ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΔΙΧΩΣ ΔΑΚΡΥΑ[1]

SIDNEY A. MORRIS

Έκδοση: 24 Ιουλίου 2014[2]

Τμήματα του βιβλίου αυτού, από τήν έκδοση του 2007 ή μετέπειτα, έχουν μεταφραστεί στις εξής γλώσσες:

στα αραβικά (από την Alia Mari Al Nuaimat),
στα ελληνικά (από τον Δρ. Κυριάκο Β. Παπαδόπουλο),
στα ισπανικά (από τον Δρ. Guillermo Pineda-Villavicencio),
στα κινεζικά (από τον Δρ. Fusheng Bai),
στα περσικά (από τον Δρ. Asef Nazari Ganjehlou),
στα ρωσικά (από τον Δρ. Eldar Hajilarov).

Εάν επιθυμείτε ένα δωρεάν αντίτυπο του βιβλίου αυτού, παρακαλείστε να στείλετε ηλεκτρονικό μήνυμα στην διεύθυνση morris.sidney@gmail.com με τα ακόλουθα στοιχεία:

(i) το όνομά σας,
(ii) την διεύθυνση κατοικίας σας και
(iii) να συμπεριλάβετε, στον κορμό του μηνύματός σας, ρητή δήλωση ότι συμφωνείτε στο να μην μοιραστείτε με άλλα πρόσωπα τον κωδικό που θα σας αποσταλλεί, καθώς και ηλεκτρονικό ή φωτοτυπημένο αντίτυπο του βιβλίου. [Διδάσκαλοι και καθηγητές είναι ευπρόσδεκτοι να χρησιμοποιήσουν το υλικό αυτό στις τάξεις τους, αλλά δεν επιτρέπεται να μοιραστούν τον κωδικό ή αντίτυπα αυτού του βιβλίου με τους μαθητές ή με συναφέλφους. Θα πρέπει να ενημερώσουν τους μαθητές/φοιτητές τους να επικοινωνήσουν οι ίδιοι απευθείας με τον συγγραφέα, στην προαναφερθείσα διεύθυνση.]

[2]Η συγγραφή του βιβλίου αυτού ενημερώνεται διαρκώς και το υλικό του αναπτύσσεται σταδιακά. Στόχος του συγγραφέα είναι να υπάρχουν τελικώς δεκαπέντε κεφάλαια, μαζί με τα παραρτήματα. Εάν ανακαλύψετε λάθη ή εάν θα θέλατε να προτείνετε βελτιώσεις στο κείμενο, παρακαλείστε θερμά να στείλετε ηλεκτρονικό μήνυμα με τις προτάσεις σας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Η Τοπολογία αποτελεί μια άκρως ενδιαφέρουσα και ιδιαίτερα σημαντική περιοχή των μαθηματικών, η μελέτη της οποίας δεν θα σας εισαγάγει μόνον σε νέες έννοιες και θεωρήματα, αλλά θα θέσει επί τάπητος και ήδη γνωστές έννοιες, όπως για παράδειγμα την έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Ο περιορισμός μας ωστόσο σε μια τέτοια περιγραφή θα μείωνε την πραγματική σημασία του αντικειμένου αυτού, το οποίο είναι τόσο θεμελιώδες σαν κόμβος των μαθηματικών, ώστε να παρουσιάζεται σε κάθε άλλη περιοχή της μαθηματικής επιστήμης. Αυτό είναι που τοποθετεί την Τοπολογία υψηλά, σε όσους θέλουν να γίνουν μαθηματικοί, ανεξάρτητα αν η πρώτη τους 'μαθηματική αγάπη' περιορίζεται στην Άλγεβρα ή σε τομείς όπως της Ανάλυσης, της Θεωρίας Κατηγοριών, της Θεωρίας του Χάους, της Μηχανικής, της Γεωμετρίας, των Βιομηχανικών Μαθηματικών, της Μαθηματικής Βιολογίας, των Μαθηματικών Οικονομικών, των Χρηματοοικονομικών, της Μαθηματικής Μοντελοποίησης, της Μαθηματικής Φυσικής, των Μαθηματικών Επικοινωνιών, της Θεωρίας Αριθμών, των Αριθμητικών Μεθόδων, της Επιχειρησιακής Έρευνας, της Στατιστικής κλπ. (Η αναλυτική βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου αρκεί για να γίνει κατανοητό ότι η τοπολογία έχει, πράγματι, άμεση σχέση με τα προαναφερθέντα αντικείμενα και όχι μόνον με αυτά.)

Τοπολογικές έννοιες όπως η συμπαγότητα, η συνεκτικότητα και η πυκνότητα είναι τόσο βασικές για έναν σύγχρονο μαθηματικό, όσο σημαντικές υπήρξαν οι έννοιες των συνόλων και των συναρτήσεων στον προηγούμενο αιώνα.

Η Τοπολογία αποτελείται από διαφορετικούς κόμβους: την Γενική Τοπολογία (η οποία είναι επίσης γνωστή με το όνομα Τοπολογία των Μονοσυνόλων), την Αλγεβρική Τοπολογία, την Διαφορική Τοπολογία και την Τοπολογική Άλγεβρα. Η Γενική Τοπολογία θεωρείται το κλειδί στην κατανόηση των άλλων κόμβων του αντικειμένου.

Στόχος μας σε αυτό το βιβλίο είναι να παράσχουμε γερά θεμέλια πάνω στην Γενική Τοπολογία. Ο αναγνώστης που θα ασχοληθεί σοβαρά με τα πρώτα δέκα κεφάλαια, λύνοντας τουλάχιστον τις μισές ασκήσεις σε κάθε κεφάλαιο, θα έχει αποκτήσει τα θεμέλια αυτά.

Ο αναγνώστης που δεν έχει πρωτύτερα ασχοληθεί με μια περιοχή των μαθηματικών η οποία στηρίζεται σε αξιωματική θεώρηση, όπως με την αφηρημένη Άλγεβρα για παράδειγμα, θα δυσκολευτεί στην αρχή στην διαδικασία της απόδειξης θεωρημάτων. Προς διευκόλυνση αυτών των αναγνωστών, συμπεριλαμβάνουμε (στα πρώτα κεφάλαια) μια διαισθητική προσέγγιση, η οποία δεν θα αποτελεί τμήμα της επίσημης απόδειξης, αλλά θα βοηθά στην κατανόηση της αποδεικτικής διεργασίας.

Η διαισθητική προσέγγιση των αποδείξεων γίνεται σε αυτό το βιβλίο κατά τον ακόλουθο τρόπο:

> Για να φτάσουμε στην ολοκλήρωση της απόδειξης, θα ακολουθούμε μια συγκεκριμένη διαδικασία, την οποία θα μπορούσε κανείς να αποκαλέσει 'ανακάλυψη' ή 'πειραματική βάση'. Παρόλα αυτά, ο αναγνώστης θα μάθει ότι ενώ, από την μία, ο πειραματισμός είναι καθοριστικής σημασίας ως προς την εξεύρεση λύσης σε ένα πρόβλημα, τίποτα ωστόσο δεν δύναται να αντικαταστήσει την επίσημη απόδεικτική διεργασία.

Υπάρχει μια σημαντική διαφορά, μεταξύ της χρήσης του συνδέσμου 'ή' στην ελληνική γλώσσα και στα μαθηματικά. Στην ελληνική, όταν λέμε ότι η πρόταση τάδε ή η πρόταση δείνα είναι αληθής, εννοούμε συνήθως ότι η πρόταση τάδε είναι αληθής ή η πρόταση δείνα είναι αληθής, $\boxed{\text{αλλά όχι και οι δυο προτάσεις μαζί}}$. Στα μαθηματικά η σημασία είναι διαφορετική: ο σύνδεσμος 'ή' δεν αποκλείει την περίπτωση να είναι και οι δυο προτάσεις μαζί αληθείς. Οπότε, η πρόταση τάδε είναι αληθής ή η πρόταση δείνα είναι αληθής ή οι προτάσεις τάδε και δείνα, μαζί, είναι αληθείς. Για παράδειγμα, $x \geq 2$ ή $x \leq 2$. Όμως οι προτάσεις $x \leq 2$ και $x \geq 2$ είναι και οι δυο μαζί αληθείς όταν $x = 2$. Η συγκεκριμένη μαθηματική χρήση είναι δυνατό να φέρει σύγχυση στην αρχή. Φερειπείν, όταν λέμε 'είτε η πρόταση τάδε είτε η πρόταση δείνα είναι αληθής', εννοούμε ότι η πρόταση τάδε είναι αληθής ή η πρόταση δείνα είναι αληθής ή και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς ταυτοχρόνως. Οπότε πρέπει πάντα να θυμόμαστε ότι στα μαθηματικά, ο σύνδεσμος 'ή' δεν είναι αποκλειστικός ("exclusive" στην διεθνή βιβλιογραφία).

Το παρόν βιβλίο γράφτηκε στην αγγλική από τον συγγραφέα (Sid Morris) χρησιμοποιώντας το εξαιρετικό πακέτο στοιχειοθεσίας TEX, το οποίο σχεδιάστηκε από τον Donald Knuth. Για την μετάφραση χρησιμοποιήσαμε το πακέτο LATEX, κι ενημερωθήκαμε για τις δυνατότητες του XeLaTex από τον πολυγραφότατο φίλο Απόστολο Συρόπουλο. Ακριβώς επειδή το πακέτο αυτό (TEX, LATEX, XeLaTex) είναι πολύ 'έξυπνο', αποτελεί ισχυρή επιδίωξή μας, οποτεδήποτε είναι εφικτό, η παρουσίαση ενός αποτελέσματος, καθώς και ολόκληρης της απόδειξής του, να λαμβάνουν χώρα στην ίδια σελίδα – αυτό καθιστά πιο εύκολο κατά την γνώμη μας στον αναγνώστη, στο να αφομοιώσει έννοιες που του είναι ήδη γνωστές, και στο να ξεκαθαρίσει τί προσπαθεί να αποδείξει, γνωρίζοντας τί έχει αποδειχθεί ήδη μέχρις ενός συγκεκριμένου σημείου. Αυτός ο λόγος δεν θα μας εμποδίσει να αφήσουμε, εάν χρειαστεί, μισή σελίδα άδεια (ή να χρησιμοποιήσουμε έξυπνα τυπογραφικά τρικ στο LATEX), αρκεί ένα θεώρημα, καθώς και η απόδειξή του, να βρίσκονται στην ίδια σελίδα.

Έχουμε συμπεριλάβει πολλές ασκήσεις σε αυτό το πόνημα. Αρκεί να εργαστεί κανείς σε έναν ικανό αριθμό προβλημάτων, για να αποκτήσει οικειότητα με το αντικείμενο. Δεν συμπεριλαμβάνονται απαντήσεις στις ασκήσεις, και ούτε υπάρχει η πρόθεση να συμπεριληφθούν στο μέλλον. Αποτελεί άποψη του συγγραφέα ότι υπάρχουν ήδη αρκετά παραδείγματα και αποδείξεις στο κείμενο, έτσι ώστε να μην καθίσταται αναγκαία η παράθεση λύσεων. Πολύ συχνά συμπεριλαμβάνονται νέες έννοιες μέσα στις ασκήσεις: μόνον οι έννοιες που θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικές θα παρουσιάζονται ξεχωριστά στο κείμενο.

Στα προβλήματα που παρουσιάζουν αυξημένη δυσκολία θα υπάρχει ένδειξη με αστερίσκο $*$.

Οι αναγνώστες του βιβλίου αυτού θα μπορούσαν να επικοινωνούν μεταξύ τους, ώστε να αντιμετωπίζουν από κοινού τυχόν δυσκολίες που προκύπτουν κατά την επίλυση των ασκήσεων, όπως επίσης θα μπορούσαν και να συζητούν γενικότερα για το βιβλίο καθώς και για παρόμοιες αναγνώσεις. Προς αυτή την κατεύθυνση, δημιουργήσαμε μια ομάδα στο Facebook, με όνομα "Topology Without Tears Readers".

Τέλος, σημειώνουμε ότι τα μαθηματικά επιτεύγματα γίνονται ευκολότερα κατανοητά όταν εκτίθενται μέσα στο ιστορικό τους πλαίσιο: το βιβλίο αυτό θα λέγαμε ότι υστερεί σε αυτόν τον τομέα, πλην της απλής αναφοράς (προς το παρόν τουλάχιστον) σε μεγάλες προσωπικότητες του χώρου της τοπολογίας (βλέπε Παράρτημα 1).

Αυτές οι περιορισμένης έκτασης ιστορικές σημειώσεις έχουν κυρίως παρθεί από την πηγή [234]. Ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να επισκεφθεί την ιστοσελίδα αυτή και να μελετήσει τα άρθρα που εκτίθενται καθώς και τις πολλές πηγές. Η μαθηματική γνώση είναι μια κατάκτηση, αποτελεί μια αργή και σταδιακή διεργασία, που επιτυγχάνεται με την μελέτη πολλών διαφορετικών πηγών.

Όσον αφορά στο ιστορικό πλαίσιο του αντικειμένου που πραγματευόμαστε στο παρόν πόνημα, θα λέγαμε πως οι περισσότερες τοπολογικές έννοιες ανακαλύφθηκαν μέσα στο πρώτο μισό του εικοστού αιώνα: κατά την διάρκεια αυτής της περιόδου το κέντρο βάρους πέφτει (ή μάλλον έπεφτε, διότι τα σύνορα έχουν αλλάξει αρκετά) στην Πολωνία. Θα λέγαμε ότι ο Β΄ Παγκόσμιος Πόλεμος μετατόπισε το κέντρο βάρους σε άλλα κράτη. Ενθαρρύνουμε τον αναγνώστη με ενδιαφέρον για την μελέτη της Ιστορίας να ανατρέξει στό Παράρτημα 2, για μια πιο κοντινή ματιά στο σχόλιο αυτό.

0.1 Ευχαριστίες

Τμήματα προηγουμένων εκδόσεων του βιβλίου αυτού χρησιμοποιήθηκαν στα εξής πανεπιστήμια: La Trobe University, University of New England, University of Wollongong, University of Queensland, University of South Australia, City College of New York, University of Ballarat, σε ένα χρονικό διάστημα που υπερβαίνει τα τριάντα έτη. Ο συγγραφέας του βιβλίου αυτού θα ήθελε να ευχαριστήσει τους φοιτητές που άσκησαν εποικοδομητική κριτική, σε προηγούμενες εκδόσεις, διορθώνοντας λάθη. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στους Deborah King και Allison Plant για την ανάδειξη αρκετών λαθών, καθώς και αδυναμιών στην παρουσίαση του γραπτού κειμένου.

Πολλές ευχαριστίες οφείλει ο συγγραφέας και σε αρκετούς άλλους φίλους, συμπεριλαμβανομένων συναδέλφων, όπως των Ewan Barker, Eldar Hajilarov, Karl Heinrich Hofmann, Ralph Kopperman, Ray-Shang Lo, Rodney Nillsen, Guillermo Pineda-Villavicencio, Peter Pleasants, Kyriakos Papadopoulos (ο οποίος είναι και ο μεταφραστής του κειμένου στην ελληνική),Geoffrey Prince, Carolyn McPhail Sandison, και του Bevan Thompson, οι οποίοι ανέγνωσαν διαφορετικές εκδοχές του βιβλίου αυτού, και πρότειναν βελτιώσεις. Ευχαριστώ τον Rod Nillsen, του οποίου οι σημειώσεις πάνω στην Θεωρία Χάους ήταν χρήσιμες για την προετοιμασία του αντίστοιχου παραρτήματος. Συγκεκριμένα ευχαριστώ, επίσης,

τον Jack Gray, από το πανεπιστήμιο του New South Wales, του οποίου οι άριστες σημειώσεις με τίτλο "Set Theory and Transfinite Arithmetic", της δεκαετίας του ΄70, μας έδωσαν την αφορμή για την συγγραφή του παραρτήματος πάνω στην Θεωρία Συνόλων.

Το Παράρτημα 5 βασίζεται στην δουλειά του συγγραφέα, που δημοσιεύθηκε στα 1977, με τίτλο "Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups" Morris [188]. Ο συγγραφέας νιώθει υποχρεωμένος στην Δρα Carolyn McPhail Sandison, η οποία δαχτυλογράφησε το βιβλίο αυτό σε TEX, πριν από μια δεκαετία περίπου.

0.2 Για τους Αναγνώστες – Τοποθεσίες και Επαγγέλματα

Με το πέρασμα των χρόνων, από την πρωτοδημοσίευση του βιβλίου αυτού μέχρι σήμερα, κρίνοντας από την αλληλογραφία του συγγραφέα με πολλούς αναγνώστες, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το πόνημα αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν, και εξακολουθεί να χρησιμοποιείται, από πανεπιστημιακούς καθηγητές, μεταπτυχιακούς και προπτυχιακούς φοιτητές, καθηγητές και σπουδαστές τεχνολογικών ιδρυμάτων, αλλά και από καθηγητές και μαθητές στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ανεξαρτήτως επιστήμης. Μεταξύ των αναγνωστών υπάρχουν στατιστικολόγοι, λογιστές, οικονομολόγοι, αστρονόμοι, βιολόγοι, χημικοί, μηχανικοί του Πολυτεχνείου, γιατροί νευρολόγοι, διατροφολόγοι, ψυχαναλυτές, καλλιτέχνες...η λίστα δεν έχει πραγματικά τέλος, κι αυτό είναι εντυπωσιακό! Άνθρωποι τόσο διαφορετικών επαγγελμάτων και ασχολιών βρήκαν, σε κάποια στιγμή της ζωής τους, κάποιο ενδιαφέρον στην τοπολογία.

Χώρες από τις οποίες επικοινώνησαν με τον συγγραφέα του βιβλίου αναγνώστες που το βρήκαν ενδιαφέρον ή/και που είχαν παρατηρήσεις να κάνουν περιλαμβάνουν τις εξής (σημείωση μεταφραστή: για να κρατηθεί η αλφαβητική σειρά κρίθηκε σκόπιμο να παραμείνει η αγγλική μετάφραση, με την οποία άλλωστε συναντώνται αυτές οι ονομασίες στα επιστημονικά συγγράμματα διεθνώς): Algeria, Argentina, Australia, Austria, Bangladesh, Bolivia, Belarus, Belgium, Belize, Brazil, Bulgaria, Cambodia,Cameroon, Canada, Chile, Gabon, People's Republic of China, Colombia, Costa Rica, Croatia, Cyprus, Czech Republic, Denmark, Egypt, Estonia, Ethiopia, Fiji, Finland, France, Gaza, Germany, Ghana, Greece, Greenland, Guatemala, Guyana, Hungary, Iceland, India, Indonesia, Iran, Iraq, Israel, Italy, Jamaica, Japan, Kenya, Korea, Kuwait, Liberia, Lithuania, Luxembourg, Malaysia, Malta, Mauritius, Mexico, New Zealand, Nicaragua, Nigeria, Norway, Pakistan, Panama, Paraguay, Peru, Poland, Portugal, Puerto Rico, Qatar, Romania, Russia, Senegal, Serbia, Sierra Leone, Singapore, Slovenia, South Africa, Spain, Sri Lanka, Sudan, Suriname, Sweden, Switzerland, Taiwan, Thailand, The Netherlands, Trinidad and Tobago, Tunisia, Turkey, United Kingdom, Ukraine, United Arab Emirates, United States of America, Uruguay, Uzbekistan, Venezuela και Vietnam.

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται, συγκεκριμένα, στον ιστότοπο: http://www.econphd.net/notes.htm,
ο οποίος έχει σχεδιαστεί για φοιτητές οικονομικών κι επίσης στον Τοπολογικό Άτλαντα (Topology Atlas), στην διεύθυνση: http://at.yorku.ca/topology/educ.htm.

0.3 Σχόλια Αναγνωστών

Σχόλιο μεταφραστή: κατόπιν συζητήσεως με τον συγγραφέα, κρίθηκε σκόπιμο αρχικά να μην μεταφραστεί στην ελληνική γλώσσα το συγκεκριμένο τμήμα του βιβλίου, αλλά να παραμείνουν αυτούσια τα σχόλια των αναγνωστών, όπως ακριβώς τα απέστειλαν στον συγγραφέα. Άν και φαινομενικά ο μεταφραστής θα έπρεπε να είναι χαρούμενος που απαλλάχθηκε από αυτή 'περιττή' μετάφραση, θεώρησα πως η έκθεση αυτών των σχολίων, στην γλαφυρή νεοελληνική γλώσσα, θα ήταν τουλάχιστον απολαυστική. Γι΄ αυτό και μου δόθηκε τελικά η άδεια να κάνω την μετάφραση αυτή, διατηρώντας (το κατά δύναμιν!) το πνεύμα των σχολίων Υ.Γ. Σε ένα σημείο εκτίθεται και σχόλιο του μεταφραστή, από την όμορφη πόλη της Ξάνθης.

T. Lessley, ΗΠΑ: 'Υπέροχη δουλειά, όμορφα γραμμένη'.
E. Ferrer, Αυστραλία: 'Οι σημειώσεις σας είναι φανταστικές!'.
Andreas Loss, Γερμανία: 'Πραγματικά, απολαμβάνω το κείμενό σας με την ψυχή μου!'.
Yao Jin, Κίνα: 'Είμαι φοιτητής στο Πολυτεχνείο του πανεπιστημίου Zhejiang Sci-Tech University, της περιοχής Hangzhou, Zhejiang, στην Κίνα. Έπεσε στα χέρια μου το βιβλίο σας με τίτλο 'Topology without tears', το οποίο βρήκα ιδιαίτερα ελκυστικό για τον αναγνώστη'.
E. Yuan, Γερμανία: 'Αποτελεί, πράγματι, ένα φανταστικό βιβλίο για αρχαρίους στην Τοπολογία!'.
S. Kumar, Ινδία: 'Είμαι ιδιαίτερα εντυπωσιασμένος με την προσιτή παρουσίαση του αντικειμένου, που καθιστά εύκολη την παρακολούθησή του από μη μαθηματικούς '.

Pawin Siriprapanukul, Ταϋλάνδη: ‘Προετοιμάζομαι αυτή την στιγμή για διδακτορικό στις Οικονομικές Επιστήμες, και βρίσκω το βιβλίο σας πραγματικά χρήσιμο, ως προς την κατανόηση του περίπλοκου αντικειμένου της Τοπολογίας.’.
Hannes Reijner, Σουηδία: ‘Κατά την γνώμη μου (το σύγγραμμά σας) είναι άψογο!’.
G. Gray, ΗΠΑ: ‘Υπέροχο κείμενο!’.
Dipak Banik, Ινδία: ‘Όμορφη δουλειά!’.
Jan van Linschoten, Ολλανδία: ‘Ξεκίνησα να διαβάζω το ηλεκτρονικό σας βιβλίο, και μου πήρε μια ώρα περίπου να το ξεφυλλίζω, μες τα μαύρα μεσάνυχτα, μετά από ώρες (ή καλύτερα μέρες!) επίμονης έρευνας με στόχο να βρώ ένα βιβλίο που να μιλά ξεκάθαρα και αναλυτικά για τα θεμέλια της τοπολογίας. Και ναι, συνειδητοποίησα ότι βρήκα το βιβλίο αυτό - είναι το βιβλίο σας!’.
Daniel Csaba, Ουγγαρία: ‘Φοιτώ οικονομικά στο πανεπιστήμιο Eotvos Lorand, στην Βουδαπέστη, και αυτή την στιγμή μελετώ το βιβλίο σας ΄Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα΄, το οποίο βρίσκω ειλικρινά φανταστικό!¨.
B. Pragoff Jr, ΗΠΑ: ‘(Το βιβλίο αυτό) εξηγεί την τοπολογία σε έναν προπτυχιακό φοιτητή με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.’.
Tapas Kumar Bose, Ινδία: ‘Μια πολύτιμη πηγή πληροφοριών.’·
Debanshu Ratha, Ινδία: ‘Πρόσφατα ανακάλυψα το βιβλίο σας Τοπολογία χωρίς Δάκρυα στην ιστοσελίδα σας. Δεν μπορείτε να φανταστείτε πόσο πολύ το εκτίμησα. Αυτή την στιγμή είμαι προπτυχιακός φοιτητής στα μαθηματικά, στόν τρίτο χρόνο, κάπου στην Ινδία. Στο προηγούμενο εξάμηνο έλαβα το πρώτα μου μαθήματα στην Τοπολογία και, πρέπει να το παραδεχθώ, το βιβλίο σας αποτέλεσε ιδανικό βοήθημα. Η αδελφή μου δε, η οποία είναι μαθηματικός και αυτή, έμαθε για το βιβλίο σας αυτό από μένα, και λέει ότι το αγάπησε!’.
Bosko Damjanovic, Σερβία: ‘Διαβάζω στον Η/Υ μου το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα: πολύ καλό βιβλίο!’.
Κυριάκος Παπαδόπουλος, Ξάνθη, Ελλάς: ‘Ανακάλυψα το βιβλίο σας στο διαδίκτυο, και μου άρεσε ο τρόπος με τον οποίο εξηγείτε περίπλοκες ιδέες!’·
Mekonnen Yimam, Αιθιοπία ‘Το βιβλίο σας αποτελεί εξαιρετικά σημαντική πηγή για τις μεταπτυχιακές μου σπουδές. Νομίζω ότι θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο για μένα να ανταπεξέλθω στο αντικείμενο της τοπολογίας χωρίς αυτό το πόνημα ... Θα θεωρώ πάντοτε την συνεισφορά ως μέγιστη προσφορά στο αντικείμενο.
Yassine Amar: ‘Ένα εξαιρετικό βιβλίο, που βοηθά στο να θεωρήσουμε ένα αντικείμενο, όπως είναι η τοπολογία, σαν κάτι τόσο εύκολο όσο είναι να απολαμβάνεις ένα ντόνατ με καφέ.’
Muhammad Sani Abdullahi, Νιγηρία: ‘Δεν μπορώ να βρω τις κατάλληλες λέξεις

για να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη, επειδή ένα απλό ευχαριστώ δεν το θεωρώ αρκετό. Επειδή από την άλλη είναι παράδοση, οποτεδήποτε κάποιος κάνει για μας κάτι καλό, να λέμε ευχαριστώ, θα κάνω το ίδιο, γνωρίζοντας ωστόσο ότι σας χρωστώ πολύ περισσότερα. Γι΄ αυτό και θα προσεύχομαι πάντα για σας.'

Σπυρίδων Ν. Δημούδης, Ελλάς: 'Προσφάτως ανακάλυψα το βιβλίο σας με τίτλο Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα, διότι επιθυμώ να μάθω Τοπολογία. Ξεφυλλίζοντας το πόνημά σας προσεκτικά, αμέσως συνειδητοποίησα ότι αποτελεί εξαιρετικό βοήθημα στο εγχείρημά μου.'

Emelife Onochie, Νιγηρία: 'Φοιτώ, σε μεταπτυχιακό επίπεδο, στο Τμήμα Μαθηματικών, του πανεπιστημίου Nnamdi Azikiwe University Awka, της Νιγηρίας. Διαβάζω το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα στο διαδίκτυο, και θεωρώ ότι χρωστούμε πολλά σε ανθρώπους σαν εσάς, που τοποθετούν την γνώση πάνω από το χρήμα.

S. Saripalli, ΗΠΑ: 'Είμαι μαθητής λυκείου . . . και απόλαυσα την μελέτη του βιβλίου σας Τοπολογία Δίχως Δάκρυα'.

Roman Goncharenko, Τσεχία: 'Θα ήθελα να σας παρακαλέσω να μου στείλετε τον κωδικό για την εκτυπώσιμη μορφή του υπέροχου βιβλίου σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα. Είμαι μεταπτυχιακός φοιτητής στα οικονομικά, στο πανεπιστήμιο CERGE-EI, στην Πράγα'.

Samuel Frade, ΗΠΑ:'Πρώτον, θα ήθελα να σας ευχαριστήσω που έχετε συγγράψει ένα άριστο κείμενο πάνω στην Τοπολογία. Έχω ήδη τελειώσει τα δύο πρώτα κεφάλαια, και βρήκα τον τρόπο γραφής ευχάριστο. Θα ήθελα μόνο να προτείνω να προσθέσετε μερικές πιο δύσκολες ασκήσεις, διότι νομίζω ότι οι υπάρχουσες είναι λίγο-πολύ εύκολες. Βέβαια, από την άλλη κάνω major στα μαθηματικά, κι έχω ήδη διδαχθεί Ανάλυση και Μοντέρνα Άλγεβρα, ενώ το βιβλίο σας στοχεύει σε ένα ευρύτερο κοινό. Αλλά παρόλα αυτά, δεν είχα την τύχη να διδαχθώ Τοπολογία, διότι το Τμήμα μου βιώνει περικοπές, οπότε διδασκόμαστε μόνο τα κυριότερα μαθήματα, και η Τοπολογία θεωρείται πολυτέλεια. Αυτό με καθιστά αυτοδίδακτο μελετητή του αντικειμένου, μιας και πιστεύω ότι η γνώση της τοπολογίας θα με βοηθήσει να καταλάβω βαθύτερα πραγματική και μιγαδική Ανάλυση'.

Maria Amarakristi Onyido, Νιγηρία: 'Φοιτώ μαθηματικά, στο τελευταίο έτος, στο Πανεπιστήμιο της Νιγηρίας. . . . Βρήκα το βιβλίο σας εξαιρετικά ενδιαφέρον, διότι μετατρέπει ένα μάθημα-πρόκληση, την τοπολογία, σε ενδιαφέρον. Η παρουσίαση είναι πολύ καλή για έναν αρχάριο σαν εμένα και αποτελεί εξαιρετικό βοήθημα για να λάβω βάσεις στην Γενική Τοπολογία'.

Andree Garcia Valdivia, Περού: ‘Θα ήθελα να σας παρακαλέσω να με εφοδιάσετε με τον κωδικό για να κατεβάσω την εκτυπώσιμη μορφή της ισπανόφωνης έκδοσης του βιβλίου σας, εγγυόμενος ότι το προορίζω αποκλειστικά για προσωπική μου χρήση. Σπουδάζω οικονομικά στο πανεπιστήμιο του Αγίου Μάρκου, το οποίο είναι το παλαιότερο στην λατινική αμερική, και με ενδιαφέρει πολύ το αντικείμενο το οποίο πραγματεύεστε’.

Eszter Csernai, Ουγγαρία: ‘Είμαι προπτυχιακός φοιτητής και σπουδάζω Μαθηματική Θεωρία των Οικονομικών...είμαι βέβαιος ότι θα το έχετε ήδη ακούσει πολλές φορές, όμως θα το επαναλάβω όπως και να ΄χει: το βιβλίο σας είναι πραγματικά τέλειο!’.

Prof. Dr. Mehmet Terziler, Πανεπιστήμιο Yasar, Τουρκία: ‘Θα ήθελα την άδειά σας για να χρησιμοποιήσω το βιβλίο σας Τοπολογία Δίχως Δάκρυα στην τάξη μου. Θα μπορούσατε να μου στέλνατε μια εκτυπώσιμη μορφή αυτής της ΑΡΙΣΤΗΣ δουλειάς;’.

Christopher Roe, Αυστραλία: ‘Θα μπορούσα, αρχικά, να σας ευχαριστήσω για την συγγραφή του βιβλίου σας Τοπολογία Δίχως Δάκρυα; Παρά το γεγονός ότι οι ιδέες που πραγματεύεται είναι απλές για εσάς, για μένα η ανάγνωσή του είναι μια υπέροχη εμπειρία’.

Jeanine Dorminey, ΗΠΑ: ‘Αυτόν τον καιρό τυχαίνει να διδάσκομαι Τοπολογία και αντιμετωπίζω τεράστιες δυσκολίες κατανόησης του θέματος, μέσα στην τάξη. Ξεκίνησα να μελετώ το βιβλίο σας διαδικτιακά, διότι με βοηθεί πολύ’.

Dr. Anwar Fawakhreh, Qassim University, Σαουδική Αραβία: ‘Θα ήθελα να σας συγχαρώ για το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα. Είναι πραγματικά υπέροχο, διότι είναι γραμμένο κατά έναν τέτοιον τρόπο ώστε να είναι εύκολο για τον φοιτητή να το κατανοήσει. Διδάσκω τοπολογία σε προπτυχιακούς φοιτητές και θα ήθελα να χρησιμοποιήσω αυτό το βιβλίο στο μάθημά μου. Θα μπορούσατε σας παρακαλώ να με προμηθεύσετε με την αραβική μετάφραση; Επιθυμώ να εφοδιάσω και την βιβλιοθήκη μας με ένα αντίγραφο.’

Michael Ng, Macau: ‘Σε αντίθεση με άλλα πολλά αντίστοιχα βιβλία μαθηματικών, το δικό σας είναι γραμμένο με έναν φιλικό προς τον αναγνώστη τρόπο. Για παράδειγμα, στα αρχικά κεφάλαια παρέχετε πολλά βοηθητικά σχόλια πάνω στα θεωρήματα, εξεφρασμένα με τον πλέον αναλυτικό τρόπο. ΄Ολο αυτό καθιστά σε εμάς τους αρχάριους ευκολότερη την κατανόηση των αποδείξεων των θεωρημάτων. Επίσης ένα άλλο θετικό σχόλιο είναι ότι μετά από κάθε ορισμό μας εφοδιάζετε με έναν μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, έτσι ώστε να αποκτήσουμε σωστή και ξεκάθαρη εικόνα του αντικειμένου’.

