lectures on set theoretic topology*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[279] Walter Rudin. *Principles of Mathematical analysis, third edition*. Mc Graw Hill, New York etc, 1964
http://tinyurl.com/peudmtw.

[280] Walter Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967.

[281] Walter Rudin. *Functional analysis, second edition*. Mc Graw Hill, New York etc, 1991
http://tinyurl.com/zj3ohkw.

[282] Hans Sagan. *Space-filling curves*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[283] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukranian Mat. Z.*, 16:61–71, 1964.

[284] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. *Word problems II, Stud. Logic Found. Math.*, 995:373–394, 1980.

[285] M. Signore and F. Melchiorri. *Topological defects in cosmology*. World Scientific Publishers, Singapore, 1998.

[286] George E. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis*. McGraw Hill, New York, 1963.

[287] Barry Simon. *Tales of our forefathers* http://tinyurl.com/hr4cq3c.

[288] I.M. Singer. *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Springer-Verlag, New York, 1967.

[289] Christopher G. Small. *The statistical theory of shape*. Springer, New York, 1996.

[290] M.F. Smith. The pontryagin duality theorem in linear spaces. *Ann. of Math.*, (2) 56:248–253, 1952.

[291] Alexei Sossinsky. *Knots: mathematics with a twist*. Harvard University Press, 2002.

[292] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1966.

[293] Michael Spivak. *Calculus on manifolds*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

[294] John R. Stallings. *Lectures on polyhedral topology*. Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India, 1967.

[295] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. *Counterexamples in topology*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[296] N.E. Steenrod. *Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 191968.

[297] N.E. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.

[298] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group topology*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[299] M.H. Stone. Applications of the theory of boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math.Soc.*, 41(3):375–481, 1937.

[300] M.H. Stone. The generalized weierstrass approximation theorem. *Mathematics Magazine*, 21(4):167–184, 1937.

[301] Markus Stroppel. *Locally compact groups*. European Mathematical Society Publishers, Zurich, 2006.

[302] B. Sury. Weierstrass's theorem - leaving no Stone unturned. *Resonance*, : 341–355, 2011
http://www.isibang.ac.in/~sury/hyderstone.pdf.

[303] Terrence Chi-Shen Tao. *Hilbert's Fifth Problem and Related Topics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2014
http://tinyurl.com/9a4ofdu.

[304] *The MacTutor History of Mathematics Archive*.
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/, 2001–.

[305] Wolfgang Thron. *Topological structures*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[306] *Topology*. http://www.elsevier.com/locate/top, 1962–. A hard-copy refereed research journal in topology and geometry.

[307] *Topology and its Applications*. http://www.elsevier.nl/locate/topol, 1971–. A hard-copy refereed research journal in topology.

[308] *Topology Atlas*. http://at.yorku.ca/topology, 1995–. Topology related resources.

[309] *Topology Proceedings*.
http://topology.auburn.edu/tp/, 1977–. A hard-copy refereed research journal.

[310] H. Toruňczyk. Characterizing Hilbert space topology. *Fundamenta Math.*, 111: 247–262, 1981.

[311] E.R. van Kampen. Locally bicompact abelian groups and their character groups. *Ann. of Math.*, (2) 36:448–463, 1935.

[312] J. van Mill. *The infinite-dimensional topology*. North Holland, Amsterdam, Oxford, Tokyo, 1988.

[313] J. van Mill. *The infinite-dimensional topology of function spaces*. Elsevier, Amsterdam, New York, 2001.

[314] Jan van Mill and George M. Reed. *Open problems in topology*. North-Holland, Amsterdam, 1990.

[315] N.Th. Varopoulos. Studies in harmonic analysis. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 60:465–516, 1964.

[316] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. *Amer. Math. Monthly*, 101:353–355, 1994.

[317] R. Venkataraman. Extensions of pontryagin duality. *Math. Z.*, 143:105–112, 1975.

[318] Steven Vickers. *Topology via logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[319] N.Ya. Vilenkin. The theory of characters of topological abelian groups with boundedness given. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat.*, 15:439–462, 1951.

[320] A.V. Vologodskii. *Topology and physics of circular DNA*. CRC Press, Boca Raton, 1992.

[321] J. von Neumann. Zur einführung der transfiniten zahlen. *Acta litt. Acad. Sc. Szeged*, X.1:199–208, 1923.

[322] J. von Neumann. Eine widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen mengenlehre. *Crelle*, 160:227, 1929.

[323] John von Neumann. Almost periodic functions in a group i. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36:445–492, 1934.

[324] Rudolf Výborný. The weierstrass theorem on polynomial approximation. *Mathematica Bohemica*, 130:161–166, 2005.

[325] Russell C. Walker. *The Stone-Cech compactification*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[326] C.T.C. Wall. *A geometric introduction to topology*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[327] A.D. Wallace. *Differential topology; first steps*. W.A. Benjamin, New York, 1968.

[328] H. Wallmani. Lattices and topological spaces. *Ann. of Math.*, 39:112–126, 1938.

[329] Evert Wattel. *The compactness operator in set theory and topology*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.

[330] Jeffrey R. Weeks. *The shape of space*. Marcel Dekker, New York, 2002.

[331] A. Weil. *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann & Cie., Paris, 1951.

[332] Hermann Weyl and F. Peter. Die vollständigkeit der primitiven darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen gruppe. *Math. Ann.*, 97:737–755, 1927.

[333] Stuart G. Whittington, De Witt Sumners, and Timothy Lodge, editors. *Topology and geometry in polymer science*. Springer, New York, 1998.

[334] R.L. Wilder. *Topology of manifolds*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.

[335] Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[336] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82:985–992, 1975.

찾아보기