Elise Delagnes, Ηνωμένο Βασίλειο: ‘Αυτή την στιγμή μελετώ τοπολογία στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Το πρόβλημά μου ήταν ότι έβρισκα το προτεινόμενο βιβλίο πιό δύσκολο απ΄ ότι περίμενα, γι΄ αυτό και ο καθηγητής μου μου συνέστησε το βιβλίο σας, Τοπολογία Δίχως Δάκρυα’.
Tarek Fouda, ΗΠΑ: ‘Διδάσκομαι προχωρημένο Λογισμό, στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο Stevens, όπου φοιτώ στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα με έμφαση στα οικονομικά για μηχανικούς. Μου είναι πρωτόγνωρη η επαφή με την Τοπολογία. Ενώ αγόρασα μερικά βιβλία, θεωρώ ότι το δικό σας εξηγεί το αντικείμενο με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Επιθυμώ να έχω αυτό το βιβλίο μαζί μου και να το διαβάζω στο τραίνο ή στην Σχολή...’.
Ahmad Al-Omari, Μαλαισία:‘Είμαι υποψήφιος διδάκτωρ στο UKM (Μαλαισία). Το ερευνητικό μου αντικείμενο είναι η γενική τοπολογία και βρίσκω το βιβλίο σας εξαιρετικά ενδιαφέρον’.
Annukka Ristiniemi, Ελλάδα: ‘Βρήκα το εξαιρετικό βιβλίο σας, πάνω στην τοπολογία, στο διαδίκτυο ... Κάνω το Mphil μου στα Οικονομικά, στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, και η Τοπολογία αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης ’.
Jose Vieitez, Ουρουγουάη:‘Αυτό το ακαδημαϊκό εξάμηνο διδάσκω Τοπολογία, στην Σχολή Επιστημών (Facultad de Ciencias) του πανεπιστημίου Universidad de la Republica. Θα ήθελα, αν γίνεται, να έχω μια εκτυπώσιμη μορφή του (πολύ καλού) βιβλίου σας ’.
Muhammad Y. Bello, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Bayero, Νιγηρία: ‘Το ηλεκτρονικό σας βιβλίο, Τοπολογία Δίχως Δάκρυα, αποτελεί μια άριστη πηγή για οποιονδήποτε επιθυμεί να μάθει Τοπολογία. Προσωπικά, διδάσκω μαθήματα πάνω στην Ανάλυση, όπου είναι απαραίτητη μια βασική γνώση της Τοπολογίας. Δυστυχώς, κάποιοι εκ των φοιτητών μου είτε δεν έχουν στέρεες τοπολογικές βάσεις είτε έχουν λησμονήσει τις τοπολογικές έννοιες που διδάχθηκαν, μιας και ήταν δύσκολο να τις συγκρατήσουν. Εξετάζοντας προσεκτικά την ηλεκτρονική έκδοση του βιβλίου σας, παρατήρησα ότι είναι έτσι γραμμένο ώστε να φρεσκάρει τις γνώσεις πάνω στο αντικείμενο, και να τις αποτυπώνει στο μυαλό των φοιτητών.’
Dr. Ljubomir R. Savic, καθηγητής, Institute for Mechanics and Theory of Structures, Πανεπιστήμιο του Βελιγραδίου, Σερβία:‘Ξεκίνησα να μελετώ Τοπολογία, και βρήκα το καταπληκτικό σας βιβλίο. Το ερευνητικό μου αντικείμενο είναι πάνω στα Continuum Mechanics και Structural Analysis’.
Pascal Lehmann, Γερμανία:‘Πρέπει να εκτυπώσω το φανταστικό σας βιβλίο, για να μπορώ να κρατώ σημειώσεις στα περιθώρια πραγματικού χαρτιού!’

Καθηγητής Luis J. Alias, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο της Murcia, Ισπανία: 'Μόλις που ανακάλυψα το άριστό σας πόνημα Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα. Θα ξεκινήσω να διδάσκω ένα μάθημα Γενικής Τοπολογίας (για την ακρίβεια, ξεκινώ από αύριο το πρωί!). Θα είναι η δεύτερή μου φορά, γιατί ξαναδίδαξα το μάθημα αυτό πέρυσι, ακολουθώντας κυρίως το βιβλίο του Munkres (Τοπολογία, Δεύτερη Έκδοση), από το οποίο κάλυψα τα Κεφάλαια 2,3, μέρος των 4,5 και μέρος του 9. Ομολογώ ότι μου είναι ευχάριστη η ανάγνωση του βιβλίου σας. Μου άρεσε ιδιαίτερα ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζετε καινούριες έννοιες και επίσης η προσθήκη βοηθητικών σχολίων και παρατηρήσεων-κλειδιά, προς τον αναγνώστη'.

Daniel Nkemzi, Λέκτορας, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο της Buea, Καμερούν: ¨Μετά από χρόνια μόχθου για να καταλάβω τα βασικά της Τοπολογίας, χωρίς καμία επιτυχία, τα παράτησα! Μέρχρις ότου να έρθει θεόσταλτο το κείμενό σας, το οποίο ανακάλυψα στο διαδίκτυο! Ξεφυλλίζοντας, ηλεκτρονικά, τις σελίδες, είμαι πια πεπεισμένος ότι, εάν δεν καταλάβω το αντικείμενο ούτε τώρα, με ένα τέτοιο κείμενο ως σημείο αναφοράς, τότε κανένα άλλο βιβλίο δεν θα μπορούσε να με βοηθήσει'.

Tirthankar Chakravarty, Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, Ηνωμένο Βασίλειο: 'Το αντικείμενό μου είναι η Οικονομετρία, και βρίσκω το κείμενό σας γραμμένο με αρτιότητα'.

Thomas Evelbauer, Γερμανία: 'Το ελκυστικό στυλ της γραφής σας και το περιελινεβρεακ χόμενο του βιβλίου με επηρέασαν έντονα. Ιδιαίτερα μου αρέσει ο τρόπος που παρουσιάζετε τα βασικά εργαλεία, και υποδεικνύετε τον τρόπο που χρησιμοποιούνται στις ασκήσεις και στις καθοδηγούμενες αποδείξεις '.

Gabriele. E.M. Biella MD PhD, Πρόεδρος του Ερευνητικού Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας (Institute of Molecular Bioimaging and Physiology, National Research Council), Ιταλία: 'Είμαι νευροφυσιολόγος, και προσπαθώ να επιτύχω μια νευροδυναμική περιγραφή αισθητηριακών διεργασιών (sensory processes), μέσω τοπολογικής προσέγγισης, και έπεσα πάνω στο υπέροχο βιβλίο σας '.

Fazal Haq, Πακιστάν:'Είμαι υποψήφιος διδάκτωρας στην Πολυτεχνική Σχολή του Ινστιτούτου Επιστημών και Τεχνολογίας Ghlam Ishaq Khan. Έμεινα έκπληκτος διαβάζοντας το ωραίο βιβλίο σας Τοπολογία Δίχως Δάκρυα. Είναι γεγονός ότι ποτέ δεν έχω ξαναδεί τόσο όμορφα γραμμένο βιβλίο στην τοπολογία'.

Gabriele Luculli, Ιταλία: 'Είμαι φοιτητής, στην αρχή των σπουδών μου, και βρίσκω αρκετά ενδιαφέροντα τον τρόπο που προτείνετε την τοπολογία ως αντικείμενο. Βρίσκω, επίσης, άκρως ενδιαφέροντα και τα πολλά παραδείγματα που δίνετε'.

K. Orr, Η.Π.Α.: ''Αριστο βιβλίο!'.
Καθηγητής Ahmed Ould, Κολομβία: 'Επιτρέψτε μου να σας συγχαρώ για την παρουσίαση, την απλότητα και την σαφήνεια του υλικού αυτού.',
Paul Unstead, ΗΠΑ: 'Μου αρέσουν οι σημειώσεις σας, επειδή παρέχουν πολλά μεστά παραδείγματα, και δεν θεωρείται ως προϋπόθεση για τον αναγνώστη να έχει major στα μαθηματικά'.
Alberto Garcia Raboso, Ισπανία: 'Μου αρέσει το βιβλίο σας, πάρα πολύ!'.
Guiseppe Curci, Διευθυντής του Τομέα Ερευνών στην Θεωρητική Φυσική, Πίζα, Ιταλία: 'Καλό και διαφωτιστικό βιβλίο πάνω στην τοπολογία!'.
M. Rinaldi, ΗΠΑ: 'Αυτό το βιβλίο αποτελεί, με διαφορά, την πιο ξεκάθαρη και καλογραμμένη εισαγωγή στην Τοπολογία, που έχω δει ποτέ ... μόλις ξεκίνησα να διαβάζω τις σημειώσεις σας, οι ιδέες αφομοιώθηκαν με ένα κλικ, αλλά και τα παραδείγματα που δίνετε είναι πραγματικά υπέροχα!'.
Joaquin Poblete, καθηγητής Οικονομικών, Καθολικό Πανεπιστήμιο της Χιλής: 'Μόλις τελείωσα την ανάγνωση του βιβλίου σας, και μου άρεσε πολύ. Είναι καθαρά γραμμένο και τα παραδείγματα αποκαλυπτικά.'.
Alexander Liden, Σουηδία: 'Μου αρέσει να μελετώ το βιβλίο σας από την οθόνη του υπολογιστή, όμως θα ήθελα να είχα και ένα εκτυπωμένο αντίγραφο.'.
Francois Neville, ΗΠΑ: 'Είμαι προπτυχιακός φοιτητής στο πανεπιστήμιο του Maine, και ο καθηγητής ενός μαθήματος πάνω στην διαστημική μηχανική μας πρότεινε το βιβλίο σας, ως βοήθημα στην Τοπολογία.'.
Hsin-Han Shen, ΗΠΑ: 'Είμαι υποψήφιος διδάκτωρ στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης, στο Μπάφαλλο. Οι σημειώσεις σας, στο διαδίκτυο, πάνω στην Τοπολογία, είναι κατά την άποψή μου λεπτομερείς και ευανάγνωστες, κάτι το ιδανικό για έναν πρωτάρη στο αντικείμενο, όπως είμαι εγώ.'.
Degin Cai, ΗΠΑ: 'Το βιβλίο σας είναι υπέροχο.'.
Eric Yuan, Darmstadt, Γερμανία: 'Είμαι αυτή την στιγμή φοιτητής μαθηματικών στο Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο του Darmstadt, και μελετώ Τοπολογία. Ο Καθηγητής μας, K.H. Hofmann μας σύστησε εμφατικά να διαβάσουμε το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα.'.
Martin Vu, Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης: 'Είμαι μεταπτυχιακός φοιτητής στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, εδώ στην Οξφόρδη. Επι τη ευκαιρία της (απαραίτητης) εξοικείωσής μου και με θεωρητικές έννοιες, ο τίτλος του βιβλίου σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα μου φαίνεται ελκυστικός.'.
Ahmet Erdem, Τουρκία: 'Μου άρεσε πολύ!'.

Kartika Bhatia, Ινδία: 'Είμαι μεταπτυχιακός φοιτητής στο Τμήμα Οικονομικών, του Πανεπιστημίου του Δελχί. Βρήκα το βιβλίο σας πολύ χρήσιμο και εύκολο να το κατανοήσει κανείς. Πολλές από τις αμφιβολίες που είχα μου λύθηκαν, διαβάζοντάς το.'
Wolfgang Moens, Βέλγιο:'Είμαι προπτυχιακός φοιτητης στο Καθολικό Πανεπιστήμιο της πόλης Leuven. Μελέτησα μέσα σε λίγες ώρες σχεδόν όλο το πρώτο μέρος του βιβλίου σας, και δεν διέφυγε της προσοχής μου ο ξεκάθαρος τρόπος γραφής σας, καθώς και η άριστη οργάνωση του κειμένου!'.
Duncan Chen, ΗΠΑ: 'Είμαι σίγουρος ότι έχετε ήδη λάβει πολλά τέτοια μηνύματα, αλλά παρόλα αυτά θα ήθελα να σας ευχαριστήσω για το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα. Παρά το γεγονός ότι είμαι προγραμματιστής, μου αρέσει να μελετώ μαθηματικά.'.
Maghaisvarei Sellakumaran, Σιγκαπούρη: 'Θα μετακομίσω σύντομα στις ΗΠΑ, όπου θα ξεκινήσω το διδακτορικό μου στα Οικονομικά. Θεωρώ το βιβλίο σας στην Τοπολογία υπερβολικά καλό!'.
Tom Hunt, ΗΠΑ: 'Σας ευχαριστώ που διαθέτετε το υπέροχό σας κείμενο στο διαδίκτυο.'.
Fausto Saporito, Ιταλία: 'Μελετώ το πολύ καλό βιβλίο σας, και μπορώ να πώ ότι είναι το καλύτερο που έχω δει πάνω στο αντικείμενο.'.
Takayuki Osogami, ΗΠΑ: 'Ξεκίνησα να διαβάζω το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα στο διαδίκτυο, και το θεωρώ πολύ καλό υλικό για να μάθει κανείς τοπολογία, καθώς και, γενικότερα, μαθηματικά θεωρητικής υφής.'.
Roman Knöll, Γερμανία: 'Σας ευχαριστώ θερμά για την ευκαιρία που μου δώσατε να διαβάσω το υπέροχό σας βιβλίο. Η Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα με βοήθησε αρκετά στο να ξανακερδίσω το ενδιαφέρον μου για τα μαθηματικά. Ένα ενδιαφέρον που έχασα προσωρινά, λόγω της μη συστηματικής προσέγγισης στην διδασκαλία και στην ώθηση για αποστήθιση.'.
Yuval Yatskan, ΗΠΑ:''Εριξα μια ματιά στο βιβλίο, και φαίνεται πραγματικά θαυμάσιο!'.
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Ελλάδα: 'Είναι ένα πολύ καλό βιβλίο.'.
Semih Tumen, Τουρκία: 'Τα διδακτορικά πάνω στις Οικονομικές Επιστήμες είναι απαιτητικά σε μαθηματικές γνώσεις, οπότε βρήκα το βιβλίο σας πολύ χρήσιμο, ενώ πραγματευόμουν τα θέματα που χρειάζεται να γνωρίζω.'
Pyung Ho Kim, ΗΠΑ: 'Αυτή την στιγμή είμαι υποψήφιος διδάκτωρ... Μελετώ οικονομική γεωγραφία, και αξιολογώ το βιβλίο σας ως άριστο, για να διδαχθεί κανείς βασικές έννοιες στην τοπολογία.'.

Javier Hernandez, Τουρκία: 'Είμαι πραγματικά ευγνώμων σε όλους αυτούς, όπως εσείς, που έδωσαν κάτι από το είναι τους για να μοιραστούν την Γνώση με εμάς τους υπόλοιπους, χωρίς να προσδωκούν κάτι για ίδιον όφελος.'.
Martin D. Siyaranamual, Center for Economics and Development Studies (CEDS), Πανεπιστήμιο του Padjadjaran, Bandung, Ινδονησία: 'Βρήκα το βιβλίο σας ιδιαίτερα χρήσιμο για μένα, διότι τον επόμενο χρόνο θα συνεχίσω τις σπουδές μου στην Οικονομική Σχολή, της Στοκχόλμης. Σας ευχαριστώ θερμά για όσα έχετε κάνει, τα οποία με προετοιμάζουν με τον καλύτερο τρόπο για μεταπτυχιακές σπουδές.'.
J. Chand, Αυστραλία: 'Πολλές ευχαριστίες για την παραγωγή του βιβλίου Τοπολογία Δίχως Δάκρυα. Το έργο αυτό είναι φανταστικό.'.
Richard Vande Velde, ΗΠΑ: 'Δύο χρόνια πρίν, επικοινώνησα μαζί σου για να μου δώσεις πρόσβαση στην εκτυπώσιμη μορφή του βιβλίου σου Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα, για προσωπική χρήση. Εκείνον τον καιρό δίδασκα Τοπολογία, για ένα πρόγραμμα που απευθυνόταν τόσο σε προπτυχιακούς όσο και σε μεταπτυχιακούς φοιτητές. Έδωσα τον σύνδεσμο της ιστοσελίδας σου στους φοιτητές, για να έχουν πρόσβαση στην διαδικτυακή έκδοση του κειμένου. Δεν δίδαξα όλη την ύλη από το βιβλίο σου, ούτε ακολούθησα το βιβλίο με την σειρά που παραθέτεις τα κεφάλαια, και ένας από τους καλύτερους μου φοιτητές μου επέδειξε ότι έπρεπε από την αρχή να ακολουθήσω πιστά τό κείμενό σου, και αποκλειστικά αυτό. Νομίζω ότι έχει δίκαιο. Επειδή η ιστορία επαναλαμβάνεται, δύο χρόνια μετά ξαναδιδάσκω το ίδιο μάθημα, για ένα παρόμοιου τύπου ακροατήριο. Οπότε, θα ήθελα να κατεβάσω την εκτυπώσιμη μορφή της τελευταίας έκδοσης του κειμένου.'.
Καθηγητής Sha Xin Wei, Σχολή Καλών Τεχνών και της Επιστήμης των Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Concordia, Καναδάς:
'Συγχαρητήρια για το τόσο προσεκτικά και απλά γραμμένο κείμενό σας πάνω στην Τοπολογία! Θα ήθελα να χρησιμοποιήσω το υλικό σας για ένα μάθημα που αναφέρεται στα εφαρμόσιμα μαθηματικά για καλλιτέχνες. Είναι πάντα όμορφο να βρίσκει κανείς εργασίες, σαν την δική σας, που αγγίζει τους διψούντες την γνώση χωρίς συμβιβασμούς!'.
Αναπληρωτής Καθηγητής Δρ. Rehana Bari, Μπαγκλαντές: 'Διδάσκω το μάθημα Τοπολογία, για το μεταπτυχιακό πρόγραμμα στο Τμήμα Μαθηματικών, του Πανεπιστημίου της Ντάκα, στο Μπαγκλαντές. Θα μπορούσα να έχω ένα ηλεκτρονικό αντίτυπο του σπουδαίου σας βιβλίου Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα, για δική μου χρήση;'.
Emrah Akyar, Τμήμα των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο της Anadolu, Τουρκία: ¨Μόλις τώρα βρήκα το όμορφό σας βιβλίο Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα, και σχεδιάζω

να το ακολουθήσω στο θερινό εξάμηνο.¨.
Rahul Nilakantan, Υποψήφιος διδάκτωρ, Τμήμα Οικονομικών, Πανεπιστήμιο της Νότιας Καλιφόρνια, ΗΠΑ: 'Είμαι υποψήφιος διδάκτωρ στο Οικονομικό Τμήμα του πανεπιστημίου της Νότιας Καλιφόρνια, στο Λος Άντζελες. Θα ήθελα να εργαστώ ερευνητικά στην περιοχή general equilibrium with incomplete markets. Η περιοχή αυτή απαιτεί την κατανόηση τοπολογικών εννοιών. Το άριστό σας βιβλίο μου προτάθηκε από έναν συνάδελφο, από το πανεπιστήμιο του Κάνσας (το όνομά του Ramu Gopalan). Αφού μελέτησα το βιβλίο από την μη εκτυπώσιμη μορφή, συμπέρανα ότι είναι ό,τι ακριβώς χρειάζομαι, προκειμένου να μάθω Τοπολογία.'.
Long Nguyen, ΗΠΑ 'Δεν έχω ξαναδεί ποτέ ένα βιβλίο να τοποθετείται τόσο ξεκάθαρα, απέναντι σε ένα τόσο δύσκολο αντικείμενο.'.
Renato Orellana, Χιλή: 'Συγχαρητήρια για το υπέροχό σας βιβλίο. Ξεφύλλισα τα πρώτα κεφάλαια, και γέμισαν όμορφα τον χρόνο μου. Πίστευα ότι η Τοπολογία δεν ήταν για μένα, αλλά τώρα μπορώ να ισχυριστώ ότι είμαι αισιόδοξος για ένα καλύτερο μέλλον μαζί της!'.
Sisay Regasa Senbeta, βοηθός Κοσμήτορα, Σχολή Οικονομικών Σπουδών, Addis Ababa Πανεπιστήμιο της Αιθιοπίας: 'Είμαι λέκτορας στα Οικονομικά, στο πανεπιστήμιο της Addis Ababa, στην Αιθιοπία. Θα μπορούσατε, σας παρακαλώ θερμά, να μου στέλνατε μια εκτυπώσιμη εκδοχή του βιβλίου σας;'.
Nicanor M. Tuan, Davao Oriental State College of Science and Technology,Φιλιππίνες: 'Χαίρεται! Θα ήθελα να σας εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για την αλτρουιστική σας κίνηση να μοιραστείτε τόσο πολύτιμες σκέψεις μαζί μας. Η δουλειά σας βοηθά τόσο εμένα, όσο και τους φοιτητές μου, να εμβαθύνουμε στην τοπολογία, αποκτώντας ωριμότητα στο αντικείμενο. Σας ευχαριστώ και καλή δύναμη!'.
Ernita R. Calayag, Φιλιππίνες:'Ονομάζομαι Ernita R. Calayag, και κάνω το διδακτορικό μου στα μαθηματικά, στο πανεπιστήμιο του De La Salle. Άκουσα πολύ καλά λόγια λόγια για το βιβλίο σας, και δεν θα ήθελα να χάσω την ευκαιρία ενός αντιγράφου του. Με την βοήθειά σας λοιπόν, ελπίζω να κατανοήσω αυτό το θεμελιώδες αντικείμενο στα μαθηματικά, την Τοπολογία.'.
Nikola Matejic, Σερβία: 'Το βιβλίο σας είναι πραγματικά μοναδικό και πολύτιμο, κατάλληλο για ένα ευρύ κοινό. Είναι ένα γενναιόδωρο δώρο από εσάς, το οποίο έχει εκτιμηθεί παγκοσμίως. Πιστεύω ότι ο οποιοσδήποτε/η οποιαδήποτε χρειάζεται να αποκτήσει γνώσεις πάνω στην Τοπολογία, θα οφεληθεί από το βιβλίο σας.'.
Iraj Davoodabadi, Ιράν: 'Παρακαλώ να με συγχωρήσετε για τα αγγλικά μου. Είμαι μηχανολόγος μηχανικός όμως, παρόλα αυτά, το ενδιαφέρον μου για τα μαθηματικά και συγκεκριμένα για την Ανάλυση είναι μεγάλο. Το κακό είναι

ότι είμαι αυτοδίδακτος σε αυτόν τον τομέα: δεν έχω κάποιον κοντά μου να μου μεταδώσει αυτές τις έννοιες. Ειδικά η Τοπολογία και η κλασσική Ανάλυση περιλαμβάνουν πολύ δύσκολα θεωρήματα και έννοιες δύσπεπτες. Αυτό επιδεινώνει την επιτυχή έκβαση της μελέτης μου, μιας και η εμπειρία μου στα Θεωρητικά Μαθηματικά δεν είναι μεγάλη. Ομολογώ ωστόσο, ότι από την στιγμή που βρέθηκε το βιβλίο σας στα χέρια μου, τα πράγματα άρχισαν να καλυτερεύουν για μένα. Σας ευχαριστώ.'.
Dr Abdul Iguda, Πανεπιστήμιο του Bayero, Kano, Νιγηρία: ¨Το όνομά μου είναι Αμπντούλ Ιγκούντα, κι έχω κάνει το διδακτορικό μου πάνω στην Γενική Τοπολογία. Διδάσκω Γενική Τοπολογία τα τελευταία 18 χρόνια, στο Πανεπιστήμιό μου. Είμαι επίσης επισκέπτης καθηγητής σε δύο άλλα πανεπιστήμια (Gwambe State University και Umaru Musa Yar'Adua University). Κύριε Καθηγητά, θα ήθελα να σας παρακαλέσω να μου δώσετε πρόσβαση στην δωρεάν εκτυπώσιμη μορφή του βιβλίου σας Τοπολογία Δίχως Δάκρυα. Σας ευχαριστώ πολύ, προκαταβολικά.¨.
Mahdi Jafari, KNToosi University, Τεχεράνη, Ιράν: ¨Ονομάζομαι Mahdi Jafari, και σπουδάζω διαστημική μηχανική. Θα ήθελα να σας παρακαλέσω να μου δώσετε πρόσβαση στην εκτυπώσιμη μορφή του βιβλίου σας. Ευχαριστώ.¨.
Jayakrishnan M, Kerala, Ινδία:'Είμαι προπτυχιακός φοιτητής μαθηματικών, και ξεκίνησα να μαθαίνω τοπολογία από αυτό το ακαδημαϊκό έτος. Ό,τι έμαθα μέχρι τώρα, το έμαθα χάρη στο βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα. Η τοπολογία ήταν η πλέον δύσκολη περιοχή των μαθηματικών για μένα, μέχρι να ανακαλύψω το βιβλίο σας. Μέχρι τότε, ακόμα και αν μπόρεσα να καταπιώ κάποια θεωρήματα, μου ήταν δύσκολο να λύνω προβλήματα. Δεν μπορούσα να προχωρήσω έτσι: κάτι έλειπε, ώστε να μ΄ εμποδίζει από το να μπορώ να αποδεικνύω θεωρήματα χωρίς βοήθεια. Μετά από έρευνα στο διαδίκτυο, βρήκα αρκετές πηγές πάνω στην τοπολογία, οι οποίες ωστόσο δεν ήταν δυνατόν να μου προσφέρουν τίποτα παραπάνω από τις πανεπιστημιακές σημειώσεις. Ήταν τέτοια ηδονή να ανακαλύψω το βιβλίο σας Τοπολογία Χωρίς Δάκρυα! Ένα πραγματικά άριστο βιβλίο, μια διαφορετική δουλειά από τις άλλες, με μια πρωτότυπη παρουσίαση του θέματος. Νομίζω αυτό συμβαίνει διότι κάθε ορισμός ακολουθείται από έναν αρκετά ικανοποιητικό αριθμό παραδειγμάτων. Αυτή την στιγμή μπορώ να πώ ότι μου αρέσει η Τοπολογία σαν αντικείμενο. Και θα ήθελα γι΄ αυτό να σας εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου.'.
M.A.R. Khan, Karachi, Ινδονησία: 'Σας ευχαριστώ που στηρίζετε έναν φοιτητή από μια τριτοκοσμική χώρα'.

0.4 Λίγα Λόγια για τον Συγγραφέα

Ο συγγραφέας του βιβλίου αυτού, Sidney (Shmuel) Allen Morris, είναι Ομότιμος Καθηγητής στο πανεπιστήμιο the University of Ballarat, της Αυστραλίας, Επίτιμος Καθηγητής στο πανεπιστήμιο La Trobe University, και προεδρεύει στο Ακαδημαϊκό Συμβούλιο του Ινστιτούτου The William Light Institute, (Adelaide, Australia). Μέχρι τον Απρίλιο του 2010 υπήρξε Καθηγητής της Πληροφορικής και Πρόεδρος του Τομέα Ερευνών, στην Σχολή Information Technology and Mathematical Sciences, του πανεπιστημίου the University of Ballarat. Έχει εκλεγεί ως τακτικός Καθηγητής στα Μαθηματικά, στα πανεπιστήμια the University of South Australia, the University of Wollongong και στο πανεπιστήμιο the University of New England. Έχει επίσης εκλεγεί σε ακαδημαϊκές θέσεις στα εξής πανεπιστήμια: New South Wales, La Trobe University, University of Adelaide, Tel Aviv University, Tulane University και στο the University College of North Wales in Bangor. Έχει βραβευθεί με το βραβείο the Lester R. Ford Award, από τον οργανισμό the Mathematical Association of America και έχει επίσης βραβευθεί για την εξαιρετική του προσφορά από τον Σύλλογο the Australian Computer Society. Υπήρξε Editor-in-Chief στο επιστημονικό περιοδικό Journal of Research and Practice in Information Technology, Editor στα περιοδικά the Bulletin of the Australian Mathematical Society, the Journal of Group Theory, κι επίσης Editor-in-Chief στην σειρά the Australian Mathematical Lecture Series – Cambridge University Press. Έχει εκδόσει τέσσερα βιβλία:

(1) with Karl Heinrich Hofmann, "The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups", European Mathematical Society Publishing House, xv + 678pp, 2007, ISBN 978-3-03719-032-6;

(2) with Karl Heinrich Hofmann, "The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student — A Handbook for the Expert", Third Edition, xxii + 924pp., de Gruyter 2013. ISBN 978-3-11-029655-6

(3) "Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups", Cambridge University Press,1977, 136pp. (tranlated into Russian and published by Mir);

(4) with Arthur Jones and Kenneth R. Pearson, "Abstract Algebra and Famous Impossibilities ", Springer-Verlag Publishers, 1st ed. 1991, ISBN 0-387-97661-2, Corr. 2nd printing 1993, ISBN 3-540-97661-2

κι έχει δημοσιεύσει πάνω από 150 εργασίες, σε επιστημονικά περιοδικά με κριτή. Είναι επίτιμο και ισόβιο μέλος της Αυστραλιανής Μαθηματικής Εταιρείας, την οποία έχει υπηρετήσει και από την θέση του Αντιπροέδρου, όντας μέλος του συμβουλίου της για πάνω από 20 έτη. Γεννήθηκε στην πόλη Brisbane 1947, κι αποφοίτησε (BSc(Hons)) από το πανεπιστήμιο the University of Queensland. Ένα χρόνο μετά την αποφοίτησή του έλαβε το διδακτορικό του από το πανεπιστήμιο Flinders University. Έχει διατελέσει σε όλα τα ακαδημαϊκά πανεπιστημιακά πόστα, γραμματειακά και διοικητικά, συμπεριλαμβανομένης της θέσης του Πρύτανη και του Αντιπρύτανη.

Κεφάλαιο 1

Τοπολογικοί Χώροι

Εισαγωγή

Αθλήματα όπως το ποδόσφαιρο, η καλαθοσφαίριση, κλπ. είναι πραγματικά συναρπαστικά, όμως για να συμμετάσχει κανείς σε αυτά πρέπει πρώτα να μάθει (κάποιους από τους) κανόνες του παιγχνιδιού. Το ίδιο συμβαίνει και με τα μαθηματικά.

Θα ανοίξουμε το Κεφάλαιο αυτό δίνοντας τον ορισμό της Τοπολογίας, και μετά θα δώσουμε τα πρώτα απλά παραδείγματα πεπερασμένων τοπολογικών χώρων, μη διακριτικών χώρων και χώρων εφοδιασμένων με την πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία.

Η Τοπολογία, όπως συμβαίνει και με άλλους τομείς των μαθηματικών όπως στην θεωρία ομάδων, είναι ένα αντικείμενο που βασίζεται σε μια αξιωματική θεώρηση. Ξεκινούμε με ένα σύνολο αξιωμάτων, και χρησιμοποιούμε αυτά τα αξιώματα για να αποδείξουμε προτάσεις και θεωρήματα. Είναι εξαιρετικά σημαντικό να καλλιεργεί και να αναπτύσσει κανείς διαρκώς την δεξιότητα που απαιτείται για την συγγραφή των αποδείξεων.

Μα γιατί οι αποδείξεις είναι τόσο σημαντικές; Φανταστείτε, για παράδειγμα, πως μας ανατέθηκε να κατασκευάσουμε ένα κτίριο. Θα ξεκινούσαμε καταρχάς με την κατασκευή των θεμελίων. Έτσι δεν είναι; Στην περίπτωσή μας, μιλώντας για τοπολογία, τα θεμέλια αποτελούν τα αξιώματα (οι ορισμοί δηλαδή) – οτιδήποτε άλλο κτίζεται πάνω σε αυτά. Κάθε θεώρημα ή πρόταση αναπαριστά ένα καινούργιο επίπεδο γνώσης και πρέπει να στηρίζεται διαρκώς στην προηγούμενη γνώση.

Έτσι, τα θεωρήματα και οι προτάσεις αποτελούν τα νέα γνωστικά επίπεδα, ενώ οι αποδείξεις είναι απαραίτητες, μιας και αποτελούν τον συνδετικό επίπεδο που τα ενώνει με τα προηγούμενα επίπεδα. Χωρίς αποδείξεις όλο το οικοδόμημα θα κατέρρεε.

Τί είναι λοιπόν μια μαθηματική απόδειξη;

Μαθηματική απόδειξη είναι ένα επαρκώς θεμελιωμένο επιχείρημα το οποίο ξεκινά με μιά δοθείσα πληροφορία, συνεχίζει με ένα λογικό επιχείρημα και καταλήγει με αυτό που ζητείται να αποδειχθεί.

Μια απόδειξη πρέπει να ξεκινά με την καταγραφή της δοθείσας πληροφορίας και μετά πρέπει να διατυπώνεται αυτό που μας ζητείται να αποδειχθεί. Εάν η πληροφορία που μας δίδεται ή αυτό που ζητείται να αποδειχθεί εμπεριέχει τεχνικούς όρους, τότε πρέπει να εκτεθούν εξαρχής οι ορισμοί αυτών των τεχνικών όρων.

Κάθε απόδειξη πρέπει να αποτελείται από ολοκληρωμένες προτάσεις. Κάθε μία από αυτές τις προτάσεις πρέπει να είναι το επακόλουθο (i) των προηγουμένως διατυπωθέντων προτάσεων ή (ii) ενός θεωρήματος, μίας πρότασης ή ενός λήμματος που έχουν πρωτύτερα αποδειχθεί.

Ο αναγνώστης αυτού του βιβλίου θα συναντήσει πολλές αποδείξεις, αλλά θα πρέπει να τονιστεί ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχουν θεατές: το παιγχνίδι αφορά τους πάντες. Ο μόνος τρόπος για να μάθει κανείς να γράφει αποδείξεις είναι να προσπαθήσει να τις γράψει μόνος του.

1.1 Τοπολογία

1.1.1 Ορισμοί. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ένα σύνολο $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X είναι μια τοπολογία στο X εάν:

(i) το σύνολο X και το κενό σύνολο, $\emptyset$, ανήκουν στο $\mathcal{T}$,

(ii) η ένωση οποιουδήποτε (πεπερασμένου ή απείρου) αριθμού συνόλων στο $\mathcal{T}$ ανήκει στο $\mathcal{T}$ και

(iii) η τομή οποιονδήποτε δύο συνόλων στο $\mathcal{T}$ ανήκει στο $\mathcal{T}$.

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ καλείται τοπολογικός χώρος.

1.1.2 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ και

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{T}_1$ θα είναι μια τοπολογία στο X, επειδή ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) των ορισμών 1.1.1. □

1.1.3 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e\}$ και

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}.$$

Τότε το $\mathcal{T}_2$ $\boxed{\text{δεν}}$ αποτελεί μια τοπολογία στο X, διότι η ένωση

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\},$$

δύο στοιχείων του $\mathcal{T}_2$, δεν ανήκει στο $\mathcal{T}_2$· δηλαδή, το $\mathcal{T}_2$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη (ii) των ορισμών 1.1.1. □

1.1.4 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ και

$$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{T}_3$ $\boxed{\text{δεν}}$ αποτελεί τοπολογία στο X, επειδή η τομή

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\},$$

δύο συνόλων στο $\mathcal{T}_3$, δεν ανήκει στο $\mathcal{T}_3$· δηλαδή, το $\mathcal{T}_3$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) των ορισμών 1.1.1. □

1.1.5 Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών (δηλαδή το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων αριθμών) και έστω επίσης το σύνολο $\mathcal{T}_4$ αποτελείται από τα στοιχεία $\mathbb{N}$, $\emptyset$, καθώς και από όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Τότε, το $\mathcal{T}_4$ $\boxed{\text{δεν}}$ αποτελεί μια τοπολογία στο $\mathbb{N}$, διότι η άπειρη ένωση

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

συνόλων του $\mathcal{T}_4$, δεν ανήκει στο $\mathcal{T}_4$· εν ολίγοις, το $\mathcal{T}_4$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (ii) των Ορισμών 1.1.1. □

1.1.6 Ορισμοί. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X. Τότε το $\mathcal{T}$ καλείται διακριτική τοπολογία στο σύνολο X. Ο δε τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται διακριτός χώρος.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$, στους Ορισμούς 1.1.6, ικανοποιεί τις συνθήκες των Ορισμών 1.1.1, άρα αποτελεί πράγματι μια τοπολογία.

Παρατηρούμε επίσης ότι το σύνολο X, των ορισμών 1.1.6, θα μπορούσε να είναι $\boxed{\text{οποιοδήποτε}}$ μη κενό σύνολο. Οπότε, υπάρχει ένας άπειρος αριθμός διακριτικών χώρων – ένας για κάθε σύνολο X.

1.1.7 Ορισμοί. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Τότε, το $\mathcal{T}$ καλείται μη διακριτική τοπολογία και ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται μη διακριτικός χώρος.

Όπως και με τα προηγούμενα παραδείγματα, εξετάζοντας αν το σύνολο $\mathcal{T}$ ικανοποιεί τις συνθήκες των Ορισμών 1.1.1, βρίσκουμε ότι όντως αποτελεί μια τοπολογία.

Παρατηρούμε, για ακόμα μια φορά, ότι το σύνολο X, στους Ορισμούς 1.1.7, θα μπορούσε να είναι $\boxed{\text{οποιοδήποτε}}$ μη κενό σύνολο. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν άπειροι μη διακριτικοί χώροι – ένας για κάθε σύνολο X.

Στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου συζητήσαμε για την σημαντικότητα των αποδείξεων και για την διαδικασία της συγγραφής τους. Η πρώτη μας εμπειρία πάνω στην αποδεικτική διαδικασία θα πραγματωθεί στο παράδειγμα 1.1.8 και στην πρόταση 1.1.9. Ο αναγνώστης θα πρέπει να μελετήσει τις αποδείξεις αυτές πολύ προσεκτικά.

1.1.8 Παράδειγμα. Εάν $X = \{a, b, c\}$ και $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X με $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, και $\{c\} \in \mathcal{T}$, αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία.

Απόδειξη.

Μας δίδεται ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία και ότι $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, και $\{c\} \in \mathcal{T}$.

Μας ζητείται να αποδείξουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία· δηλαδή, πρέπει να αποδείξουμε (με βάση τους ορισμούς 1.1.6) ότι το $\mathcal{T}$ περιέχει $\boxed{\text{όλα}}$ τα υποσύνολα του X. Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathcal{T}$ σαν τοπολογία ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) των Ορισμών 1.1.1.

Έτσι λοιπόν, θα ξεκινήσουμε την απόδειξη εκθέτωντας αναλυτικά όλα τα υποσύνολα του X.

Το σύνολο X αποτελείται από 3 στοιχεία, οπότε έχει 2^3 διαφορετικά υποσύνολα, τα οποία είναι τα εξής: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$, και $S_8 = \{a, b, c\} = X$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε ένα από αυτά τα υποσύνολα ανήκουν στο $\mathcal{T}$. Εφόσον το $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία, από τον ορισμό 1.1.1 (i) συνάγουμε ότι το X και το $\emptyset$ ανήκουν στο $\mathcal{T}$· δηλαδή, $S_1 \in \mathcal{T}$ και $S_8 \in \mathcal{T}$.

Μας δίδεται ότι $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ και $\{c\} \in \mathcal{T}$ · δηλαδή, $S_2 \in \mathcal{T}$, $S_3 \in \mathcal{T}$ και $S_4 \in \mathcal{T}$.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι $S_5 \in \mathcal{T}$, $S_6 \in \mathcal{T}$, και $S_7 \in \mathcal{T}$. Όμως $S_5 = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$. Εφόσον μας δίδεται ότι $\{a\}$ και $\{b\}$ ανήκουν στο $\mathcal{T}$, από τον ορισμό 1.1.1 (ii) συνάγουμε ότι η ένωσή τους επίσης ανήκει στο $\mathcal{T}$ · δηλαδή, $S_5 = \{a, b\} \in \mathcal{T}$.

Όμοια, $\quad S_6 = \{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \mathcal{T} \quad$ και $\quad S_7 = \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$. □

Στα εισαγωγικά σχόλια αυτού του κεφαλαίου, παρατηρήσαμε ότι τα μαθηματικά δεν προσφέρονται σε θεατές. Πρέπει κανείς να είναι μέσα στο παιγχνίδι, και αυτό προϋποθέτει την επίμονη προσπάθεια επίλυσης ασκήσεων. Εκτός βέβαια αυτού, θα πρέπει κανείς να κατανοεί, πρώτα απ΄ όλα, το θεωρητικό υπόβαθρο που χρειάζεται για την κατανόηση ενός προβλήματος.

Ένας από τους στόχους του αναγνώστη θα πρέπει να είναι η εξοικείωση με τις αποδείξεις που δίδονται εδώ, και η διαρκής αναζήτηση απαντήσεων σε όποιες ερωτήσεις τον απασχολούν. Για παράδειγμα, μόλις έχουμε αποδείξει ότι για κάθε ένα από τα μονοσύνολα $\{a\}$, $\{b\}$ και $\{c\}$ στο $\mathcal{T}$, όπου $X = \{a, b, c\}$, έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική Τοπολογία. Θα πρέπει να διερωτηθεί κανείς εάν στην απόδειξη αυτή μελετήθηκε ένα συγκεκριμένο ή ένα γενικότερο φαινόμενο. Δηλαδή, εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, έτσι ώστε η τοπολογία $\mathcal{T}$ να περιέχει κάθε μονοσύνολο, είναι το σύνολο $\mathcal{T}$ απαραίτητα η διακριτική τοπολογία; Η απάντηση είναι θετική, και η απόδειξη δίδεται στην Πρόταση 1.1.9.

1.1.9 Πρόταση. Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος έτσι ώστε, για κάθε $x \in X$, το μονοσύνολο $\{x\}$ να ανήκει στο σύνολο $\mathcal{T}$, τότε το $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία.

Απόδειξη.

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση του Παραδείγματος 1.1.8, οπότε ο αναγνώστης θα περίμενε ότι η απόδειξή του θα είναι όμοια με αυτό. Παρόλα αυτά όμως, δεν έχουμε την δυνατότητα να καταγράφουμε ένα προς ένα όλα τα υποσύνολα του X, όπως με το Παράδειγμα 1.1.8, επειδή το X θα μπορούσε άνετα να είναι άπειρο σύνολο. Άρα, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\boxed{\text{κάθε}}$ υποσύνολο του X ανήκει στο $\mathcal{T}$.

Σε αυτό το σημείο ο αναγνώστης θα παροτρυνθεί να αποδείξει το ίδιο αποτέλεσμα για μερικές ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, παίρνοντας το X να αποτελείται από 4, 5 ή ακόμα και από 100 στοιχεία. Αυτή η προσέγγιση ωστόσο δεν είναι η ενδεδειγμένη και θα καταλήξει με μαθηματική ακρίβεια στην αποτυχία. Επιστρέφουμε στα αρχικά σχόλια σε αυτό το κεφάλαιο, όπου περιγράψαμε μια μαθηματική απόδειξη ως ένα ξεκάθαρο επιχείρημα, το οποίο στηρίζεται σε γερά θεμέλια. Δεν είναι δυνατόν να παράξουμε τέτοια επιχειρήματα με αναφορά σε μερικές ειδικές περιπτώσεις ή ακόμα και σε μεγαλύτερο αριθμό ειδικών περιπτώσεων. Το επιχείρημά μας επιβάλλεται να καλύπτει $\boxed{\text{όλες}}$ τις περιπτώσεις. Οπότε, θα πρέπει να θεωρήσουμε την γενική περίπτωση ενός μη κενού συνόλου X και να αποδείξουμε ότι κάθε υποσύνολο του X ανήκει στο $\mathcal{T}$.

Επανεξετάζοντας το Παράδειγμα 1.1.8, βλέπουμε ότι το κλειδί στην κατανόησή του βρίσκεται στην παρατήρηση ότι κάθε υποσύνολο του συνόλου X είναι ένωση μονοσυνόλων του X, και γνωρίζουμε ότι όλα τα μονοσύνολα εμπεριέχονται στην τοπολογία $\mathcal{T}$. Αυτό αληθεύει επίσης και για πιο γενικές περιπτώσεις.

Ξεκινούμε λοιπόν την απόδειξη έχοντας κατά νου ότι κάθε σύνολο είναι ένωση των υποσυνόλων του που είναι μονοσύνολα. Έστω S ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του X. Τότε:

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

Εφόσον μας δίδεται ότι κάθε $\{x\}$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{T}$, οι Ορισμοί 1.1.1 (ii) και η παραπάνω εξίσωση συνεπάγονται πως το $S \in \mathcal{T}$. Αφού το S είναι αυθαίρετο υποσύνολο του X, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία. □

Το γεγονός ότι κάθε σύνολο S αποτελεί ένωση των μονοσυνόλων του είναι ένα αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιούμε ενίοτε σε αυτό το βιβλίο, σε διαφορετικές περιπτώσεις.

Σημειώνουμε ότι αυτό ισχύει και στην περίπτωση όπου $S = \emptyset$, διότι σε αυτήν την περίπτωση σχηματίζουμε αυτό που είναι γνωστό ως κενή ένωση, όπου παίρνουμε το $\emptyset$ ως αποτέλεσμα.

Ασκήσεις 1.1

1. Έστω $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Να βρεθεί εάν η κάθε μια από τις παρακάτω συλλογές υποσυνόλων του X αποτελεί μια τοπολογία στο X, ή όχι:

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$,

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$,

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$.

2. Έστω $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ποιά από τις ακόλουθες συλλογές υποσυνόλων του X αποτελούν μια τοπολογία στο X; (Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.)

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$,

   (b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$,

   (c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$.

3. Εάν $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ και $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία στο X, ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς;

(a) $X \in \mathcal{T}$, (b) $\{X\} \in \mathcal{T}$, (c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$, (d) $\emptyset \in \mathcal{T}$,
(e) $\emptyset \in X$, (f) $\{\emptyset\} \in X$, (g) $\{a\} \in \mathcal{T}$, (h) $a \in \mathcal{T}$,
(i) $\emptyset \subseteq X$, (j) $\{a\} \in X$, (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$, (l) $a \in X$,
(m) $X \subseteq \mathcal{T}$, (n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$, (o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$, (p) $a \subseteq \mathcal{T}$.

[Βοήθημα: Ακριβώς έξι από τις παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς.]

4. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Εξετάστε αν η τομή ενός πεπερασμένου αριθμού συνόλων του $\mathcal{T}$ είναι ένα σύνολο στο $\mathcal{T}$.
[Βοήθημα: Χρησιμοποιείστε 'μαθηματική επαγωγή'.]

5. Έστω $\mathbb{R}$ ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω συλλογές υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ αποτελεί μια τοπολογία.

   (i) Το $\mathcal{T}_1$ αποτελείται από τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\emptyset$, και κάθε διάστημα της μορφής $(-n, n)$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός,

   (ii) Το $\mathcal{T}_2$ αποτελείται από τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\emptyset$, και κάθε διάστημα της μορφής $[-n, n]$, όπου n θετικός ακέραιος αριθμός,

   (iii) Το $\mathcal{T}_3$ αποτελείται από τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\emptyset$, και κάθε διάστημα $[n, \infty)$, όπου n θετικός ακέραιος αριθμός.

6. Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών. Αποδείξτε ότι κάθε μία από τις παρακάτω συλλογές υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ αποτελεί τοπολογία.

   (i) Το σύνολο $\mathcal{T}_1$ αποτελείται από το σύνολο $\mathbb{N}$, το $\emptyset$ και κάθε σύνολο της μορφής $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου n θετικός ακέραιος. (Η τοπολογία αυτή είναι γνωστή ως τοπολογία του αρχικού τμήματος.)

   (ii) Το σύνολο $\mathcal{T}_2$ αποτελείται από το σύνολο $\mathbb{N}$, το $\emptyset$ και κάθε σύνολο της μορφής $\{n, n+1, \ldots\}$, όπου n θετικός ακέραιος. (Η τοπολογία αυτή είναι γνωστή ως τοπολογία του τελικού τμήματος.)

7. Εκθέστε αναλυτικά όλες τις πιθανές τοπολογίες που μπορούν να οριστούν στα παρακάτω σύνολα:

   (a) $X = \{a, b\}$,

(b) $Y = \{a, b, c\}$.

8. Έστω X ένα σύνολο απείρου αριθμού στοιχείων και έστω $\mathcal{T}$ μια τοπολογία στο X. Εάν κάθε υποσύνολο του X με άπειρο αριθμό στοιχείων ανήκει στην τοπολογία $\mathcal{T}$, να αποδείξτε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία.

9.* Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ακριβώς τρείς από τις παρακάτω συλλογές υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ αποτελούν τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$: εντοπίστε αυτές τις τοπολογίες, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(i) Το σύνολο $\mathcal{T}_1$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα της μορφής (a, b), όπου a και b πραγματικοί αριθμοί με $a < b$.

(ii) Το σύνολο $\mathcal{T}_2$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $(-r, r)$, όπου r ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

(iii) Το σύνολο $\mathcal{T}_3$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $(-r, r)$, όπου r ένας θετικός ρητός αριθμός.

(iv) Το σύνολο $\mathcal{T}_4$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $[-r, r]$, όπου r ένας θετικός ρητός αριθμός.

(v) Το σύνολο $\mathcal{T}_5$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $(-r, r)$, όπου r ένας θετικός άρρητος αριθμός.

(vi) Το σύνολο $\mathcal{T}_6$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $[-r, r]$, όπου r ένας θετικός άρρητος αριθμός.

(vii) Το σύνολο $\mathcal{T}_7$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $[-r, r)$, όπου r ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

(viii) Το σύνολο $\mathcal{T}_8$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και από κάθε διάστημα $(-r, r]$, όπου r ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

(ix) Το σύνολο $\mathcal{T}_9$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$, από κάθε διάστημα $[-r, r]$ και από κάθε διάστημα $(-r, r)$, όπου r ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

(x) Το σύνολο $\mathcal{T}_{10}$ αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$, από κάθε διάστημα $[-n, n]$ και από κάθε διάστημα $(-r, r)$, όπου n ένας θετικός ακέραιος και r ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

1.2 Ανοιχτά Σύνολα, Κλειστά Σύνολα

Από το να αποκαλούμε διαρκώς τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{T}$ ‘μέλη’ του, βρίσκουμε βολικό να τα δώσουμε ένα πιο συγκεκριμένο όνομα. Το όνομα που τα δίδουμε λοιπόν είναι ‘ανοιχτά σύνολα’. Θα δώσουμε επίσης συγκεκριμένο όνομα και για τα συμπληρώματα των ανοιχτών συνόλων. Θα τα αποκαλούμε απλά ‘κλειστά σύνολα’. Η συγκεκριμένη νομενκλατούρα δεν είναι η ιδανικότερη, ωστόσο έχει τις ρίζες της στην γνωστή ορολογία των ‘ανοιχτών διαστημάτων’ και των ‘κλειστών διαστημάτων’ της πραγματικής ευθείας. Η συγκεκριμένη συζήτηση θα συνεχιστεί στο Κεφάλαιο 2.

1.2.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{T}$ λέγονται ανοιχτά σύνολα.

1.2.2 Ορισμός. Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε:

(i) το σύνολο X και το $\emptyset$ είναι ανοιχτά σύνολα,

(ii) η ένωση (πεπερασμένη ή άπειρη) οποιουδήποτε αριθμού ανοιχτών συνόλων αποτελεί ανοιχτό σύνολο και

(iii) η τομή κάθε πεπερασμένου αριθμού ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι το (i) και το (ii) έπονται από τον Ορισμό 1.2.1 και τους Ορισμούς 1.1.1 (i) και (ii). Η συνθήκη (iii) είναι επακόλουθο του Ορισμού 1.2.1 και των Ασκήσεων 1.1 #4. □

Μελετώντας την Πρόταση 1.2.2, ο αναγνώστης πιθανώς να κάνει την εξής ερώτηση: ενώ κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο, αναφέρουμε μόνο ότι $\boxed{\text{πεπερασμένες}}$ τομές ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτά σύνολα. Είναι από την άλλη οι άπειρες τομές ανοιχτών συνόλων πάντα ανοιχτές; Το παράδειγμα που ακολουθεί μας δείχνει πως όχι.

1.2.3 Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών και έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο που αποτελείται από το $\emptyset$ και από κάθε υποσύνολο S, του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε το συμπλήρωμα του S στο $\mathbb{N}$, δηλαδή το $\mathbb{N} \setminus S$, να είναι πεπερασμένο σύνολο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ ικανοποιεί τους Ορισμούς 1.1.1, οπότε και αποτελεί μια τοπολογία στο $\mathbb{N}$. (Στο επόμενο κεφάλαιο θα επανέλθουμε σε αυτήν την Τοπολογία, η οποία καλείται πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία.) Για κάθε φυσικό αριθμό n, ορίζουμε το σύνολο S_n ως εξής:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

Είναι ξεκάθαρο πως κάθε S_n είναι ανοιχτό σύνολο ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$, επειδή το συμπλήρωμά του είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Από την άλλη όμως:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\}. \tag{1}$$

Εφόσον το συμπλήρωμα του $\{1\}$ δεν είναι ούτε ίσο με το σύνολο $\mathbb{N}$, ούτε είναι πεπερασμένο σύνολο, το $\{1\}$ δεν μπορεί να είναι ανοιχτό. Άρα, η σχέση (1) μας αποδεικνύει ότι η τομή ανοιχτών συνόλων του S_n δεν είναι ανοιχτό σύνολο. $\square$

Ο αναγνώστης ίσως να διερωτηθεί: με ποιά μέθοδο κατασκευάσαμε το Παράδειγμα 1.2.3; Η απάντηση δεν είναι και τόσο συναρπαστική: το παράδειγμα κατασκευάστηκε μετά από πολλές αποτυχημένες δοκιμές, μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Επανερχόμενοι τώρα στην διακριτική τοπολογία, είναι εύκολο νά παρατηρήσει κανείς ότι κάθε τομή ανοιχτών συνόλων είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Το ίδιο συμβαίνει και με την μη διακριτική τοπολογία. Οπότε, αυτό που χρειάζεται, ως προς την εξαγωγή συμπερασμάτων αυτού του τύπου, είναι να κάνει κανείς απλές και λογικές υποθέσεις.

Από την άλλη, για να αποδειχθεί ότι η τομή ανοιχτών συνόλων δεν αποτελεί κατ΄ ανάγκη ανοιχτό σύνολο, δεν είναι ανάγκη να γίνουν λογικές υποθέσεις: αρκεί η έκθεση ενός αντιπαραδείγματος!

1.2.4 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο S, του X, λέγεται κλειστό σύνολο του $(X, \mathcal{T})$, εάν το συμπλήρωμά του στο X, δηλαδή το $X \setminus S$, είναι ανοιχτό στο $(X, \mathcal{T})$.

Στο παράδειγμα 1.1.2, τα κλειστά σύνολα είναι τα ακόλουθα:

$$\emptyset, X, \{b, c, d, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, e, f\} \text{ και } \{a\}.$$

Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ο διακριτικός χώρος, τότε είναι φανερό ότι κάθε υποσύνολο του X είναι κλειστό σύνολο. Από την άλλη, στον μη διακριτικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, τα μόνα κλειστά σύνολα είναι το X και το $\emptyset$.

1.2.5 Πρόταση. Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε:

(i) το $\emptyset$ και το X αποτελούν κλειστά σύνολα.

(ii) Η τομή κάθε (πεπερασμένου ή άπειρου) αριθμού κλειστών συνόλων αποτελεί κλειστό σύνολο.

(iii) Η ένωση οποιουδήποτε πεπερασμένου αριθμού κλειστών συνόλων αποτελεί κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. Το (i) έπεται από την Πρόταση 1.2.2 (i) και από τον Ορισμό 1.2.4, επειδή το συμπλήρωμα του X είναι το $\emptyset$ και το συμπλήρωμα του $\emptyset$ είναι το X.

Για να αποδείξουμε ότι το (iii) αληθεύει, έστω $S_1, S_2, \ldots, S_n$ κλειστά σύνολα στο X. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το σύνολο $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ είναι επίσης κλειστό. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε, έχοντας σαν βάση τον Ορισμό 1.2.4, ότι το σύνολο $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$ αποτελεί ανοιχτό σύνολο.

Επειδή τα σύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_n$ είναι κλειστά, τα συμπληρώματά τους $X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$, $\ldots$, $X \setminus S_n$ θα είναι ανοιχτά σύνολα. Όμως:

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n). \tag{1}$$

Επειδή το δεξί μέρος του (1) είναι πεπερασμένη τομή ανοιχτών συνόλων, θα είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα, το αριστερό μέρος του (1) θα είναι επίσης ανοιχτό σύνολο. Οπότε, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ θα είναι κλειστό σύνολο, και συνεπώς η πρόταση (iii) θα αληθεύει.

Η απόδειξη για την πρόταση (ii) είναι παρόμοια με αυτήν της (iii). [Υπάρχει ωστόσο μια προειδοποίηση, που ο αναγνώστης επιβάλλεται να διαβάσει στην απόδειξη του παραδείγματος 1.3.9.] □

Προειδοποίηση. Οι ονομασίες 'ανοιχτό' και 'κλειστό' πολλές φορές προκαλούν σύγχυση στον αρχάριο αναγνώστη. Παρά την ετυμολογία των λέξεων, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα που ταυτοχρόνως είναι και κλειστά! Επιπλέον, υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το Παράδειγμα 1.1.2, βλέπουμε ότι:

(i) Το σύνολο $\{a\}$ είναι και κλειστό και ανοιχτό,

(ii) το σύνολο $\{b, c\}$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό,

(iii) το σύνολο $\{c, d\}$ είναι ανοιχτό μα όχι κλειστό και

(iv) το σύνολο $\{a, b, e, f\}$ είναι κλειστό μα όχι ανοιχτό.

Σε έναν διακριτικό χώρο, κάθε σύνολο είναι ταυτοχρόνως κλειστό και ανοιχτό, ενώ σε έναν μη διακριτικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, όλα τα υποσύνολα του X, εκτός από το X και το $\emptyset$, δεν είναι ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά σύνολα. □

Υπενθυμίζοντας ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δύνανται να είναι ταυτοχρόνως κλειστά και ανοιχτά, θα παρουσιάσουμε τον παρακάτω ορισμό.

1.2.6 Ορισμός. Ένα υποσύνολο S, ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, λέγεται κλειστάνοιχτο σύνολο, εάν είναι ταυτοχρόνως κλειστό και ανοιχτό στον $(X, \mathcal{T})$.

Σε κάθε τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ τόσο το σύνολο X όσο και το $\emptyset$ είναι κλειστάνοιχτα[1].

Σε έναν διακριτικό χώρο, όλα τα υποσύνολα του X είναι κλειστάνοιχτα.

Σε έναν μη διακριτικό χώρο, τα μόνα κλειστάνοιχτα σύνολα είναι το X και το $\emptyset$.

Ασκήσεις 1.2

[1] Παραδεχόμαστε ότι η λέξη 'κλειστάνοιχτο' είναι αδόκιμη, αλλά καμιά φορά στα μαθηματικά προηγείται η σαφήνεια και η απλότητα, της γλωσσικής επάρκειας και της ορθής χρήσης των γραμματικών και συντακτικών κανόνων.

1. Δημιουργείστε μια λίστα όλων των 64 υποσυνόλων του συνόλου X, του παραδείγματος 1.1.2. Ανεφέρετε, δίπλα από κάθε σύνολο, εάν είναι (i) κλειστάνοιχτο, (ii) ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό, (iii) ανοιχτό και όχι κλειστό, (iv) κλειστό μα όχι ανοιχτό.

2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την ιδιότητα ότι κάθε υποσύνολό του είναι κλειστό σύνολο. Αποδείξτε ότι ο χώρος αυτός είναι ο διακριτικός.

3. Παρατηρούμε ότι εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ο διακριτικός χώρος ή ο μη διακριτικός χώρος, τότε κάθε ανοιχτό σύνολο είναι αυτομάτως κλειστάνοιχτο σύνολο. Να βρεθεί μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο σύνολο $X = \{a, b, c, d\}$, η οποία να μην είναι ούτε η διακριτική, ούτε η μη διακριτική τοπολογία, αλλά να φέρει την ιδιότητα ότι κάθε ανοιχτό σύνολο είναι κλειστάνοιχτο.

4. Έστω X ένα άπειρο σύνολο. Εάν $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X, τέτοια ώστε κάθε άπειρο υποσύνολο του X να είναι κλειστό, να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{T}$ είναι η διακριτική τοπολογία.

5. Έστω X ένα άπειρο σύνολο και έστω $\mathcal{T}$ μια τοπολογία στο X, με την ιδιότητα ότι το μοναδικό άπειρο σύνολο στο X, το οποίο είναι ταυτοχρόνως και ανοιχτό, είναι το ίδιο το X. Επίσης, είναι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ απαραίτητα ένας μη διακριτικός χώρος;

6. (i) Έστω $\mathcal{T}$ μια τοπολογία σε ένα σύνολο X, τέτοια ώστε το σύνολο $\mathcal{T}$ να αποτελείται από ακριβώς τέσσερα σύνολα, ήτοι, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$, όπου A και B είναι δύο μη κενά, διαφορετικά μεταξύ τους και κανονικά υποσύνολα του X. [Ένα σύνολο A λέγεται κανονικό υποσύνολο του X εάν $A \subseteq X$ και $A \neq X$. Συμβολικά, γράφουμε $A \subset X$.] Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα A και B ικανοποιούν ακριβώς μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

$$(a)\ B = X \setminus A \qquad (b)\ A \subset B \qquad (c)\ B \subset A$$

[Βοήθημα: Άρχικά να αποδειχθεί ότι τα σύνολα A και B πρέπει να ικανοποιούν τουλάχιστον μία από τις συνθήκες και μετά να αποδειχθεί ότι δεν μπορούν να ικανοποιούν πάνω από μία από αυτές τις συνθήκες.]

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i), να γραφεί μια λίστα όλων των τοπολογιών στο σύνολο $X = \{1, 2, 3, 4\}$, που να αποτελούνται από ακριβώς τέσσερα σύνολα.

1.3 Η Πεπερασμένη-Κλειστή Τοπολογία

Είναι σύνηθες να ορίζουμε μια τοπολογία σε ένα σύνολο, με το να καθορίσουμε εξαρχής ποιά από τα σύνολα είναι ανοιχτά. Ωστόσο, μερικές φορές είναι ποιό εφικτό να περιγράψουμε μια τοπολογία μέσω κλειστών συνόλων αποκλειστικά. Ο ορισμός που ακολουθεί αποτελεί αποτελεί μια τέτοια περίπτωση.

1.3.1 Ορισμός. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο X, λέγεται πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία ή πιο απλά συμπεπερασμένη Τοπολογία, εάν τα κλειστά υποσύνολα του X είναι το X καθώς και όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του X. Με άλλα λόγια, τα ανοιχτά σύνολα είναι το $\emptyset$ και όλα τα υποσύνολα του X, τα οποία έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα.

Ακόμα μια φορά θεωρούμε αναγκαίο να εξεταστεί ότι το $\mathcal{T}$, στον Ορισμό 1.3.1, αποτελεί όντως μια τοπολογία, δηλαδή ικανοποιεί τις συνθήκες των Ορισμών 1.1.1.

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός 1.3.1 δεν μας εξασφαλίζει ότι κάθε τοπολογία, η οποία έχει το X και τα πεπερασμένα υποσύνολα του X κλειστά, είναι η πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία. Επιβάλλεται να είναι $\boxed{\text{αποκλειστικά}}$ κλειστά τα σύνολα. [Φυσικά, στην διακριτική Τοπολογία σε ένα σύνολο X, το σύνολο X και όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του X είναι πράγματι κλειστά, όπως είναι επίσης και όλα τα άλλα υποσύνολα του X.]

Στην πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία, όλα τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά. Ωστόσο, το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι άπειρα σύνολα δεν είναι κατ΄ ανάγκη ανοιχτά σύνολα.

1.3.2 Παράδειγμα. Εάν $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων αριθμών, τότε σύνολα όπως τα $\{1\}$, $\{5,6,7\}$, $\{2,4,6,8\}$ είναι πεπερασμένα, οπότε και κλειστά, στην πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία. Άρα, τα συμπληρώματα:

$$\{2,3,4,5,\ldots\},\ \{1,2,3,4,8,9,10,\ldots\},\ \{1,3,5,7,9,10,11,\ldots\}$$

αποτελούν ανοιχτά σύνολα στην πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία. Από την άλλη, το σύνολο των άρτιων θετικών ακεραίων δεν είναι κλειστό σύνολο, διότι δεν είναι πεπερασμένο και άρα το συμπλήρωμά του, το σύνολο των περιττών θετικών ακεραίων, δεν αποτελεί ανοιχτό σύνολο στην πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία.

Άρα, ενώ όλα τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά, δεν είναι όλα τα άπειρα σύνολα ανοιχτά. $\square$

1.3.3 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{T}$ η πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία σε ένα σύνολο X. Άν το X έχει τουλάχιστον 3 διαφορετικά κλειστάνοιχτα σύνολα, να αποδειχθεί ότι το X είναι πεπερασμένο σύνολο.

Απόδειξη.

Μας δίδεται ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι η πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία και ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά κλειστάνοιχτα σύνολα. Μας ζητείται να αποδείξουμε ότι το X είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο (ή καλύτερα μια οικογένεια συνόλων) $\mathcal{T}$ λέγεται πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία, εάν η οικογένεια όλων των κλειστών συνόλων του $\mathcal{T}$ αποτελείται από το X και από όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του X. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ένα σύνολο είναι κλειστάνοιχτο, εάν και μόνον αν είναι ταυτοχρόνως ανοιχτό και κλειστό.

Σημειώνουμε ότι σε κάθε τοπολογικό χώρο υπάρχουν τουλάχιστον 2 κλειστάνοιχτα σύνολα, ήτοι το X και το $\emptyset$. (Παραπέμπουμε στο σχόλιο αμέσως μετά τον Ορισμό 1.2.6.) Μας δίδεται ότι στον χώρο $(X, \mathcal{T})$ υπάρχουν τουλάχιστον 3 κλειστάνοιχτα σύνολα. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει κλειστάνοιχτο σύνολο διάφορο του $\emptyset$ και του X. Αυτό που μας μένει λοιπόν είναι να στρέψουμε την προσοχή μας σε αυτό το συγκεκριμένο κλειστάνοιχτο σύνολο!

Λόγω του ότι ο χώρος μας $(X, \mathcal{T})$ εμπεριέχει 3 διαφορετικά κλειστάνοιχτα υποσύνολα, γνωρίζουμε ότι θα υπάρχει ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο S του X, τέτοιο ώστε $S \neq X$ και $S \neq \emptyset$. Επειδή S είναι ανοιχτό στο $(X, \mathcal{T})$, ο Ορισμός 1.2.4 συνεπάγεται ότι το συμπλήρωμα $X \setminus S$ είναι ένα κλειστό σύνολο.

Άρα, το S και το $X \setminus S$ είναι κλειστά σύνολα στην πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία, $\mathcal{T}$. Οπότε, το S και το $X \setminus S$ είναι και τα δύο πεπερασμένα σύνολα, επειδή κανένα από τα δύο δεν συμπίπτει με το X. Όμως το $X = S \cup (X \setminus S)$, οπότε το X είναι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων. Άρα, το X θα είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. $\square$

Γνωρίζουμε πια δύο διαφορετικές τοπολογίες που μπορούν να οριστούν σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο – και δεν είναι μόνο αυτές. Οι τρεις συγκεκριμένες που μελετήσαμε είναι η διακριτική τοπολογία, η μη διακριτική τοπολογία και η πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία. Σημειώνουμε ότι πρέπει πάντοτε να αναφέρουμε την τοπολογία με την οποία εφοδιάζουμε ένα σύνολο.

Για παράδειγμα, το σύνολο $\{n : n \geq 10\}$ είναι ανοιχτό στην πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία σε ένα σύνολο φυσικών αριθμών, αλλά δεν είναι ανοιχτό στην διακριτική τοπολογία. Το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών είναι ανοιχτό στην διακριτική τοπολογία του συνόλου των φυσικών αριθμών, όμως δεν είναι ανοιχτό στην πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία.

Θα υπενθυμίσουμε τώρα κάποιους ορισμούς με τους οποίους πιθανόν να είναι ήδη εξοικειωμένος ο μέσος αναγνώστης του βιβλίου αυτού.

1.3.4 Ορισμοί. Έστω f μια συνάρτηση από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y.

(i) Η συνάρτηση f καλείται ένα-προς -ένα εάν $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται ότι $x_1 = x_2$, όπου $x_1, x_2 \in X$.

(ii) Η συνάρτηση f καλείται επί εάν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $f(x) = y$.

1.3.5 Ορισμοί. Έστω f μια συνάρτηση από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y. Η συνάρτηση f λέμε ότι έχει αντίστροφη συνάρτηση, εάν υπάρχει μια συνάρτηση g, από το Y στο X, τέτοια ώστε $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \in X$ και $f(g(y)) = y$, για κάθε $y \in Y$. Η συνάρτηση g καλείται αντίστροφη συνάρτηση της f.

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

1.3.6 Πρόταση. Έστω f μια συνάρτηση από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y.

(i) Η συνάρτηση f έχει αντίστροφο, εάν και μόνο αν f είναι ένα-προς -ένα και επί.

(ii) Έστω g_1 και g_2 δύο συναρτήσεις από το Y στο X. Εάν οι g_1 και g_2 είναι και οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις της f, τότε $g_1 = g_2$, δηλαδή, $g_1(y) = g_2(y)$, για κάθε $y \in Y$.

(iii) Έστω g μια συνάρτηση από το Y στο X. Η g θα είναι αντίστροφη συνάρτηση της f εάν και μόνον αν η f είναι αντίστροφη συνάρτηση της g.

Προειδοποίηση. Ένα σύνηθες λάθος για φοιτητές - σπουδαστές είναι να νομίσουν ότι μια συνάρτηση είναι ένα-προς -ένα , εάν 'απεικονίζει ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο'.

Όλες οι συναρτήσεις απεικονίζουν ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο και, πράγματι, αυτό αποτελεί μέρος του ορισμού μιας συνάρτησης.

Μια ένα-προς -ένα συνάρτηση είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει διαφορετικά σημεία σε διαφορετικά σημεία. □

Θα επιστρέψουμε τώρα σε μια πολύ σημαντική έννοια, αυτήν την αντίστροφης εικόνας συνόλου.

1.3.7 Ορισμός. Έστω f μια συνάρτηση από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y. Εάν S είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του Y, τότε το σύνολο $f^{-1}(S)$ ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ και } f(x) \in S\}.$$

Το υποσύνολο $f^{-1}(S)$, του X, λέγεται αντίστροφη εικόνα του S.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $f: X \to Y$ έχει αντίστροφη συνάρτηση, εάν και μόνον αν η f είναι ένα-προς -ένα και επί. Παρόλα αυτά, η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του Y δύναται να υπάρχει, ακόμα και εάν η f δεν είναι ένα-προς -ένα και επί. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα.

1.3.8 Παράδειγμα. Έστω f μια συνάρτηση από το σύνολο των ακεραίων, $\mathbb{Z}$, στον εαυτό του, με τύπο $f(z) = |z|$, για κάθε $z \in \mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση f δεν είναι ένα-προς -ένα, διότι $f(1) = f(-1)$.

Επίσης, δεν είναι επί, επειδή δεν υπάρχει $z \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $f(z) = -1$. Οπότε, η f δεν μπορεί να είναι ένα-προς -ένα και επί. Από την Πρόταση 1.3.6 (i), συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει αντίστροφη απεικόνιση. Παρόλα αυτά, αντίστροφες εικόνες συνόλων μπορούν να οριστούν, ανεξάρτητα από το αν υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση. Για παράδειγμα,

$$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1,-2,-3,1,2,3\}$$
$$f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\}) = \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}. \qquad \square$$

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με ένα ενδιαφέρον παράδειγμα.

1.3.9 Παράδειγμα. Έστω $(Y, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω X ένα μη κενό σύνολο. Επιπρόσθετα, έστω f μια συνάρτηση από το X στο Y. Έστω $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$. Να αποδείξετε ότι η $\mathcal{T}_1$ είναι μια τοπολογία στο X.

Απόδειξη.

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η συλλογή συνόλων $\mathcal{T}_1$ αποτελεί μια τοπολογία στο X, δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{T}_1$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) των Ορισμών 1.1.1.

$$X \in \mathcal{T}_1 \quad \text{διότι} \quad X = f^{-1}(Y) \quad \text{και} \quad Y \in \mathcal{T}.$$
$$\emptyset \in \mathcal{T}_1 \quad \text{διότι} \quad \emptyset = f^{-1}(\emptyset) \quad \text{και} \quad \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{T}_1$ ικανοποιεί την συνθήκη (i), των Ορισμών 1.1.1.

Για να επαληθεύσουμε ότι ισχύει η συνθήκη (ii) των Ορισμών 1.1.1, έστω $\{A_j : j \in J\}$ μια συλλογή στοιχείων του συνόλου $\mathcal{T}_1$, για κάποιο σύνολο δεικτών J. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}_1$. Επειδή $A_j \in \mathcal{T}_1$, ο ορισμός του συνόλου $\mathcal{T}_1$ συνεπάγεται ότι $A_j = f^{-1}(B_j)$, όπου $B_j \in \mathcal{T}$. Επίσης: $\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$. [Παραπομπή στην Άσκηση 1.3 # 1.]

Τώρα, $B_j \in \mathcal{T}$, για κάθε $j \in J$, οπότε $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$, διότι το σύνολο $\mathcal{T}$ αποτελεί τοπολογία στο Y. Άρα, από τον ορισμό του συνόλου $\mathcal{T}_1$, $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \in \mathcal{T}_1$, δηλαδή, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$.

Συμπερασματικά, το σύνολο $\mathcal{T}_1$ ικανοποιεί την συνθήκη (ii) των Ορισμών 1.1.1.

[Προσοχή. Υπενθυμίζουμε ότι δεν είναι όλα τα σύνολα αριθμήσιμα. (Παραπέμπουμε στο Παράρτημα, για περαιτέρω σκέψεις πάνω στην αριθμησιμότητα των συνόλων.) Άρα δεν μας βολεύει, στο παραπάνω επιχείρημα, να υποθέσουμε ότι τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ανήκουν στην συλλογή $\mathcal{T}_1$ και να αποδείξουμε ότι η ένωσή τους $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ ανήκει στην $\mathcal{T}_1$. Αυτό θα αποδείκνυε μόνο ότι η ένωση ενός $\boxed{\text{αριθμήσιμου}}$ αριθμού συνόλων στην $\mathcal{T}_1$ βρίσκεται στην $\mathcal{T}_1$, όμως από την άλλη δεν θα αποδείκνυε ότι το σύνολο $\mathcal{T}_1$ ικανοποιεί την συνθήκη (ii), των Ορισμών 1.1.1 – αυτή η συνθήκη προϋποθέτει $\boxed{\text{όλες}}$ οι ενώσεις, ανεξάρτητα με το αν είναι αριθμήσιμες ή μη αριθμήσιμες, των συνόλων στο $\mathcal{T}_1$, να ανήκουν στο $\mathcal{T}_1$.]

Τέλος, έστω A_1 και A_2 δύο σύνολα που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{T}_1$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$.

Επειδή, $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$ και $A_2 = f^{-1}(B_2)$, όπου $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$.

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2). \qquad \text{[Παραπομπή στις Ασκήσεις 1.3 \#1.]}$$

Επειδή, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$, θα έχουμε $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$. Άρα $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$, και έτσι έχουμε αποδείξει ότι το σύνολο $\mathcal{T}_1$ ικανοποιεί επίσης την ιδιότητα (iii), των Ορισμών 1.1.1.

Άρα, το σύνολο (ή συλλογή) $\mathcal{T}_1$ αποτελεί πράγματι μια τοπολογία στο X. $\square$

Ασκήσεις 1.3

1. Έστω f μια συνάρτηση από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y. Όπως έχουμε δει στο Παράδειγμα 1.3.9:

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \tag{1}$$

και

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \qquad (2)$$

για οποιοδήποτε υποσύνολο B_j του Y και για κάθε σύνολο δεικτών J.

(a) Να αποδειχθεί ότι η πρόταση (1) αληθεύει.
[Βοήθημα: Ξεκινήστε την απόδειξη θέτοντας το x να είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου στην αριστερή πλευρά, και δείξτε ότι ανήκει σε ένα σύνολο και στην δεξιά πλευρά. Μετά κάνετε το ανάποδο.]

(b) Να αποδειχθεί ότι το (2) αληθεύει.

(c) Να βρεθούν διαφορετικά σύνολα $A_1, A_2, X,$ και Y, καθώς και μια συνάρτηση $f\colon X \to Y$, τέτοια ώστε $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$, όπου $A_1 \subseteq X$ και $A_2 \subseteq X$.

2. Είναι η τοπολογία $\mathcal{T}$, όπως την περιγράψαμε στις Ασκήσεις 1.1 #6 (ii), η πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

3. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται T_1-χώρος εάν κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό στον $(X, \mathcal{T})$. Αποδείξτε ότι ακριβώς δύο από τους ακόλουθους εννέα τοπολογικούς χώρους είναι T_1-χώρος. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

   (i) Ο διακριτικός χώρος,
   (ii) ο μη διακριτικός χώρος με τουλάχιστον δύο στοιχεία,
   (iii) ένα άπειρο σύνολο με την πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία,
   (iv) στο Παράδειγμα 1.1.2,
   (v) στις Ασκήσεις 1.1 $\#5$ (i),
   (vi) στις Ασκήσεις 1.1 $\#5$ (ii),
   (vii) στις Ασκήσεις 1.1 $\#5$ (iii),
   (viii) στις Ασκήσεις 1.1 $\#6$ (i),
   (ix) στις Ασκήσεις 1.1 $\#6$ (ii).

4. Έστω $\mathcal{T}$ η πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία σε ένα σύνολο X. Εάν $\mathcal{T}$ είναι επίσης η διακριτική Τοπολογία, να αποδειχθεί ότι το σύνολο X είναι πεπερασμένο.

5. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται T_0-χώρος, εάν για κάθε ζεύγος ξεχωριστών στοιχείων a, b του X, είτε [2] υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το a και όχι το b, είτε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το b και όχι το a.

   (i) Αποδείξτε ότι κάθε T_1-χώρος είναι και T_0-χώρος

   (ii) Ποιοί από τους χώρους (i)–(vi), στην Άσκηση 3 παραπάνω, είναι T_0; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.)

   (iii) Ορίστε μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στο σύνολο $X = \{0, 1\}$, έτσι ώστε ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ να είναι T_0 αλλά όχι T_1. [Ο τοπολογικός χώρος αυτός είναι γνωστός ως χώρος του Sierpinski.]

   (iv) Αποδείξτε ότι κάθε ένας από τους τοπολογικούς χώρους που αναφέρθηκαν στις Ασκήσεις 1.1 #6 είναι ένας T_0-χώρος. (Παρατηρούμε ότι στην Άσκηση 3 παραπάνω κανείς από τους χώρους δεν είναι T_1.)

6. Έστω X ένα άπειρο σύνολο. Η αριθμήσιμη-κλειστή τοπολογία είναι η τοπολογία που έχει το X ως κλειστό σύνολο και επίσης περιλαμβάνει όλα τα αριθμήσιμα σύνολα του X. Αποδείξτε ότι η αριθμήσιμη κλειστή τοπολογία είναι όντως μια τοπολογία.

7. Έστω $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ δύο τοπολογίες σε ένα σύνολο X. Να ποδείξτε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

   (i) Εάν το σύνολο $\mathcal{T}_3$ ορίζεται ως $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, τότε το $\mathcal{T}_3$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη μια τοπολογία στο X. (Αιτιολογήστε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.)

   (ii) Εάν το σύνολο $\mathcal{T}_4$ ορίζεται ως $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, τότε το $\mathcal{T}_4$ είναι μια τοπολογία στο X. (Η τοπολογία $\mathcal{T}_4$ λέγεται τομή των τοπολογιών $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$.)

   (iii) Εάν $(X, \mathcal{T}_1)$ και $(X, \mathcal{T}_2)$ είναι T_1-χώροι, τότε ο $(X, \mathcal{T}_4)$ θα είναι επίσης T_1-χώρος.

   (iv) Εάν $(X, \mathcal{T}_1)$ και $(X, \mathcal{T}_2)$ είναι T_0-χώροι, τότε ο $(X, \mathcal{T}_4)$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη T_0-χώρος. (Αιτιολογήστε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.)

[2] Υπενθυμίζουμε ότι η χρήση του 'ή' στα μαθηματικά είναι διαφορετική από την χρήση του στην καθομιλουμένη. Στα μαθηματικά, ο σύνδεσμος 'ή' δεν είναι αποκλειστικός. Παραπέμπουμε στον σχολιασμό του Κεφαλαίο 0.

(v) Εάν $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$ είναι τοπολογίες σε ένα σύνολο X, τότε $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ θα είναι επίσης μια τοπολογία στο X.

(vi) Εάν για κάθε $i \in I$, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών, κάθε σύνολο $\mathcal{T}_i$ αποτελεί τοπολογία στο X, τότε και το σύνολο $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ θα είναι μια τοπολογία στο X.

1.4 Υστερόγραφο

Σε αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάσαμε την θεμελιώδη έννοια του τοπολογικού χώρου. Σαν παραδείγματα, μελετήσαμε διάφορους πεπερασμένους τοπολογικούς χώρους [3], όπως επίσης διακριτικούς χώρους, μη-διακριτικούς χώρους και χώρους εφοδιασμένους με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία. Κανένα από τα παραδείγματα αυτά δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικά στην μελέτη της τοπολογίας, τουλάχιστον όσον αφορά στις εφαρμογές. Παρόλα αυτά, στις Ασκήσεις 4.3 #8, σημειώνεται ότι κάθε άπειρος τοπολογικός χώρος ‘εμπεριέχει’ έναν άπειρο τοπολογικό χώρο με μία από τις ακόλουθες τοπολογίες: την μη-διακριτική Τοπολογία, την διακριτική Τοπολογία, την πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία, την Τοπολογία του αρχικού ή του τελικού τμήματος (βλέπε Ασκήσεις 1.1 #6). Βασιζόμενοι σε αυτές τις πληροφορίες, στο Κεφάλαιο που ακολουθεί θα περιγράψουμε μια σημαντική τοπολογία, την Ευκλείδια.

Μεθοδικά παρουσιάσαμε όρους όπως το ‘ανοιχτό σύνολο’ και το ‘κλειστό σύνολο’, υπογραμμίζοντας πως αυτές οι ταμπέλες μπορεί να προκαλέσουν ετυμολογικές παρεξηγήσεις. Υπάρχουν σύνολα που μπορεί να είναι ταυτοχρόνως ανοιχτά και κλειστά, ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά, ανοιχτά μα όχι κλειστά ή κλειστά αλλά όχι ανοιχτά. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι ανοιχτό, αποδεικνύοντας ότι δεν είναι κλειστό.

Εκτός από την παρουσίαση των ορισμών της Τοπολογίας, του τοπολογικού χώρου και των ανοιχτών και κλειστών συνόλων, θεωρούμε ότι η παρουσίαση που αφορά στην συγγραφή αποδείξεων αποτελεί το σημαντικότερο σημείο του κεφαλαίου.

[3] Με τον όρο πεπερασμένος τοπολογικός χώρος εννοούμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, όπου το σύνολο X είναι πεπερασμένο.

Στα αρχικά σχόλια του κεφαλαίου, επισημάναμε το πόσο σημαντικό είναι να μάθει κανείς να γράφει σωστά αποδείξεις. Στο Παράδειγμα 1.1.8, την Πρόταση 1.1.9 και το Παράδειγμα 1.3.3 είδαμε πως να 'εμβαθύνουμε στην ουσία' μιας απόδειξης. Είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση του αντικειμένου η εξάσκηση του αναγνώστη στην συγγραφή μαθηματικών αποδείξεων. Αρκετά καλά βοηθήματα για μια αρχή αποτελούν, κατά την γνώμη μας, οι ασκήσεις 1.1 #8, 1.2 #2,4, και 1.3 #1,4.

Κάποιοι φοιτητές συγχέουν το γενονός ότι η έννοια της τοπολογίας εμπεριέχει την δυσνόητη πρόταση 'σύνολα συνόλων'. Ο αναγνώστης θα μπορούσε να εξοικειωθεί με αυτή την έννοια λύνοντας τις Ασκήσεις 1.1 #3.

Οι ασκήσεις σε αυτό το Κεφάλαιο εμπεριείχαν τις έννοιες του T_0-χώρου και του T_1-χώρου, οι οποίες θα παρουσιαστούν επίσημα σε επόμενο κεφάλαιο. Αναφέρουμε προς το παρόν ότι αυτές οι έννοιες είναι γνωστές ως αξιώματα διαχωρισημότητας.

Τέλος, θα υπογραμμίσουμε την χρησιμότητα των αντίστροφων εικόνων. Τέτοιες εικόνες συναντήσαμε στο Παράδειγμα 1.3.9 και στις Ασκήσεις 1.3 #1. Ο ορισμός της συνεχούς απεικόνισης βασίζεται πάνω στις αντίστροφες εικόνες.

Κεφάλαιο 2

Η Ευκλείδια Τοπολογία

Εισαγωγή

Σε μια ταινία ή σε ένα μυθιστόρημα, υπάρχουν πάντα μερικοί κεντρικοί χαρακτήρες, γύρω από τους οποίους αναπτύσσεται το σενάριο. Στο σενάριο της τοπολογίας, η ευκλείδια τοπολογία που ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελεί έναν από τους κεντρικούς χαρακτήρες. Πράγματι, το παράδειγμα αυτής της τοπολογίας είναι τόσο πλούσιο σε ιδιότητες, που θα επανερχόμαστε σ΄ αυτό κάθε τόσο, για περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση.

Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε τρείς τοπολογίες που μπορούν να οριστούν σε οποιοδήποτε σύνολο: την διακριτική Τοπολογία, την μη διακριτική Τοπολογία και την πεπερασμένη-κλειστή Τοπολογία. Άρα, γνωρίζουμε ήδη τρείς τοπολογίες που μπορούν να οριστούν στο σύνολο $\mathbb{R}$. Ακόμα έξι τοπολογίες στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίστηκαν στις ασκήσεις 1.1 #5 και #9. Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε μια πολύ πιο σημαντική και ενδιαφέρουσα τοπολογία στο $\mathbb{R}$, που είναι γνωστή ως Ευκλείδεια Τοπολογία.

Μια διεξοδικότερη ανάλυση της Ευκλείδειας Τοπολογίας θα καταλήξει στον όρο 'βάση τοπολογίας'. Στην μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας μάθαμε ότι κάθε διανυσματικός χώρος είναι γραμμικός συνδιασμός στοιχείων μιας βάσης. Παρομοίως και στην τοπολογία, για κάθε τοπολογικό χώρο, κάθε ανοιχτό σύνολο μπορεί να παρασταθεί ως ένωση των στοιχείων μιας βάσης. Πράγματι, ένα σύνολο είναι ανοιχτό, εάν και μόνον αν είναι η ένωση στοιχείων της βάσης.

2.1 Η Ευκλείδεια Τοπολογία στο Σύνολο $\mathbb{R}$

2.1.1 Ορισμός. Ένα υποσύνολο S, του $\mathbb{R}$, λέγεται ανοιχτό στην ευκλείδεια Τοπολογία του $\mathbb{R}$ εάν ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

$(*)$ Για κάθε $x \in S$, υπάρχουν a, b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, έτσι ώστε $x \in (a, b) \subseteq S$.

Συμβολισμός. Οποτεδήποτε αναφερόμαστε στον τοπολογικό χώρο $\mathbb{R}$ χωρίς να προσδιορίζουμε μια συγκεκριμένη τοπολογία, θα υπονοούμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια Τοπολογία.

2.1.2 Παρατήρηση. (i) Η 'Ευκλείδεια Τοπολογία' $\mathcal{T}$ είναι όντως μια τοπολογία.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii), των Ορισμών 1.1.1.

Μας δίδεται ότι ένα σύνολο ανήκει στο $\mathcal{T}$, εάν και μόνον αν ικανοποιεί την ιδιότητα $*$.

Πρώτον, θα αποδείξουμε ότι $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Έστω λοιπόν $x \in \mathbb{R}$. Εάν θέσουμε $a = x-1$ και $b = x+1$, τότε $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή, το σύνολο $\mathbb{R}$ θα ικανοποιεί την ιδιότητα $*$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Δεύτερον, $\emptyset \in \mathcal{T}$, επειδή το $\emptyset$ ικανοποιεί την ιδιότητα $*$ εξ ορισμού.

Έστω τώρα $\{A_j : j \in J\}$, για κάποιο σύνολο δεικτών J, μια οικογένεια στοιχείων του συνόλου $\mathcal{T}$. Θα αποδείξουμε ότι $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$, δηλαδή, θα δείξουμε ότι το σύνολο $\bigcup_{j\in J} A_j$ ικανοποιεί την ιδιότητα $*$. Έστω $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. Τότε, $x \in A_k$, για κάποιο $k \in J$. Επειδή $A_k \in \mathcal{T}$, θα υπάρχουν a και b στο $\mathbb{R}$, με $a < b$, έτσι ώστε $x \in (a, b) \subseteq A_k$. Επειδή όμως $k \in J$, $A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$ οπότε και $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$. Άρα, $\bigcup_{j\in J} A_j$ ικανοποιεί την ιδιότητα $*$ και άρα ανήκει στο σύνολο $\mathcal{T}$.

Τέλος, έστω A_1 και A_2 δύο σύνολα που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{T}$. Θα αποδείξουμε ότι $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Έστω λοιπόν $y \in A_1 \cap A_2$. Τότε, $y \in A_1$. Επειδή όμως $A_1 \in \mathcal{T}$, θα υπάρχουν a και b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, έτσι ώστε $y \in (a, b) \subseteq A_1$. Επίσης,

$y \in A_2 \in \mathcal{T}$. Άρα, θα υπάρχουν c και d στο $\mathbb{R}$, όπου $c < d$, έτσι ώστε $y \in (c,d) \subseteq A_2$. Έστω e ένα στοιχείο μεγαλύτερο από το a και το c, και έστω f ένα στοιχείο μικρότερο από το b και το d. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $e < y < f$, οπότε θα έχουμε $y \in (e,f)$. Επειδή $(e,f) \subseteq (a,b) \subseteq A_1$ και $(e,f) \subseteq (c,d) \subseteq A_2$, συμπεραίνουμε ότι $y \in (e,f) \subseteq A_1 \cap A_2$. Άρα, η τομή $A_1 \cap A_2$ θα ικανοποιεί την ιδιότητα $*$, οπότε και θα ανήκει στο σύνολο $\mathcal{T}$.

Από τα παραπάνω, συνάγουμε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ αποτελεί πράγματι μια τοπολογία στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. $\square$

Σε αυτό το σημείο έχουμε αρκετά θεμέλια για να περιγράψουμε τα ανοιχτά και τα κλειστά σύνολα της Ευκλείδειας Τοπολογίας στο σύνολο $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι όλα τα ανοιχτά διαστήματα είναι πράγματι ανοιχτά σύνολα στην τοπολογία αυτή και όλα τα κλειστά διαστήματα είναι κλειστά σύνολα.

(ii) Έστω $r, s \in \mathbb{R}$, όπου $r < s$. Στην Ευκλείδεια Τοπολογία $\mathcal{T}$, στο $\mathbb{R}$, το ανοιχτό διάστημα (r,s) ανήκει στο σύνολο $\mathcal{T}$, άρα αποτελεί ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη.

Μας δίδεται το ανοιχτό διάστημα (r,s).

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το (r,s) είναι ανοιχτό στην Ευκλείδεια τοπολογία, δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι το (r,s) ικανοποιεί την ιδιότητα $(*)$, του Ορισμού 2.1.1.

Θα ξεκινήσουμε θέτοντας $x \in (r,s)$. Θέλουμε να βρούμε στοιχεία a και b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, τέτοια ώστε $x \in (a,b) \subseteq (r,s)$.

Έστω $x \in (r,s)$. Επιλέγουμε $a = r$ και $b = s$. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$x \in (a,b) \subseteq (r,s).$$

Άρα, το (r,s) αποτελεί ανοιχτό σύνολο στην Ευκλείδεια Τοπολογία. $\square$

(iii) Τα ανοιχτά διαστήματα (r,∞) και $(-\infty,r)$ είναι ανοιχτά σύνολα στο $\mathbb{R}$, για κάθε πραγματικό αριθμό r.

Απόδειξη.

Πρώτον, θα αποδείξουμε ότι το διάστημα (r,∞) είναι ένα ανοιχτό σύνολο, δηλαδή ικανοποιεί την ιδιότητα $(*)$.

Για να το αποδείξουμε αυτό, θέτουμε $x \in (r,\infty)$, και ζητούμε $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$x \in (a,b) \subseteq (r,\infty).$$

Έστω $x \in (r,\infty)$. Θέτουμε $a = r$ και $b = x + 1$. Τότε, $x \in (a,b) \subseteq (r,\infty)$ οπότε και $(r,\infty) \in \mathcal{T}$.

Με ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορεί κανείς να αποδείξει και ότι το διάστημα $(-\infty, r)$ αποτελεί ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$. $\square$

(iv) Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ενώ κάθε ανοιχτό διάστημα είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$, η αντίστροφη πρόταση δεν είναι αληθής. Δεν είναι δηλαδή όλα τα ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}$ διαστήματα. Για παράδειγμα, το σύνολο $(1,3) \cup (5,6)$ είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$, όμως δεν είναι ανοιχτό διάστημα. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$, το οποίο είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$.$\square$

(v) Για κάθε c και d στο $\mathbb{R}$, όπου $c < d$, το κλειστό διάστημα $[c,d]$ δεν είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Πρέπει να δείξουμε ότι το $[c, d]$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $(*)$.

Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να βρούμε κάποιο στοιχείο x, τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν a, b που να ικανοποιούν την ιδιότητα $(*)$.

Εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι το c και το d είναι ιδιαίτερα σημεία στο διάστημα $[c, d]$. Πρέπει να επιλέξουμε λοιπόν κάποιο $x = c$, και να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν στοιχεία a, b με την απαιτούμενη ιδιότητα.

Προς αυτή την κατεύθυνση, θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο απόδειξης η οποία είναι γνωστή ως απόδειξη μέσω της αντίφασης. Το πλάνο έχει ως εξής.

$\boxed{\text{Υποθέτουμε}}$ ότι το a και το b υπάρχουν και ικανοποιούν την απαιτούμενη ιδιότητα, και αποδεικνύουμε ότι με αυτό καταλήγουμε σε αντίφαση, δηλαδή σε κάτι που δεν είναι αληθές.

Άρα η υπόθεση είναι μη αληθής πρόταση! Οπότε, δεν δύνανται να υπάρχουν τέτοια a και b. Τέλος, το διάστημα $[c, d]$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $(*)$, άρα δεν είναι ανοιχτό σύνολο.

Παρατηρούμε ότι $c \in [c, d]$. $\boxed{\text{Έστω}}$ ότι υπάρχουν a και b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, τέτοια ώστε $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Τότε, $c \in (a, b)$ συνεπάγεται ότι $a < c < b$, άρα $a < \frac{c+a}{2} < c < b$. Άρα, $\frac{c+a}{2} \in (a, b)$ και $\frac{c+a}{2} \notin [c, d]$. Οπότε $(a, b) \nsubseteq [c, d]$, που αποτελεί αντίφαση. Άρα δεν υπάρχουν a και b, τέτοια ώστε $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Τελικά, το διάστημα $[c, d]$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $(*)$, άρα και $[c, d] \notin \mathcal{T}$. $\square$

(vi) Για κάθε a και b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, το κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι κλειστό σύνολο στην Ευκλείδεια Τοπολογία στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό της πρότασης αυτής, παρατηρούμε ότι το συμπλήρωμα του διαστήματος, ήτοι το $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, όντας η ένωση δύο ανοιχτών συνόλων, είναι και αυτό ανοιχτό σύνολο. $\square$

(vii) Κάθε μονοσύνολο $\{a\}$ είναι κλειστό σύνολο στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Το συμπλήρωμα του $\{a\}$ είναι η ένωση δύο ανοιχτών συνόλων $(-\infty, a)$

και (a, ∞), οπότε είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα, το μονοσύνολο $\{a\}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$, όπως θέλαμε να αποδείξουμε.

[Χρησιμοποιώντας την ορολογία των Ασκήσεων 1.3 #3, το αποτέλεσμα αυτό μας λέει εν ολίγοις ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι ένας T_1-χώρος.] $\square$

(viii) Σημειώνουμε εδώ ότι θα μπορούσαμε να έχουμε συμπεριλάβει την πρόταση (vii) στην πρόταση (vi), αντικαθιστώντας απλά την σχέση '$a < b$' με την σχέση '$a \leq b$'. Το μονοσύνολο $\{a\}$ είναι απλά η εκφυλισμένη περίπτωση ενός κλειστού διαστήματος $[a, b]$. $\square$

(ix) Το σύνολο $\mathbb{Z}$, όλων των ακεραίων αριθμών, είναι ένα κλειστό σύνολο στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Το συμπλήρωμα του $\mathbb{Z}$ είναι η ένωση $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$ ανοιχτών υποσυνόλων $(n, n+1)$ του $\mathbb{R}$, οπότε είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$. Έτσι, το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$. $\square$

(x) Το σύνολο $\mathbb{Q}$, όλων των ρητών αριθμών , δεν είναι ούτε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ούτε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό σύνολο, αποδεικνύοντας ότι δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $(*)$.

Για να το επιτύχουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει <u>κανένα</u> διάστημα (a, b), όπου $a < b$.

$\boxed{\text{Υποθέτουμε}}$ ότι $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$, όπου a και b ανήκουν στο $\mathbb{R}$, με $a < b$. Είναι γνωστό ότι μεταξύ δύο διαφορετικών πραγματικών αριθμών, υπάρχει πάντα ένας άρρητος αριθμός (Άσκηση για τον αναγνώστη.). Οπότε, θα υπάρχει $c \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $c \notin \mathbb{Q}$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την πρόταση $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. Άρα το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα διάστημα της μορφής (a, b), οπότε και δεν είναι ανοιχτό σύνολο.

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό σύνολο. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει πάντα ένας άρρητος αριθμός, βλέπουμε ότι το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα διάστημα (a,b), με $a<b$. Άρα, το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$, οπότε και το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$. $\square$

(xi) Στο κεφάλαιο 3 θα δείξουμε ότι τα μοναδικά κλειστάνοιχτα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}$ και το $\emptyset$. $\square$

Ασκήσεις 2.1

1. Αποδείξτε ότι εάν $a,b \in \mathbb{R}$, όπου $a<b$, τότε κανένα από τα διαστήματα $[a,b)$ και $(a,b]$ δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επίσης, αποδείξτε ότι κανένα από αυτά τα διαστήματα δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
2. Αποδείξτε ότι τα σύνολα $[a,\infty)$ και $(-\infty,a]$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
3. Αποδείξτε, μέσω ενός παραδείγματος, ότι η ένωση ενός απείρου αριθμού κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
4. Αποδείξτε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

   (i) Το σύνολο $\mathbb{Z}$, όλων των ακεραίων αριθμών, δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

   (ii) Το σύνολο S, όλων των πρώτων αριθμών, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

   (iii) Το σύνολο $\mathbb{P}$ όλων των άρρητων αριθμών, δεν είναι ούτε κλειστό υποσύνολο ούτε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
5. Εάν F είναι ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δείξτε ότι το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$, όμως το F δεν είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$.
6. Εάν F είναι ένα μη κενό αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το F δεν είναι ανοιχτό σύνολο.
7. (i) Έστω $S=\{0,1,1/2,1/3,1/4,1/5,\ldots,1/n,\ldots\}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο S είναι κλειστό στην Ευκλείδεια τοπολογία στο $\mathbb{R}$.

(ii) Είναι το σύνολο $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$ κλειστό στο $\mathbb{R}$;

(iii) Είναι το σύνολο $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, n\sqrt{2}, \ldots\}$ κλειστό στο $\mathbb{R}$;

8. (i) Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο S, του X, λέγεται F_σ-σύνολο εάν μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Αποδείξτε ότι όλα τα ανοιχτά διαστήματα (a, b) και όλα τα κλειστά διαστήματα $[a, b]$, είναι F_σ-σύνολα στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο T, του X, λέγεται G_δ-σύνολο, εάν μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων. Αποδείξτε ότι όλα τα ανοιχτά διαστήματα (a, b) και όλα τα κλειστά διαστήματα $[a, b]$ είναι G_δ-σύνολα στο $\mathbb{R}$.

(iii) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι ένα F_σ-σύνολο στο $\mathbb{R}$. (Στις ασκήσεις 6.5#3 αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ-σύνολο στο $\mathbb{R}$.)

(iv) Αποδείξτε ότι το συμπλήρωμα ενός F_σ-συνόλου είναι ένα G_δ-σύνολο και το συμπλήρωμα ενός G_δ-συνόλου είναι ένα F_σ-σύνολο.

2.2 Βάση Τοπολογίας

Οι Παρατηρήσεις 2.1.2 μας επιτρέπουν να περιγράψουμε την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$ με έναν πολύ πιο βολικό τρόπο. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα παρουσιάσουμε την έννοια της βάσης μιας τοπολογίας.

2.2.1 Πρόταση. Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό, εάν και μόνο αν είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων.

Απόδειξη.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το S είναι ανοιχτό, εάν και μόνο αν είναι η ένωση ανοιχτών διαστημάτων, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι:

(i) εάν S μπορεί να γραφτεί ως ένωση ανοιχτών διαστημάτων, τότε είναι ανοιχτό σύνολο, και

(ii) εάν S είναι ανοιχτό σύνολο, τότε μπορεί να γραφτεί ως ένωση ανοιχτών διαστημάτων.

Υποθέτουμε ότι S μπορεί να γραφτεί ως ένωση ανοιχτών διαστημάτων, δηλαδή, υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα (a_j, b_j), όπου το j ανήκει σε κάποιο σύνολο δεικτών J, τέτοια ώστε $S = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$. Οι Παρατηρήσεις 2.1.2 (ii) μας εξασφαλίζουν ότι κάθε ανοιχτό διάστημα (a_j, b_j) είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα, το σύνολο S είναι ένωση ανοιχτών συνόλων, και άρα το S είναι ανοιχτό σύνολο.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το S είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x \in S$, υπάρχει διάστημα $I_x = (a, b)$, τέτοιο ώστε $x \in I_x \subseteq S$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $S = \bigcup_{x\in S} I_x$.

Πρέπει να δείξουμε ότι τα δύο σύνολα S και $\bigcup_{x\in S} I_x$ ισούνται μεταξύ τους.

Για την απόδειξη της ισότητας αυτής, θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(i) εάν $y \in S$, τότε $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$ και

(ii) αν $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$, τότε $z \in S$.

[Σημειώνουμε ότι η πρόταση (i) είναι ισοδύναμη της πρότασης $S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$, ενώ η (ii) είναι ισοδύναμη της $\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$.]

Αρχικά, έστω $y \in S$. Τότε, $y \in I_y$, οπότε και $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, όπως ζητείτο. Εν συνεχεία, έστω $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$. Τότε, $z \in I_t$, για κάποιο $t \in S$. Εφόσον κάθε $I_x \subseteq S$, παρατηρούμε ότι $I_t \subseteq S$, οπότε και $z \in S$. Άρα, $S = \bigcup_{x\in S} I_x$, και συμπεραίνουμε ότι το σύνολο S είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων. $\square$

Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι για να περιγράψουμε την (φυσική) τοπολογία του $\mathbb{R}$, πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι όλα τα διαστήματα (a, b) είναι ανοιχτά σύνολα. Οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο θα μπορεί να γραφεί ως ένωση αυτών των ανοιχτών συνόλων. Αυτή η διαπίστωση μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

2.2.2 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Μια συλλογή $\mathcal{B}$, ανοιχτών συνόλων του X, ονομάζεται βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, εάν κάθε ανοιχτό σύνολο αποτελεί ένωση μελών της $\mathcal{B}$.

Εάν $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, σε ένα σύνολο X, τότε ένα υποσύνολο U, του X, ανήκει στην $\mathcal{T}$ εάν και μόνον αν είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Οπότε, η $\mathcal{B}$ 'γενικεύει' την τοπολογία $\mathcal{T}$ κατά τον ακόλουθο τρόπο: εάν μας δίδεται η πληροφορία ως προς το τί σύνολα περιέχονται στην $\mathcal{B}$, τότε μπορούμε να καθορίσουμε τα στοιχεία της τοπολογίας $\mathcal{T}$ – θα είναι ακριβώς όλα τα σύνολα που αποτελούν ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$.

2.2.3 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Τότε, η συλλογή $\mathcal{B}$ θα αποτελεί βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$, και αυτό μας το εγγυάται η Πρόταση 2.2.1. $\square$

2.2.4 Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας διακριτικός χώρος και έστω $\mathcal{B}$ η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του X που είναι μονοσύνολα, δηλαδή $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Τότε, η Πρόταση 1.1.9 μας εξασφαλίζει ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$. $\square$

2.2.5 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ και

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Τότε η συλλογή $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ θα αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}_1$, επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$ και κάθε μέλος της τοπολογίας $\mathcal{T}_1$ μπορεί να εκφραστεί σαν ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. (Παρατηρούμε ότι το $\emptyset$ αποτελεί κενή ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.)

Σημειώνουμε επίσης ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_1$ από μόνη της αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}_1$. $\square$

2.2.6 Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ θα αποτελεί βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$. Έτσι, για παράδειγμα, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X θα αποτελεί βάση για την διακριτική τοπολογία στο X.

Βλέπουμε λοιπόν ότι δύνανται να υπάρχουν περισσότερες από μία βάσεις για την ίδια τοπολογία. Πράγματι, εάν η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, σε ένα σύνολο X, και $\mathcal{B}_1$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{B}_1$ θα είναι επίσης μια βάση για την $\mathcal{T}$. [Άσκηση για τον αναγνώστη.] $\square$

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, η έννοια της 'βάσης για μια τοπολογία' μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τοπολογίες. Παρόλα αυτά, όπως θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ως προς την επιλογή της κατάλληλης συλλογής συνόλων.

2.2.7 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Τότε, η συλλογή $\mathcal{B}$ <u>δεν</u> αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στο X. Για να το δούμε αυτό,

$\boxed{\text{υποθέτουμε}}$ ότι η $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$. Τότε, η τοπολογία $\mathcal{T}$ θα αποτελείται από όλες τις ενώσεις συνόλων της συλλογής $\mathcal{B}$, δηλαδή:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

(Για ακόμα μια φορά χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το $\emptyset$ είναι κενή ένωση μελών της $\mathcal{B}$, άρα $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

Από την άλλη, η συλλογή $\mathcal{T}$ δεν είναι τοπολογία, διότι το σύνολο $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{T}$. Άρα, η $\mathcal{T}$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) των Ορισμών 1.1.1. Έτσι, έχουμε έρθει σε αντίφαση, οπότε η υπόθεσή μας δεν είναι αληθής. Άρα, η συλλογή $\mathcal{B}$ <u>δεν</u> αποτελεί βάση για το σύνολο X. $\square$

Μετά από τις παραπάνω διαπιστώσεις, είναι εύλογο να ρωτήσουμε το εξής: εάν $\mathcal{B}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X, υπό ποιές συνθήκες θα αποτελεί η $\mathcal{B}$ βάση για μια τοπολογία; Η ερώτηση αυτή απαντάται στην Πρόταση 2.2.8.

2.2.8 Πρόταση. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{B}$ μια συλλογή υποσυνόλων του X. Η συλλογή $\mathcal{B}$ θα αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο X, εάν και μόνον αν η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ και

(β) για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, το σύνολο $B_1 \cap B_2$ αποτελεί ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.

Απόδειξη. Εάν η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{T}$ θα ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) των Ορισμών 1.1.1. Συγκεκριμένα, το X θα είναι ανοιχτό σύνολο και η τομή οποιωνδήποτε δύο ανοιχτών συνόλων θα είναι ανοιχτό σύνολο. Εφόσον τα ανοιχτά σύνολα είναι ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$, αυτό συνεπάγεται ότι οι ιδιότητες (α) και (β) είναι αληθείς.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β), κι επίσης θεωρούμε την $\mathcal{T}$ ως την συλλογή όλων των υποσυνόλων του X, τα οποία είναι ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}$ ορίζει μια τοπολογία στο X. (Εάν αυτό αληθεύει, τότε η $\mathcal{B}$ θα αποτελεί αυτόματα μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, οπότε και η πρόταση θα αληθεύει.)

Από την ιδιότητα (α) παίρνουμε $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, οπότε και $X \in \mathcal{T}$. Σημειώνουμε ότι το $\emptyset$ αποτελεί κενή ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, άρα $\emptyset \in \mathcal{T}$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (i), των Ορισμών 1.1.1.

Έστω τώρα $\{T_j\}$ μια οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$. Τότε, κάθε T_j θα αποτελεί ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Οπότε, η ένωση όλων των T_j θα είναι επίσης ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, άρα θα ανήκει στην $\mathcal{T}$. Έτσι, η $\mathcal{T}$ θα ικανοποιεί την ιδιότητα (ii) των Ορισμών 1.1.1.

Τέλος, έστω C και D δύο ανοιχτά σύνολα στην $\mathcal{T}$. Θα εξετάσουμε άν $C \cap D \in \mathcal{T}$. Όμως, $C = \bigcup_{k \in K} B_k$, για κάποιο σύνολο δεικτών K και $B_k \in \mathcal{B}$. Επίσης, $D = \bigcup_{j \in J} B_j$, για κάποιο σύνολο δεικτών J και $B_j \in \mathcal{B}$. Άρα:

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{k \in K,\, j \in J} (B_k \cap B_j).$$

Αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη την επαλήθευση για το ότι οι δύο εκφράσεις για την τομή $C \cap D$ είναι πράγματι ίσες.

Επισημαίνουμε ότι στην πεπερασμένη περίπτωση, έχουμε προτάσεις του τύπου:

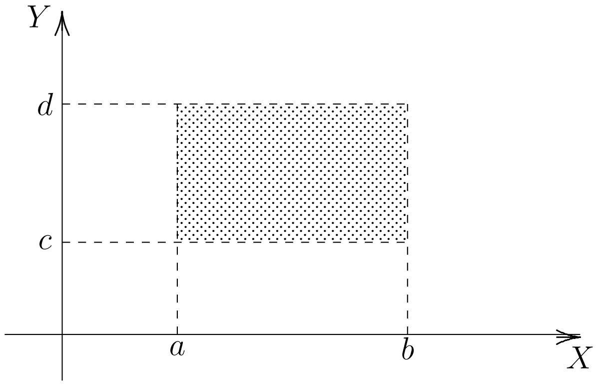
$$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4).$$

Από την υπόθεση (β), παίρνουμε ότι κάθε $B_k \cap B_j$ θα ανήκει στην ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, οπότε η τομή $C \cap D$ θα ανήκει στην ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Έτσι, έχουμε ότι $C \cap D \in \mathcal{T}$. Άρα η $\mathcal{T}$ θα ικανοποιεί την ιδιότητα (iii), του Ορισμού 1.1.1, η $\mathcal{T}$ θα είναι τοπολογία και η $\mathcal{B}$ μια βάση αυτής. □

Η Πρόταση 2.2.8 είναι ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα. Μας επιτρέπει να ορίσουμε τοπολογίες, θεωρώντας απλά μια βάση. Αυτή η μέθοδος είναι ευκολότερη, από το να προσπαθεί κανείς να περιγράψει όλα τα ανοιχτά σύνολα.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την Πρόταση για να ορίσουμε μια σημαντική τοπολογία στο επίπεδο. Αυτή η τοπολογία είναι γνωστή ως 'Ευκλείδεια Τοπολογία'.

2.2.9 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{B}$ η συλλογή όλων των 'ανοιχτών ορθογωνίων' $\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b,\ c < y < d\}$ στο επίπεδο, τα οποία έχουν κάθε πλευρά παράλληλη στον X- ή στον Y-άξονα.



Τότε, η $\mathcal{B}$ θα αποτελεί μια βάση για μια τοπολογία στο επίπεδο. Η τοπολογία αυτή θα καλείται Ευκλείδεια Τοπολογία.

Οποτεδήποτε χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{R}^2$ θα αναφερόμαστε στο επίπεδο και εάν αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ σαν τοπολογικό χώρο, χωρίς να κάνουμε μνεία στην τοπολογία, θα υπονοούμε ότι ο χώρος είναι εφοδιασμένος με την Ευκλείδια Τοπολογία.

Για να δούμε ότι η $\mathcal{B}$ αποτελεί όντως βάση για μια τοπολογία, παρατηρούμε ότι (i) το επίπεδο είναι ένωση όλων των ανοιχτών ορθογωνίων και (ii) η τομή οποιωνδήποτε δύο ορθογωνίων θα αποτελεί ορθογώνιο. [Με τον όρο 'ορθογώνιο' εννοούμε ένα κυρτό σύνολο με τέσσερις πλευρές, κάθε μία από τις οποίες είναι παράλληλη προς έναν από τους άξονες.] Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες της Πρότασης 2.2.8 ικανοποιούνται, οπότε η $\mathcal{B}$ αποτελεί όντως βάση για μια τοπολογία. $\square$

2.2.10 Παρατήρηση. Με την γενίκευση του Παραδείγματος 2.2.9, βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να ορίσει μια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots,\ n\}$, για κάθε ακέραιο $n > 2$. Έστω $\mathcal{B}$ η συλλογή όλων των υποσυνόλων $\{\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ του $\mathbb{R}^n$, με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Τότε η συλλογή $\mathcal{B}$ θα αποτελεί βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στον χώρο $\mathbb{R}^n$. □

Ασκήσεις 2.2

1. Να αποδειχθεί ότι ο δίσκος $\{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι κάθε ανοιχτός δίσκος στο επίπεδο είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις.

   (i) Έστω $\langle a, b\rangle$ ένα οποιοδήποτε σημείο στον δίσκο $D = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$. Θεωρούμε $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Έστω $R_{\langle a,b\rangle}$ ένα ορθογώνιο με κορυφές στα σημεία $\langle a \pm \frac{1-r}{8}, b \pm \frac{1-r}{8}\rangle$. Να αποδειχθεί ότι $R_{\langle a,b\rangle} \subset D$.

   (ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στην πρόταση (i), να αποδειχθεί ότι:
   $$D = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D} R_{\langle a,b\rangle}.$$

   (iii) Να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας την πρόταση (ii), ότι το σύνολο D είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$.

   (iv) Να αποδειχθεί ότι κάθε δίσκος της μορφής $\{\langle x, y\rangle : (x - a)^2 + (y - b)^2 < c^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ είναι ανοιχτός στο $\mathbb{R}^2$.

2. Να αποδειχθεί ότι η συλλογή όλων των ανοιχτών δίσκων στο $\mathbb{R}^2$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}^2$. Πιο συγκεκριμένα, να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις:

(i) Έστω D_1 και D_2 ανοιχτοί δίσκοι στο $\mathbb{R}^2$, όπου $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Εάν $\langle a, b\rangle$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στο σύνολο $D_1 \cap D_2$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ανοιχτός δίσκος $D_{\langle a,b\rangle}$, με κέντρο το $\langle a, b\rangle$, τέτοιος ώστε $D_{\langle a,b\rangle} \subset D_1 \cap D_2$. [Βοήθημα: Εδώ θα ήταν βολικό να ζωγραφιζόταν μια εικόνα, και να υιοθετήτο μέθοδος παρόμοια της Άσκησης 1 (i).]

(ii) Να δειχθεί ότι:

$$D_1 \cap D_2 = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D_1 \cap D_2} D_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) Χρησιμοποιώντας το (ii) και την Πρόταση 2.2.8, να αποδειχθεί ότι η συλλογή όλων των ανοιχτών δίσκων στο $\mathbb{R}^2$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}^2$.

3. Έστω $\mathcal{B}$ η συλλογή όλων των διαστημάτων (a, b) στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$ και a, b ρητοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο $\mathbb{R}$. [Να συγκριθεί αυτή η πρόταση με την Πρόταση 2.2.1 και το Παράδειγμα 2.2.3, όπου a και b δεν είναι κατ΄ ανάγκη ρητοί αριθμοί.]

   [Βοήθημα: Δεν συνιστάται η χρήση της Πρότασης 2.2.8, διότι θα βοηθούσε μόνο στο να δειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για <u>κάποια</u> τοπολογία και όχι κατ΄ ανάγκη για την Ευκλείδεια Τοπολογία.]

4. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέμε ότι ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας ή απλά είναι C2, εάν υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ για την τοπολογία $\mathcal{T}$, τέτοια ώστε η $\mathcal{B}$ να αποτελεί ένα αριθμήσιμο σύνολο.

   (i) Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3 παραπάνω, να δείξετε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας.

   (ii) Να αποδειχθεί ότι η διακριτική τοπολογία, ενός μη αριθμήσιμου συνόλου, δεν ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας. [Βοήθημα: <u>Δεν</u> είναι αρκετό να δείξετε ότι μια συγκεκριμένη βάση είναι αριθμήσιμη. Πρέπει να αποδείξετε ότι $\boxed{\text{κάθε}}$ βάση της τοπολογίας αυτής είναι αριθμήσιμη.]

   (iii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της διαχωρησιμότητας, για κάθε ακέραιο αριθμό n.

(iv) Έστω $(X, \mathcal{T})$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία. Ικανοποιεί ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ το δεύτερο αξίωμα της διαχωρησιμότητας·

5. Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις:

(i) Έστω m και c πραγματικοί αριθμοί, όπου $m \neq 0$. Τότε η ευθεία $L = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$ θα είναι ένα κλειστό υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}^2$.

(ii) Έστω $\mathbb{S}^1$ ο μοναδιαίος κύκλος, που ορίζεται ως γνωστόν ως εξής: $\mathbb{S}^1 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Τότε, το σύνολο $\mathbb{S}^1$ θα είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(iii) Έστω $\mathbb{S}^n$ η μοναδιαία n-σφαίρα, που ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Τότε, το σύνολο $\mathbb{S}^n$ θα είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iv) Έστω B^n η κλειστή μοναδιαία n-μπάλα, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Τότε, η B^n θα είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

(v) Η καμπύλη $C = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

6. Έστω $\mathcal{B}_1$ μια βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}_1$ σε ένα σύνολο X και $\mathcal{B}_2$ μια βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}_2$ σε ένα σύνολο Y. Το σύνολο $X \times Y$ αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\langle x, y\rangle$, $x \in X$ και $y \in Y$. Έστω $\mathcal{B}$ η συλλογή των υποσυνόλων του συνόλου $X \times Y$, που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $B_1 \times B_2$, όπου $B_1 \in \mathcal{B}_1$ και $B_2 \in \mathcal{B}_2$. Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο $X \times Y$. (Η τοπολογία αυτή ονομάζεται Τοπολογία Γινόμενο στο $X \times Y$).

[Βοήθημα: Παράδειγμα 2.2.9.]

7. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3 παραπάνω και τις Ασκήσεις 2.1 #8, να αποδείξτε ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι F_σ-σύνολο και G_δ-σύνολο.

2.3 Βάση για Μία Δεδομένη Τοπολογία

Η Πρόταση 2.2.8 μας υπέδειξε τις συνθήκες με τις οποίες μια συλλογή $\mathcal{B}$, υποσυνόλων ενός συνόλου X, μπορεί να θεωρηθεί βάση μίας τοπολογίας στο X. Κάποιες φορές ωστόσο μας δίδεται μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στο X, και θέλουμε να γνωρίζουμε εάν η $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για την συγκεκριμένη τοπολογία $\mathcal{T}$. Για να επαληθεύσουμε ότι η $\mathcal{B}$ αποτελεί όντως βάση για την $\mathcal{T}$, θα μπορούσαμε απλά να εφαρμόσουμε τον Ορισμό 2.2.2, και να δείξουμε ότι κάθε μέλος της $\mathcal{T}$ είναι η ένωση μελών της $\mathcal{B}$. Παρόλα αυτά, η Πρόταση 2.3.2 μας προτείνει μια εναλλακτική μέθοδο.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα, το οποίο μας φανερώνει ότι υπάρχει μια διαφορά μεταξύ της πρότασης 'μια συλλογή $\mathcal{B}$ συνόλων του X είναι βάση για κάποια τοπολογία' και της πρότασης '...είναι βάση για μια δεδομένη τοπολογία'.

2.3.1 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{B}$ η συλλογή όλων των ημι-ανοιχτών διαστημάτων της μορφής $(a, b]$, $a < b$, όπου $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$. Τότε, η συλλογή $\mathcal{B}$ θα αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, επειδή το $\mathbb{R}$ είναι η ένωση όλων των μελών της $\mathcal{B}$ και η τομή κάθε δύο ημι-ανοιχτών διαστημάτων είναι ένα ημι-ανοιχτό διάστημα.

Παρόλα αυτά, η τοπολογία $\mathcal{T}_1$, η οποία έχει την $\mathcal{B}$ σαν βάση, δεν είναι η Ευκλείδεια Τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Αυτό μπορούμε να το εξάγουμε εάν παρατηρήσουμε ότι το διάστημα $(a, b]$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathcal{T}_1$, ενώ το διάστημα $(a, b]$ δεν αποτελεί ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ ως προς την Ευκλείδεια Τοπολογία. (Παραπέμπουμε στις Ασκήσεις 2.1 #1.) Έτσι, η συλλογή $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία, αλλά όχι βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$. $\square$

2.3.2 Πρόταση. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$, ανοιχτών υποσυνόλων του X, αποτελεί βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, εάν και μόνον αν για κάθε στοιχείο x, το οποίο ανήκει σε ένα ανοιχτό σύνολο U, υπάρχει σύνολο $B \in \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$.

Απόδειξη.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι:
(i) εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ και $x \in U \in \mathcal{T}$, τότε θα υπάρχει σύνολο $B \in \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$

<u>και</u>

(ii) εάν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ και $x \in U$ υπάρχει ένα σύνολο $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$, τότε $\mathcal{B}$ θα είναι μια βάση για την $\mathcal{T}$.

Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ και $x \in U \in \mathcal{T}$. Εφόσον η $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση της $\mathcal{T}$, το ανοιχτό σύνολο U θα είναι ένωση των στοιχείων της $\mathcal{B}$, δηλαδή $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, όπου $B_j \in \mathcal{B}$, για κάθε στοιχείο j κάποιου συνόλου δεικτών J. Όμως, το γεγονός ότι $x \in U$ συνεπάγεται και ότι $x \in B_j$, για κάποιο $j \in J$. Έτσι, $x \in B_j \subseteq U$, όπως εζητείτο.

Αντιστρόφως, έστω για κάθε $U \in \mathcal{T}$ και για κάθε $x \in U$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση μελών της $\mathcal{B}$. Έστω λοιπόν V ένα ανοιχτό σύνολο. Τότε, για κάθε $x \in V$, θα υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq V$. Είναι προφανές ότι $V = \bigcup_{x \in V} B_x$. (Άσκηση για τον αναγνώστη!). Άρα, το σύνολο V θα είναι ένωση μελών της $\mathcal{B}$. □

2.3.3 Πρόταση. Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, σε ένα σύνολο X. Τότε, το υποσύνολο U του X είναι ανοιχτό, εάν και μόνον αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει ένα σύνολο $B \in \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$.

Απόδειξη. Έστω U ένα υποσύνολο του X. Θεωρούμε ότι για κάθε $x \in U$, θα υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq U$. Προφανώς, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Άρα, το σύνολο U θα είναι ένωση ανοιχτών συνόλων, οπότε θα είναι και αυτό ανοιχτό, όπως εζητείτο. Η αντίστροφη πρόταση έπεται από την Πρόταση 2.3.2. $\square$

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα μιας βάσης, την οποία περιγράψαμε στην Πρόταση 2.3.3, είναι ακριβώς η ίδια που χρησιμοποιήσαμε για να ορίσουμε την ευκλείδια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$. Όπως είδαμε, ένα υποσύνολο U, του $\mathbb{R}$, είναι ανοιχτό, εάν και μόνον αν για κάθε $x \in U$, υπάρχουν a και b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, τέτοια ώστε $x \in (a, b) \subseteq U$.

Προσοχή. Ο αναγνώστης θα πρέπει να σιγουρευτεί ότι μπορεί να διακρίνει την διαφορά της Πρότασης 2.2.8, από την Πρόταση 2.3.2. Η Πρόταση 2.2.8 μας εφοδιάζει με κατάλληλες συνθήκες, έτσι ώστε μια οικογένεια $\mathcal{B}$, υποσυνόλων ενός συνόλου X, να αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στο σύνολο X. Από την άλλη, η Πρόταση 2.3.2 μας δίνει συνθήκες, ώστε μια οικογένεια $\mathcal{B}$, υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, να είναι βάση μιας δεδομένης τοπολογίας, $\mathcal{T}$.

Έχουμε δει ότι σε μια τοπολογία μπορούν να αντιστοιχούν πολλές διαφορετικές βάσεις. Η πρόταση που ακολουθεί μας δείχνει ότι δύο βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$, σε ένα σύνολο X, ορίζουν την ίδια τοπολογία.

2.3.4 Πρόταση. Έστω $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ βάσεις για δύο τοπολογίες $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$, αντιστοίχως, σε ένα μη κενό σύνολο X. Τότε, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ εάν και μόνον αν

(i) για κάθε $B \in \mathcal{B}_1$ και για κάθε $x \in B$, υπάρχει $B' \in \mathcal{B}_2$, έτσι ώστε $x \in B' \subseteq B$, και

(ii) για κάθε $B \in \mathcal{B}_2$ και για κάθε $x \in B$, υπάρχει $B' \in \mathcal{B}_1$, έτσι ώστε $x \in B' \subseteq B$.

Απόδειξη.

Πρέπει να δείξουμε ότι οι οικογένειες $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ είναι βάσεις για την ίδια τοπολογία, εάν και μόνον αν οι συνθήκες (i) και (ii) είναι αληθείς.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι οι οικογένειες αυτές είναι βάσεις για την ίδια τοπολογία, δηλαδή $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, και ότι οι συνθήκες (i) και (ii) ικανοποιούνται.

Έπειτα, υποθέτουμε ότι οι (i) και (ii) ικανοποιούνται και θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Πρώτα ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Τότε οι συνθήκες (i) και (ii) έπονται από την Πρόταση 2.3.2.

Αντίστροφα, έστω οι $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii). Από την Πρόταση 2.3.2, η (i) συνεπάγεται ότι κάθε σύνολο $B \in \mathcal{B}_1$ θα είναι ανοιχτό στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T}_2)$, δηλαδή $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Επειδή κάθε μέλος της τοπολογίας $\mathcal{T}_1$ είναι ένωση μελών της $\mathcal{T}_2$, συνάγουμε ότι $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Όμοια, η (ii) συνεπάγεται ότι $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Άρα, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, όπως εζητείτο. □

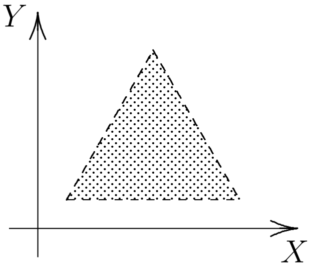
2.3.5 Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ όλων των ‘ανοιχτών ισόπλευρων τριγώνων’, με βάση παράλληλη στον άξονα-X, αποτελεί βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^2$. (Ως ‘ανοιχτό τρίγωνο’ εννοούμε το εμβαδόν ενός τριγώνου, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οι πλευρές.)

Περίγραμμα Απόδειξης. (Θα δώσουμε μια εικονική και όχι αναλυτική απόδειξη. Η πλήρης απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.)

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}$ αποτελεί μια βάση για την ευκλείδια τοπολογία.

Ως προς αυτό, θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.3.4, αφού όμως πρώτα αποδείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^2$.

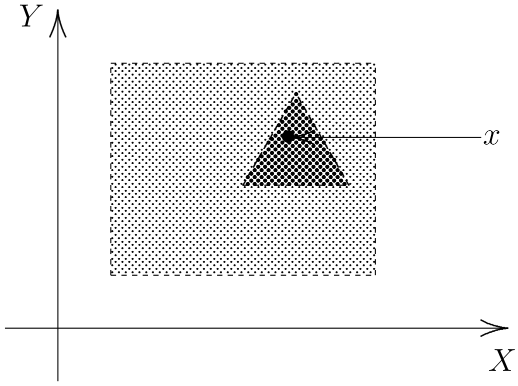
Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 2.2.8.



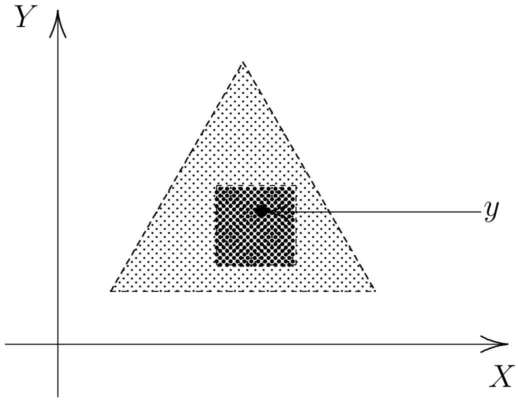
Το πρώτο που παρατηρούμε είναι ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία, επειδή ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 2.2.8. (Για να δούμε ότι η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί την Πρόταση 2.2.8, πρέπει να παρατηρήσουμε πρώτα ότι το $\mathbb{R}^2$ ισούται με την ένωση όλων των ανοιχτών ισόπλευρων τριγώνων, με βάση παράλληλη στον άξονα-X, κι επίσης η τομή κάθε δύο τέτοιων τριγώνων είναι και αυτή τέτοιο τρίγωνο.)

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι οι συνθήκες (i) και (ii), της Πρότασης 2.3.4, ικανοποιούνται.

Αρχικά επαληθεύουμε την συνθήκη (i). Έστω R ένα ανοιχτό ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες στους άξονες και έστω x ένα στοιχείο στο R. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό ισόπλευρο τρίγωνο T με βάση παράλληλη στον άξονα-X, έτσι ώστε $x \in T \subseteq R$. Είναι εύκολο κανείς να ζωγραφίσει την εικόνα στο χαρτί:



Τέλος, βλέπουμε εάν επαληθεύεται η συνθήκη (ii) της Πρότασης 2.3.4. Έστω λοιπόν T' ένα ανοιχτό ισόπλευρο τρίγωνο με βάση παράλληλη στον άξονα-X και έστω y ένα στοιχείο στο T'. Τότε, θα υπάρχει ένα ανοιχτό ορθογώνιο R', τέτοιο ώστε $y \in R' \subseteq T'$. Η εικόνα έχει ως εξής:



Οπότε, οι συνθήκες της Πρότασης 2.3.4 ικανοποιούνται. Έτσι, η συλλογή $\mathcal{B}$ είναι πράγματι μια βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^2$. $\square$

Στο Παράδειγμα 2.2.9 ορίσαμε μια βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία, ως μια συλλογή όλων των 'ανοιχτών ορθογωνίων' (με πλευρές παράλληλες στους άξονες). Το Παράδειγμα 2.3.5 μας δείχνει ότι τα 'ανοιχτά ορθογώνια' μπορούν να αντικατασταθούν από 'ανοιχτά ισόπλευρα τρίγωνα' (με βάση παράλληλη στον άξονα-X) χωρίς να αλλάξουμε την τοπολογία. Στις Ασκήσεις 2.3 #1 βλέπουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες, στις παρενθέσεις, μπορούν να παραλειφθούν, χωρίς να αλλάξει η τοπολογία. Επίσης, 'ανοιχτά ορθογώνια' μπορούν να αντικατασταθούν από 'ανοιχτούς δίσκους'[1].

Ασκήσεις 2.3

1. Να καθορίσετε εάν καθεμία από τις παρακάτω συλλογές αποτελεί (η όχι) βάση για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^2$:

   (i) η συλλογή όλων των 'ανοιχτών' τετραγώνων με πλευρές παράλληλες στους άξονες,

   (ii) η συλλογή όλων των 'ανοιχτών' δίσκων,

[1] Είναι γεγονός ότι τα περισσότερα βιβλία περιγράφουν την Ευκλείδεια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ μέσω ανοιχτών δίσκων.

(iii) η συλλογή όλων των 'ανοιχτών' τετραγώνων,

(iv) η συλλογή όλων των 'ανοιχτών' ορθογωνίων,

(v) η συλλογή όλων των 'ανοιχτών' τριγώνων.

2. (i) Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$ σε ένα μη κενό σύνολο X. Εάν $\mathcal{B}_1$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$, να αποδειχθεί ότι $\mathcal{B}_1$ είναι επίσης μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$.

   (ii) Να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας την (i), ότι υπάρχει μη αριθμήσιμος αριθμός βάσεων για την Ευκλείδεια Τοπολογία στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω $\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.3.1, η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ στο $\mathbb{R}$, και επιπρόσθετα $\mathcal{T}$ <u>δεν</u> είναι η Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι κάθε διάστημα της μορφής (a, b) είναι ανοιχτό στο $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

4.* Έστω $C[0, 1]$ το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$.

   (i) Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{M}$, όπου $\mathcal{M} = \{M(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1]$ και ε είναι θετικός πραγματικός αριθμός$\}$ και $M(f, \varepsilon) = \Big\{g : g \in C[0, 1]$ ανδ $\displaystyle\int_0^1 |f - g| < \varepsilon\Big\}$, είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_1$ στο $C[0, 1]$.

   (ii) Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{U}$, όπου $\mathcal{U} = \{U(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1]$ και ε είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός$\}$ και $U(f, \varepsilon) = \{g : g \in C[0, 1]$ και $\sup_{x \in [0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon\}$, είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_2$ ον $C[0, 1]$.

   (iii) Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

5. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Μία μη κενή συλλογή $\mathcal{S}$, ανοιχτών υποσυνόλων του X, λέγεται υπόβαση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, εάν η συλλογή όλων των πεπερασμένων τομών των μελών της $\mathcal{S}$ αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}$.

   (i) Να αποδειχθεί ότι η συλλογή όλων των ανοιχτών διαστημάτων της μορφής (a, ∞) ή $(-\infty, b)$ είναι μια υπόβαση για την ευκλείδια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$.

   (ii) Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ αποτελεί μια υπόβαση για την τοπολογία $\mathcal{T}_1$, του Παραδείγματος 1.1.2.

6. Έστω $\mathcal{S}$ μια υπόβαση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στο σύνολο $\mathbb{R}$. (Βλέπετε και Άσκηση 5, παραπάνω.) Εάν όλα τα κλειστά διαστήματα $[a, b]$, όπου $a < b$, εμπεριέχονται στην συλλογή $\mathcal{S}$, να αποδειχθεί ότι $\mathcal{T}$ είναι η Διακριτική Τοπολογία.

7. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{S}$ η συλλογή όλων των συνόλων $X \setminus \{x\}$, $x \in X$. Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{S}$ αποτελεί μια υπόβαση για την Πεπερασμένη-Κλειστή Τοπολογία στο X.

8. Έστω X ένα άπειρο σύνολο και $\mathcal{T}$ η Διακριτική Τοπολογία στο X. Να βρεθεί μια υπόβαση $\mathcal{S}$ για την $\mathcal{T}$, τέτοια ώστε η $\mathcal{S}$ να μην εμπεριέχει κάποιο μονοσύνολο.

9. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή των ευθειών στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Εάν $\mathcal{S}$ είναι μια υπόβαση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο σύνολο $\mathbb{R}^2$, να βρεθεί η μορφή της τοπολογίας $\mathcal{T}$.

10. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή όλων των ευθειών στο επίπεδο, οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα-X. Εάν $\mathcal{S}$ είναι μια υπόβαση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο $\mathbb{R}^2$, να περιγραφούν τα ανοιχτά σύνολα στο σύνολο $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

11. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή όλων των κύκλων στο επίπεδο. Εάν $\mathcal{S}$ είναι μια υπόβαση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο $\mathbb{R}^2$, να περιγραφούν τα ανοιχτά σύνολα στο σύνολο $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

12. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή όλων των κύκλων στο επίπεδο, με κέντρα στον άξονα-X. Εάν $\mathcal{S}$ είναι μια υπόβαση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο $\mathbb{R}^2$, να περιγραφούν τα ανοιχτά σύνολα στο $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

2.4 Υστερόγραφο

Στο Κεφάλαιο αυτό ορίσαμε έναν πολύ σημαντικό τοπολογικό χώρο – το σύνολο $\mathbb{R}$, δηλαδή το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια Τοπολογία. Παρατηρήσαμε ότι, σε αυτή την τοπολογία, τα ανοιχτά διαστήματα είναι ανοιχτά σύνολα (ενώ, από την άλλη, τα κλειστά διαστήματα είναι κλειστά σύνολα). Παρόλα αυτά, δεν είναι όλα τα ανοιχτά σύνολα ανοιχτά διαστήματα. Από την άλλη, κάθε ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων. Η τελευταία διαπίστωση μας οδήγησε στο να παρουσιάσουμε την έννοια της 'βάσης μιας τοπολογίας', κατοχυρώνοντας ότι η συλλογή όλων των ανοιχτών διαστημάτων αποτελεί μια βάση για την Ευκλείδεια τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 1, περιγράψαμε μια μαθηματική απόδειξη ως ένα καλά δομημένο επιχείρημα, και υπογραμμίσαμε την σημαντικότητα της εξάσκησης στην συγγραφή αποδείξεων. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε την απόδειξη μέσω της αντίφασης, στις Παρατηρήσεις 2.1.2 (v), μέθοδο την οποία συναντήσαμε και στο Παράδειγμα 2.2.7. Αποδείξαμε 'ικανές και αναγκαίες' συνθήκες, δηλαδή κατά το κοινώς λεγόμενο συνθήκες του τύπου 'εάν και μόνον αν', στην Πρόταση 2.2.1, και είδαμε περαιτέρω παραδείγματα στις Προτάσεις 2.2.8, 2.3.2, 2.3.3 και 2.3.4.

Το θέμα των βάσεων για μια τοπολογία είναι υψηλής σημασίας για το αντικείμενο. Είδαμε, για παράδειγμα, ότι η συλλογή όλων των μονοσυνόλων αποτελεί βάση για την Διακριτική Τοπολογία. Η Πρόταση 2.2.8 μας δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για μια συλλογή υποσυνόλων ενός συνόλου X να είναι βάση για <u>κάποια</u> τοπολογία στο X. Αυτό ήρθε σε έντονη αντίθεση με την Πρόταση 2.3.2, η οποία δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για μια συλλογή υποσυνόλων του X να είναι βάση για μια <u>δεδομένη</u> τοπολογία στο X. Επισημάνθηκε ότι δύο διαφορετικές συλλογές $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ δύνανται να είναι βάσεις για την ίδια τοπολογία. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για αυτό δίνονται από την Πρόταση 2.3.4.

Ορίσαμε την Ευκλείδεια Τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{R}^n$, όπου n ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Είδαμε ότι η οικογένεια όλων των ανοιχτών δίσκων αποτελεί βάση για το $\mathbb{R}^2$, όπως και η οικογένεια όλων των ανοιχτών τετραγώνων ή η οικογένεια όλων των ανοιχτών ορθογωνίων.

Οι ασκήσεις μας έφεραν σε μια πρώτη επαφή με τρείς σημαντικές ιδέες. Οι Ασκήσεις 2.1 $\#8$ κάλυψαν τις έννοιες F_σ-σύνολο και G_δ-σύνολο, που είναι σημαντικές στην θεωρία μέτρου. Οι Ασκήσεις 2.3 #4 μας παρουσίασαν τον χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων. Τέτοιοι χώροι καλούνται Συναρτησιακοί, οι οποίοι αποτελούν κεντρικό αντικείμενο στην μελέτη της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Η Συναρτησιακή Ανάλυση είναι ένα μείγμα (κλασσικής) Ανάλυσης και Τοπολογίας και, για κάποια περίοδο, ήταν γνωστή ως Μοντέρνα Ανάλυση. Σιμμονς [224]. Τέλος, οι Ασκήσεις 2.3 $\#5$–12 μας εισήγαγαν στην έννοια της υπόβασης.

Κεφάλαιο 3

Οριακά Σημεία

Εισαγωγή

Στην πραγματική ευθεία συναντούμε την έννοια της ‘εγγύτητας ’. Για παράδειγμα, κάθε σημείο στην ακολουθία $.1, .01, .001, .0001, .00001, \ldots$ είναι πιο κοντά στο 0, απ΄ ότι οποιοδήποτε προηγούμενό του. Πράγματι, κατά κάποιον τρόπο το 0 είναι ένα οριακό σημείο της ακολουθίας αυτής. Άρα, το διάστημα $(0, 1]$ δεν είναι κλειστό, λόγω του ότι δεν εμπεριέχει το οριακό σημείο 0. Γενικά, σε έναν γενικό τοπολογικό χώρο δεν έχουμε μια ‘συνάρτηση απόστασης ’, άρα πρέπει να προσεγγίσουμε την έννοια της εγγύτητας με διαφορετικό τρόπο. Πρέπει να ορίσουμε την έννοια του οριακού σημείου, χωρίς να αναφερθούμε σε αποστάσεις. Ακόμα και με τον νέο μας ορισμό, το σημείο 0 θα εξακολουθεί να είναι οριακό στο διάστημα $(0, 1]$. Η εισαγωγή της έννοιας αυτής θα μας οδηγήσει σε μια καλύτερη κατανόηση του όρου κλειστό σύνολο.

Μία ακόμη σημαντική τοπολογική έννοια, που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, είναι αυτή της συνεκτικότητας (την οποία συναντούμε ως συνάφεια, σε παλαιότερα κείμενα). ΄Εστω, για παράδειγμα, ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}$. Ενώ τα σύνολα $[0, 1] \cup [2, 3]$ και $[4, 6]$ θα μπορούσαν να περιγραφούν και τα δυο ως διαστήματα μήκους 2, είναι ξεκάθαρο ότι αποτελούν σύνολα διαφορετικού τύπου... το πρώτο σύνολο αποτελείται από δύο ξένα αναμεταξύ τους κομμάτια, ενώ το δεύτερο από ένα. Η διαφορά μεταξύ των δύο είναι ‘τοπολογική’, και θα την διερευνήσουμε μέσω της έννοιας της συνεκτικότητας.

3.1 Οριακά Σημεία και Περίβλημα

Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε είναι σύνηθες να αναφερόμαστε στα στοιχεία του συνόλου X ως σημεία.

3.1.1 Ορισμός. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται οριακό σημείο (ή σημείο συσσωρεύσεως του A, εάν κάθε ανοιχτό σύνολο U, το οποίο περιέχει το x, θα περιέχει και ένα σημείο του A διαφορετικό από το x.

3.1.2 Παράδειγμα. Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, όπου το σύνολο $X = \{a, b, c, d, e\}$, η τοπολογία $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ και $A = \{a, b, c\}$. Τότε, τα στοιχεία b, d και e θα είναι οριακά σημεία του A, ενώ από την άλλη το a και το c δεν είναι οριακά σημεία του A.

Απόδειξη.

Το σημείο a είναι οριακό σημείο του A, εάν και μόνον αν κάθε ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το a, θα περιέχει και ένα άλλο σημείο του A διαφορετικό του a.

Για να δείξουμε ότι το a $\boxed{\text{δεν}}$ είναι οριακό σημείο του A, είναι αρκετό να βρούμε έστω και ένα ανοιχτό σύνολο που να περιέχει το a, αλλά που να μην περιέχει άλλο σημείο του A.

Το σύνολο $\{a\}$ είναι ανοιχτό και δεν περιέχει άλλο σημείο του A. Άρα, το a δεν είναι οριακό σημείο του A.

Το σύνολο $\{c, d\}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το c, αλλά δεν περιέχει άλλο σημείο του A. Άρα, το c δεν είναι οριακό σημείο του A.

Για να αποδείξουμε ότι το b είναι ένα οριακό σημείο του A, πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ανοιχτό σύνολο που περιέχει το b, περιέχει επίσης και ένα σημείο του A, διαφορετικό από το b.

Η στρατηγική μας είναι να γράψουμε μια λίστα με $\boxed{\text{όλα}}$ τα ανοιχτά σύνολα που περιέχουν το b, και να επαληθεύσουμε ότι καθένα από αυτά περιέχει ένα σημείο του A διαφορετικό από το b.

Τα μοναδικά ανοιχτά σύνολα που περιέχουν το b είναι το X και το $\{b, c, d, e\}$, καθώς και τα δύο εμπεριέχουν ένα στοιχείο του A, το οποίο είναι το c. Άρα, το b είναι ένα οριακό σημείο του A.

Το σημείο d είναι ένα οριακό σημείο του A, ακόμα και αν δεν ανήκει στο A. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το d, θα περιέχει επίσης ένα σημείο του A. Κατά τόν ίδιο τρόπο, το σημείο e θα είναι ένα οριακό σημείο του A, παρά το γεγονός ότι δεν ανήκει στο A. □

3.1.3 Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας διακριτικός χώρος και A ένα υποσύνολο του X. Τότε, το A δεν θα έχει οριακά σημεία, διότι για κάθε $x \in X$, $\{x\}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο που δεν περιέχει σημείο του A διάφορο του x. □

3.1.4 Παράδειγμα. Έστω το υποσύνολο $A = [a, b)$, του $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο που ανήκει στο διάστημα $[a, b)$ είναι οριακό σημείο του A. Το σημείο b είναι επίσης ένα οριακό σημείο του A. □

3.1.5 Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας μη διακριτικός χώρος και έστω A ένα υποσύνολο του X, το οποίο αποτελείται από δύο τουλάχιστον στοιχεία. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε σημείο του X είναι ένα οριακό σημείο του A. (Παρατήρηση: Για ποιόν λόγο τονίζουμε ότι το A πρέπει να αποτελείται από τουλάχιστον δύο σημεία;) □

Η παρακάτω πρόταση μας παρουσιάζει έναν εύκολο τρόπο εντοπισμού εάν ένα σύνολο είναι κλειστό ή όχι.

3.1.6 Πρόταση. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Το σύνολο A είναι κλειστό στον $(X, \mathcal{T})$, εάν και μόνον αν το A περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.

Απόδειξη.

Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο A περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι:

(i) εάν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και

(ii) εάν το A περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, τότε είναι κλειστό σύνολο.

Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό στον $(X, \mathcal{T})$. $\boxed{\text{Έστω}}$ p ένα οριακό σημείο του A, το οποίο ανήκει στο $X \setminus A$. Τότε, το $X \setminus A$ θα είναι ένα ανοιχτό σύνολο, το οποίο περιέχει το οριακό σημείο p, του A. Άρα, το $X \setminus A$ περιέχει ένα στοιχείο του A. Αυτό είναι ξεκάθαρα λάθος, οπότε έχουμε μια αντίφαση στην υπόθεσή μας. Άρα, κάθε οριακό σημείο του A πρέπει να ανήκει στο A.

Αντίστροφα, έστω το A εμπεριέχει όλα τα οριακά του σημεία. Για κάθε $z \in X \setminus A$, η υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U_z \ni z$, τέτοιο ώστε $U_z \cap A = \emptyset$, δηλαδή $U_z \subseteq X \setminus A$. Άρα, $X \setminus A = \bigcup_{z \in X \setminus A} U_z$. (Άσκηση για τον αναγνώστη!). Έτσι, $X \setminus A$ είναι ένωση ανοιχτών συνόλων, οπότε είναι ανοιχτό σύνολο. Κατά συνέπεια, το συμπλήρωμα, A, θα είναι κλειστό. □

3.1.7 Παράδειγμα. Ως εφαρμογές της Πρότασης 3.1.6 έχουμε τα παρακάτω:

(i) Το σύνολο $[a, b)$ δεν είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$, επειδή το b είναι οριακό σημείο και $b \notin [a, b)$.

(ii) Το σύνολο $[a, b]$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$, επειδή όλα τα οριακά σημεία του $[a, b]$ (συγκεκριμένα όλα τα στοιχεία του $[a, b]$) ανήκουν στο διάστημα $[a, b]$.

(iii) Το διάστημα (a, b) δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επειδή δεν περιέχει το οριακό σημείο a.

(iv) Το $[a, \infty)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. □

3.1.8 Πρόταση. Έστω A ένα υποσύνολο τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ και A' το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A. Τότε, η ένωση $A \cup A'$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη. Έχοντας κατά νου την Πρόταση 3.1.6, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $A \cup A'$ περιέχει όλα τα οριακά $\boxed{\text{του}}$ σημεία ή, ισοδύναμα, κανένα από τα στοιχεία του $X \setminus (A \cup A')$ δεν είναι οριακό σημείο του $A \cup A'$.

Έστω $p \in X \setminus (A \cup A')$. Επειδή $p \notin A'$, θα υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U που περιέχει το p, όπου $U \cap A = \{p\}$ ή $\emptyset$. Ωστόσο, $p \notin A$, άρα και $U \cap A = \emptyset$. Ισχυριζόμαστε επίσης ότι $U \cap A' = \emptyset$. Διότι, εάν $x \in U$, τότε U θα είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $U \cap A = \emptyset$, $x \notin A'$. Έτσι, $U \cap A' = \emptyset$. Δηλαδή, $U \cap (A \cup A') = \emptyset$ και $p \in U$. Αυτό συνεπάγεται ότι το p δεν είναι οριακό σημείο του $A \cup A'$, οπότε το $A \cup A'$ θα είναι κλειστό σύνολο. □

3.1.9 Ορισμός. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Τότε το σύνολο $A \cup A'$, το οποίο αποτελείται από το A και από όλα τα οριακά του στοιχεία, λέγεται περίβλημα του A, και συμβολίζεται ως $\overline{A}$.

3.1.10 Παρατήρηση. Είναι ξεκάθαρο από την Πρόταση 3.1.8, ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο. Από την Πρόταση 3.1.6 και από τις Ασκήσεις 3.1 #5 (i) παίρνουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο, το οποίο περιέχει το A, πρέπει επίσης να περιέχει και το σύνολο A'. Άρα, $A \cup A' = \overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο $\overline{A}$ είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το A. □

3.1.11 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e\}$ και

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Να δειχθεί ότι $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$ και $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

Απόδειξη.

Για να βρεθεί το περίβλημα ενός συγκεκριμένου συνόλου, πρέπει να βρεθούν όλα τα κλειστά σύνολα που περιέχουν το σύνολο αυτό, και να επιλεγεί το μικρότερο. Άρα κι εμείς θα ξεκινήσουμε απαριθμώντας όλα τα κλειστά σύνολα – αυτά είναι απλά τα συμπληρώματα όλων των ανοιχτών συνόλων.

Τα κλειστά σύνολα είναι τα $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ και $\{a\}$. Άρα το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το $\{b\}$ είναι το $\{b, e\}$, δηλαδή $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. Ομοίως, $\overline{\{a, c\}} = X$ και $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. □

3.1.12 Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο του $\mathbb{R}$, το οποίο αποτελείται από όλους τους ρητούς αριθμούς. Να αποδειχθεί ότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Απόδειξη. $\boxed{\text{Έστω}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. Τότε, θα υπάρχει $x \in \mathbb{R} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$. Επειδή όμως το $\mathbb{R} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$, θα υπάρχουν a, b με $a < b$, τέτοια ώστε $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Όμως, σε κάθε διάστημα της μορφής (a, b) υπάρχει ένας ρητός αριθμός q, δηλαδή $q \in (a, b)$. Έτσι, $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, που συνεπάγεται ότι $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι μια αντίφαση, διότι $q \in \mathbb{Q}$. Άρα τελικά, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

3.1.13 Ορισμός. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Το A λέγεται πυκνό στο X ή παντού πυκνό στο X, εάν $\overline{A} = X$.

Τώρα είμαστε σε θέση να επαναδιατυπώσουμε το Παράδειγμα 3.1.12 ως εξής: Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Σημειώνουμε επίσης ότι στο Παράδειγμα 3.1.11, το σύνολο $\{a, c\}$ είναι πυκνό στο X.

3.1.14 Παράδειγμα. Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας διακριτικός τοπολογικός χώρος. Τότε, κάθε υποσύνολο του X θα είναι κλειστό (λόγω του ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό). Άρα, το μόνο κλειστό υποσύνολο του X είναι το ίδιο το X, διότι κάθε υποσύνολο του X ταυτίζεται με το περίβλημά του.

3.1.15 Πρόταση. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X,\mathcal{T})$. Τότε το A θα είναι πυκνό στο X, εάν και μόνον αν κάθε μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του X τέμνει το A μη τετριμμένα (δηλαδή, εάν $U\in\mathcal{T}$ και $U\neq\emptyset$ έχουμε ότι $A\cap U\neq\emptyset$.)

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο τέμνει το A μη τετριμμένα. Εάν $A=X$, τότε είναι ξεκάθαρο ότι το A είναι πυκνό στο X. Εάν $A\neq X$, έστω $x\in X\setminus A$. Εάν $U\in\mathcal{T}$ και $x\in U$, τότε $U\cap A\neq\emptyset$. Άρα το x είναι ένα οριακό σημείο του A. Εφόσον το x είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο $X\setminus A$, κάθε σημείο του $X\setminus A$ θα είναι ένα οριακό σημείο του A. Άρα, $A'\supseteq X\setminus A$ άρα, από τον Ορισμό 3.1.9, παίρνουμε ότι $\overline{A}=A'\cup A=X$, δηλαδή το A είναι πυκνό στο σύνολο X.

Αντιστρόφως, έστω A πυκνό στο X. Έστω U ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του X. $\boxed{\text{Υποθέτουμε}}$ ότι $U\cap A=\emptyset$. Τότε, εάν $x\in U$, $x\notin A$ και x <u>δεν</u> είναι οριακό σημείο του A, διότι το U είναι ανοιχτό σύνολο που περιέχει το x και δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Αυτή είναι μια αντίφαση, διότι εφόσον το A είναι πυκνό στο X, κάθε στοιχείο του $X\setminus A$ είναι οριακό σημείο του A. Άρα η υπόθεσή μας είναι λανθασμένη και $U\cap A\neq\emptyset$, όπως εζητείτο. □

Ασκήσεις 3.1

1. (α) Στο Παράδειγμα 1.1.2, να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία των ακόλουθων συνόλων:

   (i) $\{a\}$,
   (ii) $\{b,c\}$,
   (iii) $\{a,c,d\}$,

(iv) $\{b, d, e, f\}$.

(b) Να βρεθεί το περίβλημα όλων των παραπάνω συνόλων.

(c) Να βρεθούν τώρα τα περιβλήματα καθενός από τα παραπάνω σύνολα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Παραδείγματος 3.1.11.

2. Έστω $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ το σύνολο όλων των ακεραίων, εφοδιασμένο με την Πεπερασμένη-Κλειστή τοπολογία. Να βρεθούν τα οριακά σημεία των ακόλουθων συνόλων:

(i) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,

(ii) το σύνολο E, το οποίο αποτελείται από όλους τους άρτιους αριθμούς.

3. Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία του ανοιχτού διαστήματος (a, b) στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$.

4. (α) Ποιό είναι το περίβλημα, στο $\mathbb{R}$, καθενός από τα παρακάτω σύνολα;

(i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$,

(ii) το σύνολο $\mathbb{Z}$ όλων των ακεραίων,

(iii) το σύνολο $\mathbb{P}$ όλων των άρρητων αριθμών.

(β) Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $a \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $a \in \overline{S}$, εάν και μόνον αν για κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχει $x_n \in S$, τέτοιο ώστε $|x_n - a| < \frac{1}{n}$.

5. Έστω S και T μη κενά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, όπου $S \subseteq T$.

(i) Εάν p είναι οριακό σημείο του συνόλου S, να αποδειχθεί ότι το p είναι επίσης οριακό σημείο του συνόλου T.

(ii) Να αποδειχθεί, μέσω της (i), ότι $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι εάν S είναι πυκνό στο X, τότε το σύνολο T είναι πυκνό στο X.

(iv) Χρησιμοποιώντας την (iii) να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ αποτελείται από μια μη αριθμήσιμη συλλογή πυκνών υποσυνόλων.

[Βοήθημα: Η μη αριθμησιμότητα συνόλων συζητείται στο Παράρτημα 2.]

(v)* Ξανά, χρησιμοποιώντας την (iii), να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ αποτελείται από μια μη αριθμήσιμη συλλογή αριθμήσιμων πυκνών υποσυνόλων και $2^{\mathfrak{c}}$ μη αριθμήσιμων πυκνών υποσυνόλων.
[Βοήθημα: Σημειώνουμε ότι το $\mathfrak{c}$ συζητείται στο Παράρτημα 1.]

3.2 Περιοχές

3.2.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, N ένα υποσύνολο του X και p ένα σημείο του N. Το N λέγεται περιοχή του σημείου p, εάν υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U, τέτοιο ώστε $p \in U \subseteq N$.

3.2.2 Παράδειγμα. Το κλειστό διάστημα $[0,1]$, στο $\mathbb{R}$, είναι μια περιοχή για το σημείο $\frac{1}{2}$, επειδή $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0,1]$. □

3.2.3 Παράδειγμα. Το διάστημα $(0,1]$, του $\mathbb{R}$, είναι μια περιοχή για το σημείο $\frac{1}{4}$, επειδή $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0,1]$. Όμως, το διάστημα $(0,1]$ δεν αποτελεί περιοχή για το σημείο 1. (Άσκηση για τον αναγνώστη.) □

3.2.4 Παράδειγμα. Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $U \in \mathcal{T}$, τότε από τόν Ορισμό 3.2.1, έπεται ότι U είναι περιοχή κάθε σημείου στο $p \in U$. Άρα, για παράδειγμα, κάθε ανοιχτό διάστημα, (a,b), στο $\mathbb{R}$ αποτελεί περιοχή κάθε σημείου που περιλαμβάνει. □

3.2.5 Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω N μια περιοχή ενός σημείου p. Εάν S είναι ένα υποσύνολο του X, τέτοιο ώστε $N \subseteq S$, τότε το S είναι μια περιοχή του p. □

Η παρακάτω πρόταση μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, και η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

3.2.6 Πρόταση. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Ένα σημείο $x \in X$ αποτελεί οριακό σημείο του A, εάν και μόνον αν κάθε περιοχή του x εμπεριέχει ένα σημείο του A διαφορετικό από το x. $\square$

Επειδή ένα σύνολο είναι κλειστό, εάν και μόνον αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, εξάγουμε το παρακάτω συμπέρασμα.

3.2.7 Συμπέρασμα. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Τότε, το σύνολο A είναι κλειστό, εάν και μόνον αν για κάθε $x \in X \setminus A$, υπάρχει μια περιοχή N του x, τέτοια ώστε $N \subseteq X \setminus A$. $\square$

3.2.8 Συμπέρασμα. Έστω U ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Τότε, $U \in \mathcal{T}$, εάν και μόνον αν για κάθε $x \in U$, υπάρχει μια περιοχή N του x, τέτοια ώστε $N \subseteq U$. $\square$

Η επόμενη διαπίστωση έχει ήδη εξαχθεί από το Συμπέρασμα 3.2.8.

3.2.9 Συμπέρασμα. Έστω U ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Τότε, $U \in \mathcal{T}$, εάν και μόνον αν για κάθε $x \in U$, υπάρχει $V \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $x \in V \subseteq U$. $\square$

Το Συμπέρασμα 3.2.9 μας εφοδιάζει με ένα τεστ που μας δείχνει πότε ένα σύνολο είναι ανοιχτό και πότε όχι ανοιχτό.

Ασκήσεις 3.2

1. Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο A είναι πυκνό στο X, εάν και μόνον αν κάθε περιοχή σημείου του $X \setminus A$ τέμνει το A μη τετριμμένα.

2. (i) Έστω A και B υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί, με ιδιαίτερη επιμέλεια στην λεπτομέρεια, ότι

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(ii) Να κατασκευαστεί ένα παράδειγμα, όπου:

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

3. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Να αποδειχθεί ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι η πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία στο X, εάν και μόνον αν (i) $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1-χώρος και (ii) κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι πυκνό στο X.

4. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται διαχωρίσιμος, εάν περιέχει ένα πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο. Να καθοριστεί ποιοί από τους παρακάτω χώρους είναι διαχωρίσιμοι:

   (i) το σύνολο $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία,

   (ii) ένα αριθμήσιμο σύνολο με την διακριτική τοπολογία,

   (iii) ένα αριθμήσιμο σύνολο με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία,

   (iv) $(X, \mathcal{T})$ όπου το σύνολο X είναι πεπερασμένο,

   (v) $(X, \mathcal{T})$ όπου η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένη,

   (vi) ένα μη αριθμήσιμο σύνολο εφοδιασμένο με την διακριτική τοπολογία,

   (vii) ένα μη αριθμήσιμο σύνολο με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία,

   (viii) ένας χώρος $(X, \mathcal{T})$ που ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας.

5. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και A ένα υποσύνολο του X. Το μεγαλύτερο ανοιχτό σύνολο που εμπεριέχεται στο A καλείται εσωτερικό του A, και συμβολίζεται ως $\mathrm{Int}(A)$. [Το εσωτερικό ενός συνόλου είναι δηλαδή η ένωση όλων των ανοιχτών συνόλων στο X, τα οποία εμπεριέχονται στο A.]

   (i) Να αποδειχθεί ότι στο σύνολο $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}([0,1]) = (0,1)$.

   (ii) Να αποδειχθεί ότι στο σύνολο $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}((3,4)) = (3,4)$.

   (iii) Να αποδειχθεί ότι εάν το A είναι ανοιχτό στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, τότε $\mathrm{Int}(A) = A$.

(iv) Να αποδειχθεί ότι στο σύνολο $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(\{3\}) = \emptyset$.

(v) Να αποδειχθεί ότι εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας μη διακριτικός χώρος, τότε για κάθε υποσύνολο A του X, πλην του X, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

(vi) Να αποδειχθεί ότι για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο A, του $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

6. Να αποδειχθεί ότι εάν A είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, τότε $\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. (Βλέπετε Άσκηση 5 παραπάνω, για τον ορισμό του Int.)

7. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 6 παραπάνω, αποδείξτε ότι το A είναι πυκνό στον χώρο $(X, \mathcal{T})$, εάν και μόνον αν $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \emptyset$.

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Int, στην Άσκηση 5 παραπάνω, να καθοριστεί ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς, για αυθαίρετα επιλεγμένα υποσύνολα A_1 και A_2, ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$:

(i) $\mathrm{Int}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \cap \mathrm{Int}(A_2)$,

(ii) $\mathrm{Int}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \cup \mathrm{Int}(A_2)$,

(iii) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

(Εάν απαντήστε ότι η πρόταση είναι 'αληθής', να παραθέσετε μια απόδειξη. Εάν, από την άλλη, η απάντηση είναι 'ψευδής', να δοθεί ένα παράδειγμα.)

9.* Έστω S ένα πυκνό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U, του X, $\overline{S \cap U} = \overline{U}$.

10. Έστω S και T πυκνά υποσύνολα ενός χώρου $(X, \mathcal{T})$. Εάν το T είναι επίσης ανοιχτό, να δειχθεί με την βοήθεια της Άσκησης 9 παραπάνω, ότι η τομή $S \cap T$ είναι πυκνό σύνολο στο X.

11. Έστω $\mathcal{B} = \{[a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$. Να αποδειχθεί η καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

(i) Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_1$ στο $\mathbb{R}$. (Ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ καλείται Sorgenfrey ευθεία.)

(ii) Εάν $\mathcal{T}$ είναι η Ευκλείδεια Τοπολογία στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$.

(iii) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, όπου $a < b$, $[a, b)$ είναι ένα κλειστάνοιχτο σύνολο στο $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$.

(iv) Η Sorgenfrey ευθεία είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος.

(v)* Η Sorgenfrey ευθεία δεν ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της διαχωρισιμότητας.

3.3 Συνεκτικότητα

3.3.1 Παρατήρηση. Σε αυτό το σημείο θα καταγράψουμε κάποιους ορισμούς και δεδομένα με τα οποία ο αναγνώστης θα πρέπει ήδη να έχει έρθει σε μια πρώτη επαφή. Έστω S ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Εάν υπάρχει ένα στοιχείο b, στο S, τέτοιο ώστε $x \leq b$, για κάθε $x \in S$, τότε το b λέγεται το μεγαλύτερο στοιχείο του S. Ομοίως, εάν το S περιέχει ένα στοιχείο a τέτοιο ώστε $a \leq x$, για κάθε $x \in S$, τότε το a καλείται το ελάχιστο στοιχείο του S. Ένα σύνολο S, πραγματικών αριθμών, λέγεται άνω φραγμένο εάν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c, τέτοιος ώστε $x \leq c$, για κάθε $x \in S$, και το c καλείται άνω φράγμα για το S. Όμοια ορίζονται και οι όροι 'κάτω φραγμένο' και 'κάτω φράγμα'. Ένα σύνολο το οποίο είναι άνω και κάτω φραγμένο λέγεται φραγμένο. □

Το Αξίωμα του Ελαχίστου Άνω Φράγματος: Έστω S ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών. Εάν το S είναι άνω φραγμένο, τότε έχει ένα τουλάχιστον άνω φράγμα. □

Το ελάχιστο άνω φράγμα καλείται επίσης και supremum του S, και συμβολίζεται $\sup(S)$. Σημειώνουμε δε ότι δύναται να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο S. Πράγματι, το supremum του S είναι ένα στοιχείο του S, εάν και μόνον αν το S έχει μέγιστο στοιχείο. Για παράδειγμα, το supremum του ανοιχτού διαστήματος $S = (1, 2)$ είναι το 2, όμως $2 \notin (1, 2)$, ενώ το supremum του $[3, 4]$ ανήκει στο 4, το οποίο ανήκει στο $[3, 4]$, ενώ το 4 είναι το μέγιστο στοιχείο του $[3, 4]$. Κάθε σύνολο S πραγματικών αριθμών, το οποίο δεν είναι κάτω φραγμένο, έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα, το οποίο καλείται infimum και συμβολίζεται με $\inf(S)$.

3.3.2 Λήμμα. Έστω S ένα υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$, το οποίο είναι άνω φραγμένο, και έστω p το supremum του S. Εάν S είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $p \in S$.

Απόδειξη. $\boxed{\text{Έστω}}$ $p \in \mathbb{R} \setminus S$. Εφόσον το σύνολο $\mathbb{R} \setminus S$ είναι ανοιχτό, θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a και b, όπου $a < b$, τέτοιοι ώστε $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Εφόσον το p είναι το $\boxed{\text{ελάχιστο}}$ άνω φράγμα για το S και $a < p$, είναι ξεκάθαρο ότι θα υπάρχει $x \in S$, τέτοιο ώστε $a < x$. Επίσης, $x < p < b$, οπότε και $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Όμως αυτό αποτελεί μια αντίφαση, διότι $x \in S$. Άρα η υπόθεσή μας είναι ψευδής, οπότε και $p \in S$. $\square$

3.3.3 Πρόταση. Έστω T ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, είτε $T = \mathbb{R}$ είτε $T = \emptyset$.

Απόδειξη. $\boxed{\text{Υποθέτουμε}}$ $T \neq \mathbb{R}$ και $T \neq \emptyset$. Τότε, θα υπάρχει ένα στοιχείο $x \in T$ και ένα στοιχείο $z \in \mathbb{R} \setminus T$. Χωρίς απώλεια της γενίκευσης, υποθέτουμε ότι $x < z$. Έστω $S = T \cap [x, z]$. Τότε, S, όντας η τομή δύο κλειστών συνόλων, θα είναι κλειστό σύνολο. Θα είναι όμως και άνω φραγμένο, διότι το z είναι προφανώς άνω φράγμα.

Έστω p το supremum του S. Από το Λήμμα 3.3.2, έχουμε ότι $p \in S$. Επειδή $p \in [x, z]$, $p \leq z$. Εφόσον $z \in \mathbb{R} \setminus S$, $p \neq z$ οπότε και $p < z$.

Τώρα, T είναι επίσης ανοιχτό σύνολο καθώς και $p \in T$. Άρα, θα υπάρχουν a και b στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$, έτσι ώστε $p \in (a, b) \subseteq T$. Έστω t τέτοιο ώστε $p < t < \min(b, z)$, όπου $\min(b, z)$ συμβολίζει τον μικρότερο αριθμό μεταξύ των b και z. Έτσι, $t \in T$ και $t \in [p, z]$. Άρα, $t \in T \cap [x, z] = S$. Αυτό όμως αποτελεί αντίφαση, διότι $t > p$ και p είναι το supremum του S. Άρα η υπόθεσή μας είναι λανθασμένη, οπότε θα έχουμε $T = \mathbb{R}$ ή $T = \emptyset$. $\square$

3.3.4 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Θα λέμε ότι ο τοπολογικός χώρος αυτός είναι συνεκτικός, εάν τα μόνα κλειστάνοιχτα υποσύνολα του X είναι το X και το $\emptyset$.

Επαναδιατυπώνοντας την Πρόταση 3.3.3, εξάγουμε την παρακάτω πρόταση:

3.3.5 Πρόταση. Ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός. $\square$

3.3.6 Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας μη διακριτικός χώρος, ο οποίος αποτελείται από περισσότερα του ενός στοιχεία. Τότε θα έχουμε ότι ο $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι συνεκτικός χώρος, διότι κάθε μονοσύνολό του θα είναι κλειστάνοιχτο. $\square$

3.3.7 Παράδειγμα. Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας μη διακριτικός χώρος, τότε θα είναι και συνεκτικός, διότι τα μοναδικά του κλειστάνοιχτα σύνολα θα είναι το X και το $\emptyset$. (Πράγματι, τα μόνα ανοιχτά σύνολα θα είναι το X και το $\emptyset$.) $\square$

3.3.8 Παράδειγμα. Εάν $X = \{a, b, c, d, e\}$ και

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

τότε ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ δεν θα είναι συνεκτικός, διότι το σύνολο $\{b, c, d, e\}$ είναι ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο. $\square$

3.3.9 Παρατήρηση. Από τον Ορισμό 3.3.4 έπεται ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι συνεκτικός (δηλαδή, είναι μη συνεκτικός), εάν και μόνον αν υπάρχουν μη κενά ανοιχτά σύνολα A και B, τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$.[1] (Βλέπετε Ασκήσεις 3.3 #3.)

[1] Τα περισσότερα συγγράμματα χρησιμοποιούν αυτή την ιδιότητα για να ορίσουν την συνεκτικότητα.

Ένα από τα βασικά συμπεράσματα αυτού του Κεφαλαίου είναι η καταγραφή ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ (και πράγματι, $\mathbb{R}^n$, για κάθε $n \geq 1$) είναι ένας συνεκτικός χώρος. Όμως η απόδειξη θα μετατεθεί στο Κεφάλαιο 5.

Η συνεκτικότητα αποτελεί μια πολύ σημαντική τοπολογική ιδιότητα και η συζήτηση δεν θα περιοριστεί εδώ.

Ασκήσεις 3.3

1. Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών και $T = \{x : -x \in S\}$.

   (α) Να αποδειχθεί ότι ο πραγματικός αριθμός a είναι το infimum του S, εάν και μόνον αν $-a$ είναι το supremum του T.

   (β) Χρησιμοποιώντας το (α) και το Αξίωμα του Ελαχίστου Άνω Φράγματος, να αποδειχθεί ότι κάθε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, το οποίο είναι κάτω φραγμένο, έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα.

2. Για κάθε ένα από τα παρακάτω σύνολα πραγματικών αριθμών, να βρεθεί το μεγαλύτερο στοιχείο και το ελάχιστο άνω φράγμα, εάν υπάρχει.

   (i) $S = \mathbb{R}$.

   (ii) $S = \mathbb{Z} =$ το σύνολο όλων των ακεραίων.

   (iii) $S = [9, 10)$.

   (iv) $S =$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών της μορφής $1 - \frac{3}{n^2}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

   (v) $S = (-\infty, 3]$.

3. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Να αποδειχθεί ότι $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι συνεκτικός, εάν και μόνον αν περιέχει (αυστηρά) μη κενά και ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα A και B, τέτοια ώστε $A \cup B = X$.

4. Είναι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$, του Παραδείγματος 1.1.2, συνεκτικός;

5. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας χώρος εφοδιασμένη με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία. Είναι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ συνεκτικός;

6. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένα άπειρο σύνολο με την αριθμήσιμη-κλειστή τοπολογία. Είναι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ συνεκτικός;

7. Ποιός από τους τοπολογικούς χώρους των Ασκήσεων 1.1 #9 είναι συνεκτικός;

3.4 Υστερόγραφο

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε τον όρο ‘οριακό σημείο’, και δείξαμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό, εάν και μόνον αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Η Πρόταση 3.1.8 μας λέει ότι σε κάθε σύνολο A αντιστοιχεί ένα ελάχιστο κλειστό σύνολο $\overline{A}$, το οποίο το περιέχει. Το σύνολο $\overline{A}$ καλείται περίβλημα του A.

Ένα υποσύνολο A, ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, λέγεται πυκνό στο X, εάν $\overline{A} = X$. Είδαμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο $\mathbb{P}$, όλων των άρρητων αριθμών, είναι επίσης πυκνό στο $\mathbb{R}$. Παρουσιάσαμε την έννοια της περιοχής σημείου και επίσης την έννοια της συνεκτικότητας ενός τοπολογικού χώρου. Αποδείξαμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα, ήτοι ότι το $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό. Θα προσθέσουμε και άλλα πάνω στην έννοια της συνεκτικότητας σε επόμενα κεφάλαια.

Στις ασκήσεις παρουσιάσαμε την έννοια του εσωτερικού ενός συνόλου, μια έννοια συμπληρωματική αυτής του περιβλήματος ενός συνόλου.

Κεφάλαιο 4

Ομοιομορφισμοί

Εισαγωγή

Σε κάθε τομέα των μαθηματικών είναι σημαντικό να διακρίνονται οι δομές που διέπονται από μια ισοδυναμία. Για παράδειγμα, δύο σύνολα λέγονται ισοδύναμα στην Θεωρία Συνόλων, εάν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί συνάρτηση, η οποία απεικονίζει το ένα σύνολο στο άλλο. Δύο ομάδες λέγονται ισοδύναμες (ή ισόμορφες), στην Θεωρία Ομάδων, εάν υπάρχει ομομορφισμός ο οποίος είναι επίσης μία ένα προς ένα και επί συνάρτηση, η οποία απεικονίζει την μια ομάδα στην άλλη. Δύο τοπολογικοί χώροι λέγονται ισοδύναμοι, εάν είναι ομοιομορφικοί, δηλαδή εάν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός από τον ένα χώρο στον άλλο.

4.1 Υπόχωροι

4.1.1 Ορισμός. Έστω Y ένα μη κενό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Η συλλογή $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$, υποσυνόλων του Y, είναι μια τοπολογία στο Y, και καλείται τοπολογία του υποχώρου (ή επαγώμενη τοπολογία). Ο τοπολογικός χώρος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ λέγεται υπόχωρος του χώρου $(X, \mathcal{T})$.

Φυσικά ο αναγνώστης θα πρέπει να επαληθεύσει ότι το σύνολο $\mathcal{T}_Y$ αποτελεί πράγματι μια τοπολογία στο Y.

4.1.2 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

και $Y = \{b, c, e\}$. Τότε, η επαγώμενη τοπολογία στο Y θα είναι η εξής:

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}.$$ □

4.1.3 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

και $Y = \{a, d, e\}$. Τότε, η επαγώμενη τοπολογία στο Y θα είναι η:

$$\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}.$$ □

4.1.4 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στο X, και έστω Y ένα υποσύνολο του X. Τότε δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η συλλογή $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ αποτελεί μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_Y$, στο Y. [Άσκηση για τον αναγνώστη: να δοθεί η απόδειξη.]

Θα θεωρήσουμε τώρα το υποσύνολο $(1, 2)$, του συνόλου $\mathbb{R}$. Μια βάση για την επαγώμενη τοπολογία στο $(1, 2)$ θα είναι η συλλογή $\{(a, b) \cap (1, 2) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Με άλλα λόγια, η συλλογή $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ 1 \leq a < b \leq 2\}$ αποτελεί βάση για την επαγώμενη τοπολογία στο $(1, 2)$. □

4.1.5 Παράδειγμα. Έστω το υποσύνολο $[1, 2]$ του $\mathbb{R}$. Μια βάση για την επαγώμενη τοπολογία $\mathcal{T}$, στο $[1, 2]$, είναι η εξής:

$$\{(a, b) \cap [1, 2] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\},$$

δηλαδή η συλλογή:

$$\{(a, b) : 1 \leq a < b \leq 2\} \cup \{[1, b) : 1 < b \leq 2\} \cup \{(a, 2] : 1 \leq a < 2\} \cup \{[1, 2]\}$$

αποτελεί μια βάση για την $\mathcal{T}$.

Εδώ θα πρέπει να υπογραμμίσουμε κάτι το αξιοσημείωτο. Βλέπουμε, για παράδειγμα, ότι το σύνολο $[1, 1\frac{1}{2})$ δεν είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$, ενώ το σύνολο $[1, 1\frac{1}{2}) = (0, 1\frac{1}{2}) \cap [1, 2]$, είναι ανοιχτό στον υπόχωρο $[1, 2]$.

Επίσης, το $(1, 2]$ δεν είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$, ενώ είναι ανοιχτό στο $[1, 2]$. Επιπρόσθετα, το $[1, 2]$ δεν είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$, όμως είναι ανοιχτό στο $[1, 2]$.

Άρα, οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε ένα ανοιχτό σύνολο, θα πρέπει να ξεκαθαρίζουμε σε ποιόν χώρο ή με ποιά τοπολογία είναι ανοιχτό. $\square$

Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{Z}$ το υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$, το οποίο αποτελείτα από όλους τους ακεραίους αριθμούς. Να αποδειχθεί ότι η επαγώμενη τοπολογία στο $\mathbb{Z}$, από την Ευκλείδεια Τοπολογία στο$\mathbb{R}$, είναι η διακριτική τοπολογία.

Απόδειξη.

Για να αποδείξουμε ότι η επαγώμενη τοπολογία $\tau_{\mathbb{Z}}$, στο σύνολο $\mathbb{Z}$, είναι η διακριτική, αρκεί, από την Πρόταση 1.1.9, να δεχθεί ότι κάθε μονοσύνολο του συνόλου $\mathbb{Z}$ είναι ανοιχτό στην $\tau_{\mathbb{Z}}$. Δηλαδή, εάν $n \in \mathbb{Z}$, τότε $\{n\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$.

Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Τότε, $\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{Z}$. Όμως $(n-1, n+1)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\{n\}$ θα είναι ανοιχτό στην επαγώμενη τοπολογία στο $\mathbb{Z}$. Άρα, κάθε μονοσύνολο στο $\mathbb{Z}$ θα είναι ανοιχτό στην επαγώμενη τοπολογία στο $\mathbb{Z}$, άρα και η επαγώμενη τοπολογία θα είναι η διακριτική. $\square$

Συμβολισμοί. Οποτεδήποτε αναφερόμαστε στα εξής σύνολα:

$\mathbb{Q} =$ στο σύνολο όλων των ρητών αριθμών,

$\mathbb{Z} =$ στο σύνολο όλων των ακεραίων,

$\mathbb{N} =$ στο σύνολο όλων των θετικών ακεραίων,

$\mathbb{P} =$ στο σύνολο όλων των άρρητων αριθμών,

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) ή $[a, \infty)$

αναφερόμενοι σε αυτά προσδιορίζοντάς τα σαν τοπολογικούς χώρους, χωρίς να αναφερόμαστε συγκεκριμένα στην τοπολογία τους, θα εννοούμε ότι η τοπολογία τους είναι η επαγώμενη από την φυσική τοπολογία στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. (Μερικές φορές φορές θα αναφερόμαστε στην επαγώμενη τοπολογία αυτών των συνόλων με τον προσδιορισμό 'φυσική τοπολογία'.)

Ασκήσεις 4.1

1. Έστω $X = \{a, b, c, d, e\}$ και $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$. Παραθέστε τα στοιχεία των επαγώμενων τοπολογιών $\mathcal{T}_Y$ στο σύνολο $Y = \{a, c, e\}$ και $\mathcal{T}_Z$ στο $Z = \{b, c, d, e\}$.

2. Να περιγραφεί η επαγώμενη τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{N}$, των θετικών ακεραίων, μέσω της Ευκλείδειας Τοπολογίας στο σύνολο $\mathbb{R}$.

3. Να γράψετε μια βάση για την συνήθη τοπολογία για τα ακόλουθα σύνολα:

   (i) $[a, b)$, όπου $a < b$,
   (ii) $(a, b]$, όπου $a < b$,
   (iii) $(-\infty, a]$,
   (iv) $(-\infty, a)$,
   (v) (a, ∞),
   (vi) $[a, \infty)$.

   [Βοήθημα: Συμβουλευτείτε τα παραδείγματα 4.1.4 και 4.1.5.]

4. Έστω $A \subseteq B \subseteq X$ και X ένας χώρος εφοδιασμένος με την τοπολογία $\mathcal{T}$. Έστω $\mathcal{T}_B$ η επαγώμενη τοπολογία στο B. Επιπλέον, έστω $\mathcal{T}_1$ η επαγώμενη τοπολογία στο A, από την $\mathcal{T}$, και $\mathcal{T}_2$ η επαγώμενη τοπολογία στο A, από την $\mathcal{T}_B$. Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. (Άρα, ένας υπόχωρος ενός υποχώρου είναι και ο ίδιος υπόχωρος του αρχικού χώρου.)

5. Έστω $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ένας υπόχωρος ενός χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί ότι ένα υποσύνολο Z του Y είναι κλειστό στον υπόχωρο $(Y, \mathcal{T}_Y)$, εάν και μόνον αν $Z = A \cap Y$, όπου A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $(X, \mathcal{T})$.

6. Να αποδειχθεί ότι κάθε υπόχωρος ενός διακριτικού χώρου είναι διακριτικός χώρος.

7. Να αποδειχθεί ότι κάθε υπόχωρος ενός μη διακριτικού χώρου είναι μη διακριτικός χώρος.

8. Να αποδειχθεί ότι ο υπόχωρος $[0,1] \cup [3,4]$, του $\mathbb{R}$, αποτελείται από τουλάχιστον 4 κλειστάνοιχτα υποσύνολα. Αφού απαντηθεί αυτό το ερώτημα, να βρεθεί πόσα είναι ακριβώς τα κλειστάνοιχτα σύνολα.

9. Αληθεύει ότι κάθε υπόχωρος ενός συνεκτικού χώρου είναι και αυτός συνεκτικός;

10. Έστω $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ένας υπόχωρος του τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$, εάν και μόνον αν $Y \in \mathcal{T}$.

    [Βοήθημα: Υπενθυμίζουμε ότι $Y \in \mathcal{T}_Y$.]

11. Έστω A και B συνεκτικά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Εάν $A \cap B \neq \emptyset$, να αποδειχθεί ότι ο υπόχωρος $A \cup B$ είναι συνεκτικός.

12. Έστω $(Y, \mathcal{T}_1)$ ένας υπόχωρος ενός T_1-χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι επίσης T_1.

13. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται Hausdorff (ή αλλιώς T_2-χώρος), εάν δεδομένου ενός ζεύγους διακεκριμένων σημείων a, b στο X, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U και V, έτσι ώστε $a \in U$, $b \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

    (i) Να αποδειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι Hausdorff.
    (ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε διακριτικός χώρος είναι Hausdorff.
    (iii) Να αποδειχθεί ότι κάθε T_2-χώρος είναι επίσης T_1-χώρος.
    (iv) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}$ με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία είναι T_1-χώρος, αλλά δεν είναι T_2-χώρος.
    (v) Να αποδειχθεί ότι κάθε υπόχωρος ενός T_2-χώρου είναι ένας T_2-χώρος.

14. Έστω $(Y, \mathcal{T}_1)$ ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Εάν ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας, να αποδειχθεί ότι ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_1)$ επίσης ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας.

15. Έστω a και b δύο στοιχεία του $\mathbb{R}$, με $a < b$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $[a, b]$ είναι συνεκτικό.

    [Βοήθημα: Στην διατύπωση και την απόδειξη της Πρότασης 3.3.3, να αντικατασταθεί το σύνολο $\mathbb{R}$ από το διάστημα $[a, b]$.]

16. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών με την συνήθη τοπολογία και έστω επίσης $\mathbb{P}$ το σύνολο όλων των άρρητων αριθμών, επίσης με την συνήθη τοπολογία.

    (i) Να αποδειχθεί ότι ούτε το σύνολο $\mathbb{Q}$, ούτε το $\mathbb{P}$, είναι διακριτικοί χώροι.

    (ii) Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}$ ή το σύνολο $\mathbb{P}$ συνεκτικός χώρος;

    (iii) Είναι το $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{P}$ Hausdorff χώρος;

    (iv) Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{P}$ εφοδιασμένο με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία;

17. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται regular, εάν για κάθε κλειστό υποσύνολο A, του X, και για κάθε στοιχείο $x \in X \setminus A$, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U και V, τέτοια ώστε $x \in U$, $A \subseteq V$, και $U \cap V = \emptyset$. Εάν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι regular και ταυτοχρόνως T_1, τότε ο χώρος αυτός λέγεται T_3-χώρος. Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις.

    (i) Κάθε υπόχωρος ενός regular χώρου είναι regular χώρος.

    (ii) Οι χώροι $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$ και $\mathbb{R}^2$ είναι regular χώροι.

    (iii) Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας regular T_1-χώρος, τότε είναι επίσης και T_2-χώρος.

    (iv) Η Sorgenfrey ευθεία είναι ένας regular χώρος.

    (v)* Έστω X το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών, και έστω $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}$ ως κλειστό, εάν $C = A \cup T$, όπου A είναι κλειστό στην Ευκλείδεια τοπολογία στο $\mathbb{R}$ και T ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του S. Τα συμπληρώματα αυτών των κλειστών συνόλων μας δίνουν μια τοπολογία $\mathcal{T}$, στον χώρο $\mathbb{R}$, η οποία τον κάνει Hausdorff αλλά όχι regular.

4.2 Ομοιομορφισμοί

Θα στραφούμε τώρα στην έννοια της ισοδυναμίας τοπολογικών χώρων. Θα ξεκινήσουμε με το παρακάτω παράδειγμα. Έστω:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

και

$$\mathcal{T}_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

Είναι ξεκάθαρο, εάν το δει κανείς από μια διαισθητική ματιά, ότι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι 'ισοδύναμοσ' του $(Y, \mathcal{T}_1)$. Η συνάρτηση $f\colon X \to Y$, η οποία ορίζεται ως $f(a) = g,\ f(b) = h,\ f(c) = i,\ f(d) = j$ και $f(e) = k$, μας δίνει αυτή την ισοδυναμία. Θα το παρουσιάσουμε τώρα αυτό με πιο αυστηρό τρόπο.

4.2.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ τοπολογικοί χώροι. Οι χώροι αυτοί λέγονται ομοιομορφικοί, εάν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ που να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) η f είναι 1-1 (δηλαδή, $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται ότι $x_1 = x_2$),

(ii) η f είναι επί (δηλαδή, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$),

(iii) για κάθε $U \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ και

(iv) για κάθε $V \in \mathcal{T}$, $f(V) \in \mathcal{T}_1$.

Επιπλέον, η απεικόνιση f λέγεται ομοιομορφισμός μεταξύ του χώρου $(X, \mathcal{T})$ και του χώρου $(Y, \mathcal{T}_1)$. Γράφουμε συμβολικά $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. $\square$

Θα δείξουμε ότι η σχέση '$\cong$' είναι μια σχέση ισοδυναμίας, και θα χρησιμοποιήσουμε αυτό για να αποδείξουμε ότι όλα τα ανοιχτά διαστήματα (a, b) είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους. Το Παράδειγμα 4.2.2 αποτελεί ένα πρώτο βήμα ως προς την απόδειξη, διότι μας δείχνει ότι η σχέση '$\cong$' είναι μεταβατική.

4.2.2 Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}_1)$ και $(Z, \mathcal{T}_2)$ τρείς τοπολογικοί χώροι. Εάν $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ και $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$, να αποδειχθεί ότι $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$.

Απόδειξη.

Μας δίνεται ότι $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$, δηλαδή, μας δίνεται ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. Μας δίνεται επίσης ότι $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$, δηλαδή υπάρχει ομοιομορφισμός $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$, δηλαδή, πρέπει να βρούμε έναν ομοιομορφισμό $h : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$. Θα αποδείξουμε ότι η σύνθετη απεικόνιση $g \circ f : X \to Z$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός.

Εφόσον είναι $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ και $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$, θα υπάρχουν ομοιομορφισμοί $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ και $g : (Y, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_2)$. Έστω η σύνθετη απεικόνιση $g \circ f : X \to Z$. [Οπότε, $g \circ f(x) = g(f(x))$, για κάθε $x \in X$.] Είναι σχετικά εύκολο (υπόθεση ρουτίνας) να αποδείξει κανείς ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι ένα-προς-ένα και επί. Τώρα, έστω $U \in \mathcal{T}_2$. Τότε, επειδή η g είναι ομοιομορφισμός, θα έχουμε ότι $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι ομοιομορφισμός, συνάγουμε ότι $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$. Όμως, $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Άρα, η συνάρτηση $g \circ f$ ικανοποιεί την ιδιότητα (iii), του Ορισμού 4.2.1. Τώρα, έστω $V \in \mathcal{T}$. Τότε, $f(V) \in \mathcal{T}_1$ και οπότε $g(f(V)) \in \mathcal{T}_2$. Δηλαδή, $g \circ f(V) \in \mathcal{T}_2$ και έτσι βλέπουμε ότι η $g \circ f$ ικανοποιεί την ιδιότητα (iv), του Ορισμού 4.2.1. Άρα, η $g \circ f$ είναι ένας ομοιομορφισμός. □

4.2.3 Παρατήρηση. Το Παράδειγμα 4.2.2 μας δείχνει ότι η σχέση '≅' είναι μια μεταβατική διμελής σχέση. Είναι εύκολο δε να αποδειχθεί ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή:

(i) $(X, \mathcal{T}) \cong (X, \mathcal{T})$ (Ανακλαστική)·

(ii) $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ συνεπάγεται $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T})$ (Συμμετρική)·

[Παρατηρούμε ότι εάν η συνάρτηση $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ είναι ομοιομορφισμός, τότε η αντίστροφή της
$f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T})$ θα είναι επίσης ομοιομορφισμός.]

(iii) $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ και $(Y, \mathcal{T}_1) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$ συνεπάγεται $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{T}_2)$ (Μεταβατική).

□

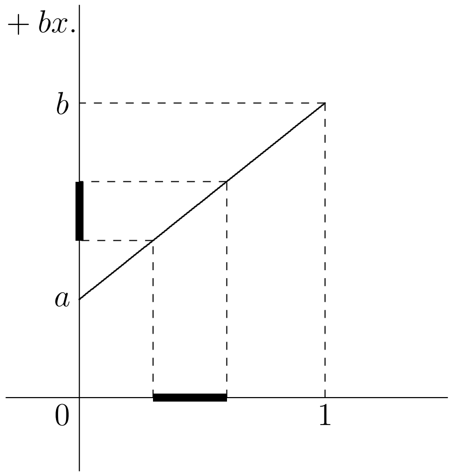
Τα επόμενα τρία παραδείγματα μας δείχνουν ότι όλα τα ανοιχτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικά. Το Μήκος δεν αποτελεί τοπολογική ιδιότητα. Πιο συγκεκριμένα, ένα ανοιχτό διάστημα πεπερασμένου μήκους, όπως το $(0,1)$, είναι ομοιομορφικό με ένα διάστημα απείρου μήκους, όπως το $(-\infty, 1)$ και, πράγματι, όλα τα ανοιχτά διαστήματα είναι ομοιομορφικά του $\mathbb{R}$.

4.2.4 Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι κάθε δύο μη κενά ανοιχτά διαστήματα (a, b) και (c, d) είναι ομοιομορφικά.

Περίγραμμα Απόδειξης.

Από την Παρατήρηση 4.2.3 βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι το διάστημα (a, b) είναι ομοιομορφικό του $(0,1)$ και το διάστημα (c, d) είναι ομοιομορφικό με το $(0, 1)$. Όμως, εφόσον τα a και b είναι αυθαίρετα (εκτός από το ότι ορίζουμε $a < b$), εάν το (a, b) είναι ομοιομορφικό του $(0,1)$, τότε το (c, d) θα είναι επίσης ομοιομορφικό του $(0,1)$. Για να αποδείξουμε ότι το (a, b) είναι ομοιομορφικό του $(0,1)$ είναι αρκετό να βρούμε έναν ομοιομορφισμό $f : (0,1) \to (a, b)$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω η συνάρτηση $f : (0,1) \to (a, b)$, η οποία δίδεται από τον τύπο $f(x) = a(1 - x) + bx$.



Είναι ξεκάθαρο ότι η $f : (0,1) \to (a, b)$ είναι 1-1 και επί. Είναι επίσης ξεκάθαρο από το διάγραμμα ότι η εικόνα, ως προς την f, ενός οποιουδήποτε ανοιχτού διαστήματος στο $(0,1)$ θα είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο (a,b). Δηλαδή, f(ανοιχτού διαστήματος στο $(0,1)$) = ανοιχτό διάστημα στο (a,b). Ωστόσο, κάθε ανοιχτό σύνολο στο $(0,1)$ θα είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων στο $(0,1)$, άρα

$$\begin{aligned} f(\text{ανοιχτό συνόλου στο } (0,1)) &= f(\text{ένωση ανοιχτών διαστημάτων στο } (0,1)) \\ &= \text{ένωση ανοιχτών διαστημάτων στο } (a,b) \\ &= \text{ανοιχτό σύνολο στο } (a,b). \end{aligned}$$

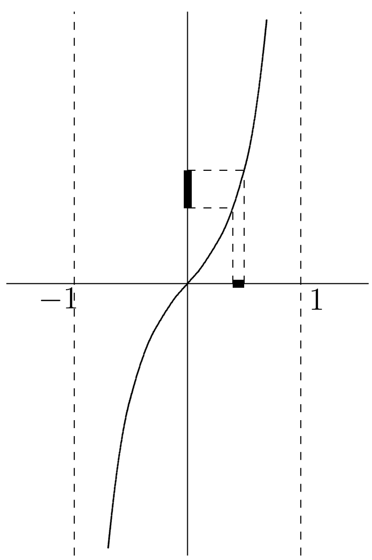
Οπότε, η συνθήκη (iv), του Ορισμού 4.2.1, ικανοποιείται. Όμοια, βλέπουμε ότι το σύνολο f^{-1} (ανοιχτό σύνολο στο (a,b)) είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο $(0,1)$. Οπότε, η συνθήκη (iii) του Ορισμού 4.2.1 ικανοποιείται επίσης. [Άσκηση: Να γραφεί προσεκτικά η παραπάνω απόδειξη.] Άρα, η f είναι ένας ομοιομορφισμός και $(0,1) \cong (a,b)$, για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Από τα παραπάνω έπεται άμεσα ότι $(a,b) \cong (c,d)$, όπως εζητείτο. □

4.2.5 Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικός του ανοιχτού διαστήματος $(-1,1)$, με την συνήθη τοπολογία.

Περίγραμμα Απόδειξης. Να οριστεί μια συνάρτηση $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \frac{x}{1-\mid x \mid}.$$

Προφανώς η f είναι 1-1 και επί, όπως έχουμε ήδη δει, και μια διαγραμματική προσέγγιση, όπως στο Παράδειγμα 4.2.4, μας δείχνει ότι η f είναι ομοιομορφισμός.



[Άσκηση: Να γραφτεί αναλυτικά η απόδειξη της πρότασης ότι η f είναι ομοιομορφισμός.]

4.2.6 Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι κάθε ανοιχτό διάστημα (a,b), με $a<b$, είναι ομοιομορφικό του συνόλου $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται από τα Παραδείγματα 4.2.5, 4.2.4, καθώς και από την Παρατήρηση 4.2.3. □

4.2.7 Παρατήρηση. Μπορεί να αποδειχθεί, κατά παρόμοιο τρόπο, ότι κάθε δύο διαστήματα $[a,b]$ και $[c,d]$, με $a<b$ και $c<d$, είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους.□

Ασκήσεις 4.2

1. (i) Εάν $a, b, c,$ και d είναι πραγματικοί αριθμοί με $a<b$ και $c<d$, να αποδειχθεί ότι $[a,b]\cong[c,d]$.

   (ii) Εάν a και b είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:
   $$(-\infty,a]\cong(-\infty,b]\cong[a,\infty)\cong[b,\infty).$$

   (iii) Εάν c, d, e και f είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί με $c<d$ και $e<f$, να αποδειχθεί ότι:
   $$[c,d)\cong[e,f)\cong(c,d]\cong(e,f].$$

   (iv) Να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριρθμούς a και b, όπου $a<b$, έχουμε ότι:
   $$[0,1)\cong(-\infty,a]\cong[a,\infty)\cong[a,b)\cong(a,b].$$

2. Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{Z}\cong\mathbb{N}$

3. Έστω m και c πραγματικοί αριθμοί, διάφοροι του μηδενός, και έστω X ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος έχει την μορφή $X=\{\langle x,y\rangle : y=mx+c\}$. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος X είναι ομοιομορφικός του συνόλου $\mathbb{R}$.

4. (i) Έστω X_1 και X_2 κλειστές περιοχές στο $\mathbb{R}^2$, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις:

$$X_1 = \{\langle x, y\rangle : |x| \le a_1 \text{ και } |y| \le b_1\}$$

kai

$$X_2 = \{\langle x, y\rangle : |x| \le a_2 \text{ και } |y| \le b_2\}$$

όπου a_1, b_1, a_2 και b_2 είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Εάν X_1 και X_2 είναι τοπολογικοί χώροι με τοπολογίες $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ διαδοχικά, στον χώρο $\mathbb{R}^2$, να αποδειχθεί ότι $X_1 \cong X_2$.

(ii) Έστω D_1 και D_2 δύο κλειστοί δίσκοι στο $\mathbb{R}^2$, με

$$D_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \le c_1\}$$

kai

$$D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \le c_2\}$$

όπου c_1 και c_2 είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος $D_1 \cong D_2$, όπου οι D_1 και D_2 είναι εφοδιασμένοι με τις τοπολογίες υποχώρου.

(iii) Να αποδειχθεί ότι $X_1 \cong D_1$.

5. Έστω X_1 και X_2 υπόχωροι του $\mathbb{R}$, όπου $X_1 = (0,1) \cup (3,4)$ και $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$. Είναι $X_1 \cong X_2$; (Στηρίξτε με επιχειρήματα την απάντησή σας.)

6. (Ομοιομορφισμοί Ομάδων) Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τυχαίος τοπολογικός χώρος και έστω G το σύνολο όλων των ομοιομορφισμών από τον χώρο X στον εαυτό του.

(i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο G αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.

(ii) Εάν $X = [0,1]$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο G είναι άπειρο.

(iii) Εάν $X = [0,1]$, είναι το G αβελιανή ομάδα;

7. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Εάν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας T_0-χώρος, τότε ο $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι T_0-χώρος, επίσης.

(ii) Εάν ο $(X,\mathcal{T})$ είναι T_1-χώρος, τότε και ο $(Y,\mathcal{T}_1)$ θα είναι T_1-χώρος.

(iii) Εάν $(X,\mathcal{T})$ είναι χώρος Hausdorff, τότε ο χώρος $(Y,\mathcal{T}_1)$ θα είναι επίσης Hausdorff.

(iv) Εάν ο χώρος $(X,\mathcal{T})$ ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας, τότε ο χώρος $(Y,\mathcal{T}_1)$ θα ικανοποιεί επίσης το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας.

(v) Εάν ο $(X,\mathcal{T})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος, τότε και ο $(Y,\mathcal{T}_1)$ θα είναι διαχωρίσιμος χώρος.

8.* Έστω $(X,\mathcal{T})$ διακριτικός χώρος. Να αποδειχθεί ότι ο $(X,\mathcal{T})$ είναι ομοιομορφικός ενός υποχώρου του $\mathbb{R}$, εάν και μόνον αν ο X είναι αριθμήσιμος.

4.3 Μη Ομοιομορφικοί Χώροι

Για να αποδείξουμε ότι δύο τοπολογικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε έναν ομοιομορφισμό μεταξύ τους. Από την άλλη, για να αποδείξουμε ότι δύο τοπολογικοί χώροι <u>δεν</u> είναι ομοιομορφικοί, είναι συνήθως δύσκολο να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους. Το παρακάτω παράδειγμα μας δίνει μια μεθοδολογία για ερωτήματα αυτού του τύπου.

4.3.1 Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι το διάστημα $[0,2]$ δεν είναι ομοιομορφικό με τον υπόχωρο $[0,1]\cup[2,3]$ του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $(X,\mathcal{T})=[0,2]$ και $(Y,\mathcal{T}_1)=[0,1]\cup[2,3]$. Τότε

$$[0,1]=[0,1]\cap Y \Rightarrow [0,1] \text{ είναι κλειστό στο } (Y,\mathcal{T}_1)$$
$$[0,1]=(-1,1\frac{1}{2})\cap Y \Rightarrow [0,1] \text{ είναι ανοιχτό στο } (Y,\mathcal{T}_1)$$

και άρα ο Y δεν είναι συνεκτικός χώρος, μιας και εμπεριέχει το διάστημα $[0,1]$ ως ένα γνήσιο και μη κενό κλειστάνοιχτο υποσύνολο. $\boxed{\text{Έστω}}$ ότι $(X,\mathcal{T})\cong(Y,\mathcal{T}_1)$. Τότε, θα υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f\colon (X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$. Άρα, $f^{-1}([0,1])$ θα είναι ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο του X, οπότε ο χώρος X δεν θα είναι συνεκτικός. Όμως αυτό δεν ισχύει, διότι το διάστημα $[0,2]=X$ είναι συνεκτικό. (Βλέπε Ασκήσεις 4.1) Οπότε, έχουμε αντίφαση, και άρα $(X,\mathcal{T})\ncong(Y,\mathcal{T}_1)$. □

Τί μάθαμε λοιπόν από αυτό;

4.3.2 Πρόταση. Ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος είναι ομοιομορφικός με έναν συνεκτικό χώρο, θα είναι και αυτός συνεκτικός. □

Η Πρόταση 4.3.2 μας δείχνει έναν τρόπο για το πως θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι δύο τοπολογικοί χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί ... με το να βρούμε μια ιδιότητα η οποία να 'διατηρείται μέσω ομοιομορφισμών', την οποία ο ένας χώρος πληρεί και ο άλλος δεν πληρεί.

Έχουμε συναντήσει αρκετές ιδιότητες, οι οποίες 'διατηρούνται μέσω ομοιομορφισμών', μεταξύ των ασκήσεων:

(i) T_0-χώρος,

(ii) T_1-χώρος,

(iii) T_2-χώρος ή χώρος Hausdorff,

(iv) χώρος regular,

(v) T_3-χώρος,

(vi) ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα αριθμησιμότητας,

(vii) διαχωρίσιμος χώρος. [Δείτε τις Ασκήσεις 4.2, Παράγραφος 7.]

Υπάρχουν και άλλες ιδιότητες:

(viii) διακριτικός χώρος,

(ix) μη διακριτικός χώρος,

(x) πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία,

(xi) αριθμήσιμη-κλειστή τοπολογία.

Άρα, μέχρι στιγμής, μαζί με τον όρο συνεκτικότητα γνωρίζουμε δώδεκα ιδιότητες που διατηρούνται μέσω ομοιομορφισμών. Επιπρόσθετα, δύο χώροι $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δεν δύνανται να είναι ομοιομορφικοί εάν X και Y έχουν διαφορετικούς πληθαρίθμους (π.χ. το X είναι αριθμήσιμο σύνολο και το Y μη αριθμήσιμο) ή εάν $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}_1$ έχουν διαφορετικούς πληθαρίθμους. Άρα, όταν έχουμε να λύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι πολύ πιθανό να μην έχουμε τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε. Φερειπείν, όταν πρέπει να δείξουμε ότι το διάστημα $(0, 1)$ δεν είναι ομοιομορφικό του $[0, 1]$ ή το σύνολο $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό του $\mathbb{R}^2$. Θα δούμε παρακάτω έναν τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων. Πριν προχωρήσουμε πάνω σε αυτό, θα διευθετήσουμε πρώτα το ακόλουθο ερώτημα: ποιοί υποχώροι του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικοί;

4.3.3 Ορισμός. Ένα υποσύνολο S, του $\mathbb{R}$, λέγεται διάστημα, εάν ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: εάν $x \in S$, $z \in S$, και $y \in \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $x < y < z$, τότε $y \in S$.

4.3.4 Παρατηρήσεις. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι διάστημα.

(ii) Κάθε διάστημα μπορεί να γραφεί με έναν από τους εξής τρόπους: $\{a\}, [a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

(iii) Έπεται από το Παράδειγμα 4.2.6, την Παρατήρηση 4.2.7 και τις Ασκήσεις 4.2 #1, ότι κάθε διάστημα είναι ομοιομορφικό, αντιστοίχως, των $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$ ή του $\{0\}$. Στις Ασκήσεις 4.3 #1 μας δίνεται η ευκαιρία να υποστηρίξουμε κάτι ισχυρότερο.

4.3.5 Πρόταση. Ένας υπόχωρος S του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός, εάν και μόνον αν είναι διάστημα.

Απόδειξη. Ότι το κάθε διάστημα είναι συνεκτικό μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο όπως αποδείχθηκε η Πρόταση 3.3.3, αντικαθιστώντας το $\mathbb{R}$, σε όλα τα σημεία της απόδειξης, με το διάστημα του οποίου θέλουμε να αποδείξουμε την συνεκτικότητα. Αντίστροφα, έστω το S συνεκτικό. $\boxed{\text{Έστω}}$ $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$ και $y \notin S$. Τότε, $(-\infty, y) \cap S = (-\infty, y] \cap S$ θα είναι ένα ανοιχτό και κλειστό ύποσύνολο του S. Άρα, το S θα έχει ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο, το $(-\infty, y) \cap S$. Για να δείξουμε ότι το S δεν είναι συνεκτικό, αρκεί να εξετάσουμε ότι αυτό το κλειστάνοιχτο σύνολο είναι αυστηρά υποσύνολο του S, δηλαδή δεν μπορεί να ισούται με το S, και είναι επίσης μη κενό. Το ότι είναι μη κενό, οφείλεται στο ότι εμπεριέχει το x. Επίσης, είναι αυστηρό υποσύνολο, διότι $z \in S$, μα $z \notin (-\infty, y) \cap S$. Άρα, το S δεν είναι συνεκτικό, και αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση. Άρα, το S θα είναι διάστημα. Βλέπουμε λοιπόν ξεκάθαρα, από τα όσα έχουμε πει μέχρι στιγμής, τον λόγο για τον οποίο υιοθετήθηκε ο όρος 'συνεκτικότητα' ('συνάφεια' στα παλαιότερα βιβλία). Υπόχωροι του $\mathbb{R}$, όπως οι $[a, b]$, (a, b), κλπ. είναι συνεκτικοί, ενώ υπόχωροι όπως ο $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [5, 6]$, οι οποίοι αποτελούν ένωση μη συνεκτικών κομματιών, δεν είναι συνεκτικοί. Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα $(0, 1) \ncong [0, 1]$. Καταρχάς, θα παρουσιάσουμε μια φαινομενικά εύκολη παρατήρηση.

4.3.6 Παρατήρηση. Έστω $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ ένας ομοιομορφισμός. Έστω $a \in X$, έτσι ώστε ο χώρος $X \setminus \{a\}$ να είναι υπόχωρος του X με την επαγώμηνη τοπολογία $\mathcal{T}_2$. Ο χώρος $Y \setminus \{f(a)\}$ θα είναι επίσης υπόχωρος του Y, με επαγώμενη τοπολογία $\mathcal{T}_3$. Τότε, ο $(X \setminus \{a\}, \mathcal{T}_2)$ θα είναι ομοιομορφικός του $(Y \setminus \{f(a)\}, \mathcal{T}_3)$.

Περίγραμμα Απόδειξης. Ορίζουμε $g \colon X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{f(a)\}$ με $g(x) = f(x)$, για κάθε $x \in X \setminus \{a\}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι η απεικόνιση g είναι ομοιομορφισμός (άσκηση για τον αναγνώστη). Ως άμεσο επακόλουθο των προαναφερθέντων, έχουμε το παρακάτω:

4.3.7 Συμπέρασμα. Εάν a, b, c και d είναι πραγματικοί αριθμοί, με $a < b$ και $c < d$, τότε:

(i) $(a, b) \ncong [c, d)$,

(ii) $(a, b) \ncong [c, d]$ και

(iii) $[a, b) \ncong [c, d]$.

Απόδειξη. (i) Έστω $(X,\mathcal{T})=[c,d)$ και $(Y,\mathcal{T}_1)=(a,b)$. $\boxed{\text{Υποθέτουμε}}$ ότι $(X,\mathcal{T})\cong(Y,\mathcal{T}_1)$. Τότε, $X\backslash\{c\}\cong Y\backslash\{y\}$, για κάποιο $y\in Y$. Όμως, το σύνολο $X\backslash\{c\}=(c,d)$ είναι διάστημα, οπότε είναι συνεκτικό, ενώ αδιάφορα από το πιο σημείο αφαιρούμε από το (a,b), ο χώρος που απομένει είναι μη συνεκτικός. Άρα, από την Πρόταση 4.3.2 έχουμε ότι:

$$X\setminus\{c\}\ncong Y\setminus\{y\},\ \text{για κάθε } y\in Y.$$

Αυτό προφανώς αποτελεί αντίφαση. Άρα, $[c,d)\ncong(a,b)$. (ii) Το διάστημα $[c,d]\setminus\{c\}$ είναι συνεκτικό, ενώ το $(a,b)\setminus\{y\}$ δεν είναι συνεκτικό, για κάθε $y\in(a,b)$. Άρα, $(a,b)\ncong[c,d]$. (iii) $\boxed{\text{Υποθέτουμε}}$ ότι $[a,b)\cong[c,d]$. Τότε, $[c,d]\setminus\{c\}\cong[a,b)\setminus\{y\}$, για κάποιο $y\in[a,b)$. Οπότε, $([c,d]\setminus\{c\})\setminus\{d\}\cong([a,b)\setminus\{y\})\setminus\{z\}$, για κάποιο $z\in[a,b)\setminus\{y\}$· δηλαδή, $(c,d)\cong[a,b)\setminus\{y,z\}$, για κάποια διακριτά y και z στο $[a,b)$. Όμως, το (c,d) είναι συνεκτικό, ενώ το $[a,b)\setminus\{y,z\}$, για οποιαδήποτε δύο διακριτά σημεία y και z στο $[a,b)$, είναι μη συνεκτικό. Άρα έχουμε αντίφαση. Οπότε, $[a,b)\ncong[c,d]$. □

Ασκήσεις 4.3

1. Να αποδειχθεί, από τα παραπάνω, ότι κάθε διάστημα είναι ομοιομορφικό ενός και μόνον ενός των παρακάτω χώρων:

$$\{0\},\qquad(0,1),\qquad[0,1],\qquad[0,1).$$

2. Να αποδειχθεί, από την Πρόταση 4.3.5, ότι κάθε αριθμήσιμος υπόχωρος του $\mathbb{R}$, με παραπάνω από ένα στοιχεία, είναι μη συνεκτικός. (Συγκεκριμένα, οι χώροι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι μη συνεκτικοί.)

3. Έστω X ο μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{R}^2$· δηλαδή, $X=\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2=1\}$ και ο X είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία του υποχώρου.

   (i) Να αποδειχθεί ότι $X\setminus\{\langle 1,0\rangle\}$ είναι χώρος ομοιομορφικός του ανοιχτού διαστήματος $(0,1)$.

   (ii) Να δειχθεί ότι $X\ncong(0,1)$ και ότι $X\ncong[0,1]$.

(iii) Αφού παρατηρηθεί πρώτα ότι για κάθε στοιχείο $a \in X$, ο υπόχωρος $X \setminus \{a\}$ είναι συνεκτικός, να αποδειχθεί ότι $X \not\cong [0,1)$.

(iv) Να αποδειχθεί ότι ο X δεν είναι ομοιομορφικός με κάποιο διάσστημα.

4. Έστω Y ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$Y = \{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y \rangle : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

(i) Είναι ο Y ομοιομορφικός του χώρου X της Ασκήσεως 3 παραπάνω;

(ii) Είναι ο Y ομοιομορφικός χώρος με ένα διάστημα;

5. Έστω Z ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος ορίζεται ως:

$$Z = \{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y \rangle : (x-3/2)^2 + y^2 = 1\}.$$

Να αποδειχθεί ότι

(i) Ο Z δεν είναι ομοιομορφικός ενός διαστήματος και

(ii) Ο Z δεν είναι ομοιομορφικός του χώρου X ή του Y, χώροι οι οποίοι περιγράφικαν στις Ασκήσεις 3 και 4 παραπάνω.

6. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία Sorgenfrey δεν είναι ομοιομορφική των χώρων $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\,2}$, η οποιουδήποτε υποχώρου αυτών.

7. (i) Να αποδειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος στις Ασκήσεις 1.1 $\#5$ (i) δεν είναι ομοιομορφικός του χώρου των Ασκήσεων 1.1 $\#9$ (ii).

(ii)* Στις ασκήσεις 1.1 $\#5$, είναι $(X, \mathcal{T}_1) \cong (X, \mathcal{T}_2)$;

(iii)* Στις ασκήσεις 1.1 # 9, είναι $(X, \mathcal{T}_2) \cong (X, \mathcal{T}_9)$;

8. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, όπου X είναι ένα άπειρο σύνολο. Να αποδειχθεί η καθεμία από τις ακόλουθες Προτάσεις (οι οποίες αποδείχθηκαν για πρώτη φορά από τους John Ginsburg και Bill Sands).

(i)* Ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ έχει μια υπόβαση ομοιομορφική του $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$, όπου είτη η $\mathcal{T}_1$ είναι η μη διακριτική τοπολογία είτε ο χώροσις τηε ινδισςρετε $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ είναι T_0.

((ii)** Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας T_1-χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ θα έχει έναν υπόχωρο ομοιομορφικό του $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$, όπου η $\mathcal{T}_2$ είναι είτεη η πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία είτε η διακριτική τοπολογία.

(iii) Να συνάγετε, από την (ii), ότι κάθε άπειρος χώρος Hausdorff περιέχει έναν άπειρο διακριτικό υπόχωρο, οότε και είναι ομοιομορφικός του συνόλου $\mathbb{N}$ με την διακριτική τοπολογία.

(iv)** Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας T_0-χώρος, ο οποίος δεν είναι T_1-χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ θα έχει έναν υπόχωρο ομοιομορφικό του $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$, όπου η $\mathcal{T}_3$ αποτελείται από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\emptyset$, και από όλα τα σύνολα $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ή αλλιώς το $\mathcal{T}_3$ αποτελείται από τα $\mathbb{N}$, $\emptyset$, και από όλα τα σύνολα $\{n, n+1, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(v) Από τα παραπάνω, να συνάγετε ότι κάθε άπειρος τοπολογικός χώρος έχει έναν υπόχωρο ομοιομορφικό του $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_4)$, όπου $\mathcal{T}_4$ είναι η μη διακριτική τοπολογία, η διακριτική τοπολογία, η πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία ή μία από τις δύο τοπολογίες που περιγράψαμε στο (iv), γνωστή ως τοπολογία αρχικού ευθύ γραμμου τμήματος και τοπολογία τελικού ευθύγραμμου τμήματος, αντιστοίχως. Επιπρόσθετα, καμία από αυτές τις πέντε τοπολογίες στο $\mathbb{N}$ δεν είναι ομοιομορφική με την άλλη.

9. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται τοπικός ομοιομορφισμός, εάν κάθε σημείο $x \in X$ έχει μια ανοιχτή περιοχή U, τέτοια ώστε η f να αντιστοιχεί την U ομοιομορφικά σε έναν ανοιχτό υπόχωρο V του $(Y, \mathcal{T}_1)$· δηλαδή, εάν η τοπολογία που παράγεται στην περιοχή U από την $\mathcal{T}$ είναι η $\mathcal{T}_2$ και η τοπολογία που παράγεται στην περιοχή $V = f(U)$ από την $\mathcal{T}_1$ είναι η $\mathcal{T}_3$, τότε η απεικόνιση f θα είναι ένας ομοιομορφισμός από τον χώρο $(U, \mathcal{T}_2)$ στον χώρο $(V, \mathcal{T}_3)$. Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπικά ομοιομορφικός με τον $(Y, \mathcal{T}_1)$, εάν υπάρχει ένας τοπικός ομοιομορφισμός από τον $(X, \mathcal{T})$ στον $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(i) Εάν οι χώροι $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι ομοιομορφικοί, να αποδειχθεί ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπικά ομοιομορφικός του $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(ii) Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας ανοιχτός υπόχωρος του $(Y, \mathcal{T}_1)$, να αποδειχθεί ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπικά ομοιομορφικός του $(Y, \mathcal{T}_1)$.

(iii)* Να αποδειχθεί ότι εάν $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός, τότε η απεικόνιση f αντιστοιχεί κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $(X, \mathcal{T})$ σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $(Y, \mathcal{T}_1)$.

4.4 Υστερόγραφο

Υπάρχουν τρείς σημαντικοί τρόποι, για να δημιουργήσει κανείς νέους τοπολογικούς χώρους από παλαιότερους: με την κατασκευή υποχώρων, με γινόμενα και με χώρους πηλίκα. Θα εξετάσουμε και τους τρεις τρόπους με λεπτομέρεια. Στο παρόν κεφάλαιο, μελετήσαμε τον πρώτο τρόπο. Αυτό μας επέτρεψε να παρουσιάσουμε τους σημαντικούς χώρους $\mathbb{Q}$, $[a, b]$, (a, b), κ.λπ. Ορίσαμε επίσης την κεντρική έννοια του ομοιομορφισμού. Παρατηρήσαμε ότι η σχέση '$\cong$' είναι μια σχέση ισοδυναμίας . Μια ιδιότητα λέγεται τοπολογική, εάν διατηρείται μέσω ομοιομορφισμών. Δηλαδή, εάν $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$ και ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ φέρει μια ιδιότητα, τότε και ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_1)$ θα φέρει αυτή την ιδιότητα. Η συνεκτικότητα, όπως είδαμε, είναι μια τοπολογική ιδιότητα. Άρα, κάθε χώρος ομοιομορφικός ενός συνεκτικού χώρου είναι συνεκτικός. (Μελετήσαμε και έναν αριθμό τοπολογικών ιδιοτήτων, που πηγάζουν από την συνεκτικότητα.) Ορίσαμε την έννοια του διαστήματος στο σύνολο $\mathbb{R}$, των πραγματικών αριθμών, και δείξαμε ότι τα διαστήματα είναι ακριβώς τα συνεκτικά υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$. Δεδομένων δύο τοπολογικών χώρων $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα να δει κανείς εάν είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους ή όχι. Αποδείξαμε ότι κάθε διάστημα στο $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό ακριβώς ενώς εκ των διαστημάτων $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ και $\{0\}$. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$, με την φυσική του τοπολογία, δεν είναι ομοιομορφικό του $\mathbb{R}^2$. Ένα πιο δύσκολο πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι το $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφικό του $\mathbb{R}^3$. Αυτό θα το δούμε αργότερα, με την βοήθεια το θεωρήματος καμπύλης του Jordan. Όπως και να ΄χει, το crème de la crème είναι το γεγονός ότι $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, εάν και μόνον αν $n = m$. Μια καλύτερη προσέγγιση αυτού γίνεται μέσω αλγεβρικής τοπολογίας, ένα αντικείμενο που μόλις αγγίζουμε σε αυτό το βιβλίο. Στις Ασκήσεις 4.2 #6 παρουσιάσαμε την έννοια της ομάδας ομοιομορφισμών, η οποία αποτελεί ξεχωριστό αντικείμενο από μόνη της.

Κεφάλαιο 5

Συνεχείς Απεικονίσεις

Εισαγωγή

Στους περισσότερους κόμβους των θεωρητικών μαθηματικών μελετούμε οντότητες που στην Θεωρία Κατηγοριών καλούνται 'αντικείμενα' και 'μορφισμοί'. Στην Γραμμική Άλγεβρα, τα αντικείμενα είναι διανυσματικοί χώροι και οι μορφισμοί γραμμικοί μετασχηματισμοί. Στην Θεωρία Ομάδων τα αντικείμενα είναι ομάδες και οι μορφισμοί λέγονται ομοιομορφισμοί, ενώ στην Θεωρία Συνόλων τα αντικείμενα είναι σύνολα και οι μορφισμοί συναρτήσεις. Στην Τοπολογία τα αντικείμενα είναι τοπολογικοί χώροι. Στην Τοπολογία, τα αντικείμενα είναι οι τοπολογικοί χώροι και οι μορφισμοί οι συνεχείς απεικονίσεις, που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

5.1 Συνεχείς Απεικονίσεις

Ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος[1] με την έννοια της συνεχούς συνάρτησης από το σύνολο $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής, εάν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε, υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός δ, έτσι ώστε $\mid x - a \mid < \delta$ να συνεπάγεται $\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$.

Δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο πως να γενικευθεί αυτός ο Ορισμός σε γενικούς

[1] Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρήσαμε ότι ο αναγνώστης έχει κάποιες βάσεις στην Πραγματική Ανάλυση και, συγκεκριμένα, στον ορισμό ε–δ της Συνέχειας. Στην περίπτωση που κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, προτείνουμε την απευθείας ανάγνωση του Ορισμού 5.1.3.

τοπολογικούς χώρους, όπου δεν υφίσταται η έννοια της ‘απολύτου τιμής’ ή της ‘αφαίρεσης’. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε έναν εναλλακτικό και ισοδύναμο ορισμό για την συνέχεια, ο οποίος θα αφορά σε γενικότερους χώρους.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, εάν και μόνον αν για κάθε $a\in\mathbb{R}$ και για κάθε διάστημα $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, όπου $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\in(f(a)-\varepsilon\,,\,f(a)+\varepsilon)$, για κάθε $x\in(a-\delta\,,\,a+\delta)$.

Ο παραπάνω ορισμός αποτελεί μια βελτιωμένη διατύπωση της συνέχειας συνάρτησης, διότι δεν περιλαμβάνει την έννοια της ‘απολύτου τιμής’, εξακολουθώντας ωστόσο να περιλαμβάνει την ‘αφαίρεση’. Το Λήμμα που ακολουθεί μας δείχνει τον τρόπο απαλλαγής από την αφαίρεση.

5.1.1 Λήμμα. Έστω f μια συνάρτηση από το σύνολο $\mathbb{R}$ στον εαυτό του. Η f θα είναι συνεχής, εάν και μόνον αν για κάθε $a\in\mathbb{R}$ και για κάθε ανοιχτό σύνολο U, το οποίο περιέχει το $f(a)$, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V το οποίο περιέχει το a, έτσι ώστε $f(V)\subseteq U$.

Απόδειξη. Έστω f συνεχής. Έστω $a\in\mathbb{R}$ και έστω επίσης U ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $f(a)$. Τότε, θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί c και d, τέτοιοι ώστε $f(a)\in(c,d)\subseteq U$. Θέτουμε ε να ισούται με τον μικρότερο εκ των δύο αριθμών $d-f(a)$ και $f(a)-c$, έτσι ώστε:

$$(f(a)-\varepsilon\,,\,f(a)+\varepsilon)\subseteq U.$$

Εφόσον η απεικόνιση f είναι συνεχής, θα υπάρχει ένα $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\in(f(a)-\varepsilon\,,\,f(a)+\varepsilon)$, για κάθε $x\in(a-\delta\,,\,a+\delta)$. Έστω V ένα ανοιχτό σύνολο $(a-\delta\,,\,a+\delta)$. Τότε, $a\in V$ και $f(V)\subseteq U$, όπως ζητείτο.

Αντιστρόφως, θεωρούμε ότι για κάθε $a\in\mathbb{R}$ και για κάθε ανοιχτό σύνολο U, το οποίο περιέχει το $f(a)$, να υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V που περιέχει το a, τέτοιο ώστε $f(V)\subseteq U$. Πρέπει να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής απεικόνιση. Έστω λοιπόν $a\in\mathbb{R}$ και ε ένας οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός. Έστω $U=(f(a)-\varepsilon\,,\,f(a)+\varepsilon)$. Τότε, το U θα είναι ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $f(a)$. Άρα, θα υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V που περιέχει το a, τέτοιο ώστε $f(V)\subseteq U$. Επειδή το V είναι ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το a, θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί c και d, τέτοιοι ώστε $a \in (c, d) \subseteq V$. Έστω το δ ισούται με τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς $d - a$ και $a - c$, έτσι ώστε $(a - \delta\,,\, a + \delta) \subseteq V$. Τότε, για κάθε $x \in (a - \delta\,,\, a + \delta)$, $f(x) \in f(V) \subseteq U$, όπως ζητείτο. Άρα, η f είναι συνεχής. □

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα που περιγράψαμε στο Λήμμα 5.1.1 για να ορίσουμε την συνέχεια, όμως το λήμμα που ακολουθεί μας επιτρέπει να διατυπώσουμε έναν περισσότερο κομψό ορισμό.

5.1.2 Λήμμα. Έστω f μια απεικόνιση ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ σε έναν τοπολογικό χώρο $(Y, \mathcal{T}\,')$. Τότε, οι ακόλουθες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) για κάθε $U \in \mathcal{T}\,'$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$,

(ii) για κάθε $a \in X$ και για κάθε $U \in \mathcal{T}\,'$ όπου $f(a) \in U$, υπάρχει $V \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $a \in V$ και $f(V) \subseteq U$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι η συνθήκη (i) ικανοποιείται. Έστω $a \in X$ και $U \in \mathcal{T}'$ όπου $f(a) \in U$. Τότε, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Θεωρούμε $V = f^{-1}(U)$, και έχουμε ότι $a \in V$, $V \in \mathcal{T}$ και $f(V) \subseteq U$. Οπότε, η συνθήκη (ii) θα ικανοποιείται.

Αντιστρόφως, έστω ότι η συνθήκη (ii) ικανοποιείται. Έστω $U \in \mathcal{T}\,'$. Εάν $f^{-1}(U) = \emptyset$, τότε ξεκάθαρα $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Εάν $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, έστω $a \in f^{-1}(U)$. Τότε, $f(a) \in U$. Άρα, θα υπάρχει $V \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε $a \in V$ και $f(V) \subseteq U$. Άρα, για κάθε $a \in f^{-1}(U)$, θα υπάρχει $V \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε $a \in V \subseteq f^{-1}(U)$. Από το Συμπέρασμα 3.2.9, αυτό συνεπάγεται ότι $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Άρα, η συνθήκη (i) θα ικανοποιείται. □

Θεωρώντας ταυτοχρόνως τα Λήμματα 5.1.1 και 5.1.2, βλέπουμε ότι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, εάν και μόνον αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ θα είναι ένα ανοιχτό σύνολο.

Το παραπάνω συμπέρασμα μας οδηγεί στον ορισμό της έννοιας της συνεχούς συνάρτησης μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων, ως ακολούθως:

5.1.3 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ τοπολογικοί χώροι και έστω f μια συνάρτηση από το X στο Y. Η συνάρτηση $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ λέγεται συνεχής απεικόνιση, εάν για κάθε $U \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, βλέπουμε ότι ο ορισμός της συνέχειας συμπίπτει με τον συνήθη ορισμό που γνωρίζουμε από την Ανάλυση, όταν $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}_1) = \mathbb{R}$.

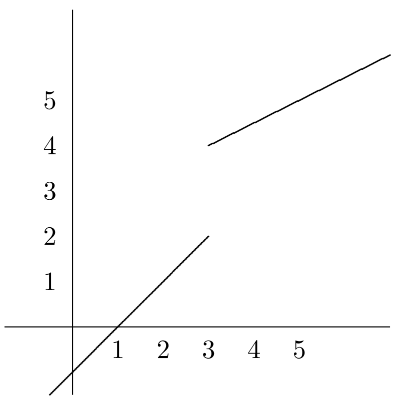
Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα, που δείχνουν πόσο εύκολος στην χρήση είναι ο Ορισμός 5.1.3.

5.1.4 Παράδειγμα. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, όπου η f ορίζεται από τον τύπο $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$· δηλαδή, η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Τότε, για κάθε ανοιχτό σύνολο U, στο $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U) = U$, που είναι ανοιχτό σύνολο, οπότε και η f είναι συνεχής. □

5.1.5 Παράδειγμα. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = c$, όπου c είναι μια σταθερά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$. Είναι ξεκάθαρο ότι $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$, εάν $c \in U$ και $\emptyset$, εάν $c \notin U$. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε ότι $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό σύνολο. Έτσι, η f είναι συνεχής. □

5.1.6 Παράδειγμα. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{εάν } x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x + 5), & \text{εάν } x > 3. \end{cases}$$



Υπενθυμίζουμε ότι μια απεικόνιση είναι συνεχής, εάν και μόνον αν η αντίστροφη εικόνα ενός ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα, για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής, αρκεί να βρούμε ένα σύνολο U, τέτοιο ώστε $f^{-1}(U)$ να μην είναι ανοιχτό σύνολο.

Έχουμε λοιπόν, $f^{-1}((1,3)) = (2,3]$, το οποίο δεν είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα, η f δεν είναι συνεχής. □

Παρατηρούμε ότι το Λήμμα 5.1.2 μπορεί τώρα να επαναδιατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο.[2]

5.1.7 Πρόταση. Έστω f μια απεικόνιση ενός τοπολογικού χώρου $(X,\mathcal{T})$ σε έναν χώρο $(Y,\mathcal{T}')$. Η f θα είναι συνεχής, εάν και μόνον άν για κάθε $x \in X$ και κάθε $U \in \mathcal{T}'$, όπου $f(x) \in U$, υπάρχει $V \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε $x \in V$ και $f(V) \subseteq U$. □

5.1.8 Πρόταση. Έστω $(X,\mathcal{T}), (Y,\mathcal{T}_1)$ και $(Z,\mathcal{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι. Εάν $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ και $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ θα είναι επίσης συνεχής.

Απόδειξη.

Για να αποδείξουμε ότι η σύνθετη απεικόνιση $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\tau_2)$ είναι συνεχής, θα πρέπει να δείξουμε ότι εάν $U \in \tau_2$, τότε και $(g\circ f)^{-1}(U) \in \tau$.

Όμως $(g\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο στον χώρο $(Z,\mathcal{T}_2)$. Εφόσον η g είναι συνεχής, $g^{-1}(U)$ θα είναι ανοιχτό στην τοπολογία $\mathcal{T}_1$. Άρα, το σύνολο $f^{-1}(g^{-1}(U))$ θα είναι ανοιχτό στην $\mathcal{T}$, επειδή η f είναι συνεχής. Όμως $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g\circ f)^{-1}(U)$. Έτσι, $g \circ f$ θα είναι συνεχής. □

[2] Εάν δεν έχετε μελετήσει το Λήμμα 5.1.2 και την απόδειξή του, επιβάλλεται να το κάνετε τώρα!

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί, δείχνει ότι η συνέχεια μπορεί να περιγραφεί επίσης ως προς τα κλειστά σύνολα, εκτός των ανοιχτών συνόλων, εάν το επιθυμούμε.

5.1.9 Πρόταση. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι. Η απεικόνιση $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ είναι συνεχής, εάν και μόνον αν για κάθε κλειστό υποσύνολο S, του Y, $f^{-1}(S)$ είναι κλειστό σύνολο του X.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι τετριμμένη, εάν σκεφτεί κανείς ότι:

$$f^{-1}(\text{συμπλήρωμα του } S) = \text{σομπλεμεντ οφ } f^{-1}(S). \qquad \square$$

5.1.10 Παρατήρηση. Οι συνεχείς απεικονίσεις και οι ομοιομορφισμοί διέπονται από την εξής σχέση: εάν $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ είναι ένας ομοιομορφισμός, τότε είναι επίσης και συνεχής απεικόνιση. Δεν συμβαίνει ωστότο το αντίστροφο, δηλαδή δεν είναι κάθε συνεχής απεικόνιση κατ΄ ανάγκη ομοιομορφισμός.

Η παρακάτω πρόταση, της οποίας η απόδειξη έπεται των ορισμών της 'συνέχειας' και του 'ομοιομορφισμού', μας δίνει μια ολοκληρωμένη εικόνα.

5.1.11 Πρόταση. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}')$ τοπολογικοί χώροι και f μια επεικόνιση από τον X στον Y. Τότε, η f θα είναι ομοιομορφισμός, εάν και μόνον αν:

(i) η f είναι συνεχής,

(ii) η f είναι 1-1 και επί, δηλαδή υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης $f^{-1} : Y \to X$ και

(iii) η f^{-1} είναι συνεχής. $\square$

Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα είναι η Πρόταση που ακολουθεί, η οποία μας λέει ότι ο περιορισμός μιας συνεχούς απεικόνισης είναι επίσης συνεχής απεικόνιση. Μιας και η απόδειξη είναι καθαρά τεχνική, αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση – ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί την Άσκηση 5.1 #8.

5.1.12 Πρόταση. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ μια συνεχής απεικόνιση, A ένα υποσύνολο του X και $\mathcal{T}_2$ η επαγώμενη τοπολογία στο A. Επιπλέον, έστω $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ ο περιορισμός της f στο A, δηλαδή, $g(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$. Τότε, η g είναι συνεχής.

Ασκήσεις 5.1

1. (i) Έστω $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ μια σταθερή συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

   (ii) Έστω $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ η ταυτοτική απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δίδεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   (i) Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Παραδείγματος 5.1.6.

   (ii) Να υπολογιστεί η $f^{-1}\{1\}$ και, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.9, να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δίδεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1. \end{cases}$$

   Είναι η f συνεχής; (Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.)

4. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως $X = [0,1] \cup [2,4]$. Έστω μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν} \quad x \in [0,1] \\ 2, & \text{εάν} \quad x \in [2,4]. \end{cases}$$

   Να αποδειχθεί ότι η f <u>είναι</u> συνεχής. (Σκεφθείτε το λίγο: η απάντηση σε αυτή την ερώτηση σας εκπλήσσει, ή μήπως όχι;)

5. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ τοπολογικοί χώροι και $\mathcal{B}_1$ μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_1$. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ είναι συνεχής, εάν και μόνον αν $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, για κάθε $U \in \mathcal{B}_1$.

6. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι και f μια απεικόνιση από το σύνολο X στο Y. Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας διακριτικός χώρος να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

7. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ τοπολογικοί χώροι και f μια απεικόνιση από το σύνολο X στο Y. Εάν $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι ένας μη διακριτικός χώρος, να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

8. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ μια συνεχής απεικόνιση. Έστω A ένα υποσύνολο του X, $\mathcal{T}_2$ η επαγώμενη τοπολογία στο A, $B = f(A)$, $\mathcal{T}_3$ η επαγώμενη τοπολογία στο B και $g : (A, \mathcal{T}_2) \to (B, \mathcal{T}_3)$ ο περιορισμός της f στο A. Να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής.

9. Έστω f μια απεικόνιση ενός χώρου $(X, \mathcal{T})$ σε έναν χώρο $(Y, \mathcal{T}')$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής, εάν και μόνον αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε περιοχή N του σημείου $f(x)$, υπάρχει περιοχή M του x, τέτοια ώστε $f(M) \subseteq N$.

10. Έστω $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ δύο τοπολογίες σε ένα σύνολο X. Η $\mathcal{T}_1$ λέγεται μικρότερη τοπολογία της $\mathcal{T}_2$ (και η $\mathcal{T}_2$ λέγεται μεγαλύτερη τοπολογία της $\mathcal{T}_1$), εάν $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$. Να αποδειχθεί ότι:

    (i) η Ευκλείδεια Τοπολογία του χώρου $\mathbb{R}$ είναι μικρότερη της πεπερασμένης-κλειστής τοπολογίας στον χώρο $\mathbb{R}$·

    (ii) η ταυτοτική συνάρτηση $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ είναι συνεχής, εάν και μόνον αν $\mathcal{T}_1$ είναι μικρότερη τοπολογία της $\mathcal{T}_2$.

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(q) = 0$, για κάθε ρητό αριθμό q. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ μια συνεχής συνάρτηση. Εάν η f είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι:

(i) εάν ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι Hausdorff, τότε αυτό συνεπάγεται ότι και ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ θα είναι Hausdorff.

(ii) Εάν ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_1)$ είναι T_1, τότε αυτό θα συνεπάγεται ότι και ο $(X, \mathcal{T})$ θα είναι T_1.

13. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι και έστω f μια απεικόνιση από τον χώρο $(X, \mathcal{T})$ στον $(Y, \mathcal{T}_1)$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής, εάν και μόνον αν για κάθε υποσύνολο A του X, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

    [Βοήθημα: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 5.1.9.]

5.2 Το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής

5.2.1 Πρόταση. Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{T}_1)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ δύο επί και συνεχείς συναρτήσεις. Εάν ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός, τότε και ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_1)$ θα είναι συνεκτικός.

Απόδειξη. Έστω $(Y, \mathcal{T}_1)$ ένας μη συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε, ο Y θα έχει ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο U, τέτοιο ώστε $U \neq \emptyset$ και $U \neq Y$. Άρα, το σύνολο $f^{-1}(U)$ θα είναι ανοιχτό, μιας και η f είναι συνεχής, και ταυτοχρόνως κλειστό, βάσει της Πρότασης 5.1.9· με άλλα λόγια, $f^{-1}(U)$ είναι ένα κλειστάνοιχτο υποσύνολο του X. Τώρα, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, επειδή η f είναι επί και $U \neq \emptyset$. Επίσης, $f^{-1}(U) \neq X$, επειδή εάν ήταν το U θα ισούταν με Y, λόγω του ότι η f είναι επί. Έτσι, ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι συνεκτικός. Όμως αυτό αποτελεί μια αντίφαση. Άρα, ο $(Y, \mathcal{T}_1)$ θα είναι συνεκτικός χώρος. □

5.2.2 Παρατηρήσεις. (i) Η παραπάνω πρόταση θα ήταν λάθος, εάν απουσίαζε η συνθήκη 'επί', από την συνάρτηση. (Άσκηση προς τον αναγνώστη: βρείτε ένα τέτοιο παράδειγμα.)

(ii) Με απλά λόγια, η Πρόταση 5.2.1 μας λέει ότι: κάθε συνεχής εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτική.

(iii) Η Πρόταση 5.2.1 μας λέει ότι εάν ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός και ο $(Y, \mathcal{T}')$ δεν είναι συνεκτικός (δηλαδή είναι μη συνεκτικός), τότε δεν θα υπάρχει απεικόνιση από τον $(X, \mathcal{T})$ στον χώρο $(Y, \mathcal{T}')$, η οποία να είναι συνεχής. Για παράδειγμα, ενώ από την μια υπάρχει ένας άπειρος αριθμός απεικονίσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$ (η στο $\mathbb{Z}$), καμία από αυτές δεν είναι συνεχείς. Πράγματι, στην Άσκηση 5.2 # 10 παρατηρούμε ότι οι μοναδικές συνεχείς απεικονίσεις του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$ (η επι του $\mathbb{Z}$) είναι οι σταθερές απεικονίσεις. □

Η παρακάτω ισχυρή έκδοση της συνεκτικότητας είναι πολλές φορές χρήσιμη.

5.2.3 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται συνεκτικός κατά μονοπάτια, εάν για κάθε ζεύγος διακριτών σημείων a και b, του X υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f : [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$, τέτοια ώστε $f(0) = a$ και $f(1) = b$. Η απεικόνιση f λέγεται μονοπάτι από το a στο b.

5.2.4 Παράδειγμα. Έχουμε ήδη δεί ότι κάθε διάστημα είναι συνεκτικό κατά μονοπάτια. □

5.2.5 Παράδειγμα. Για κάθε $n \geq 1$, το σύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό κατα μονοπάτια. □

5.2.6 Πρόταση. Κάθε συνεκτικός κατά μονοπάτια χώρος είναι και συνεκτικός.

Απόδειξη. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας συνεκτικός κατά μονοπάτια χώρος και έστω ότι δεν είναι συνεκτικός.

Τότε, θα περιλαμβάνει αυστηρά ένα μη κενό κλειστάνοιχτο υποσύνολο, U. Άρα, θα υπάρχουν a και b, τέτοια ώστε $a \in U$ και $b \in X \setminus U$. Εφόσον ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια, θα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to (X, \mathcal{T})$, τέτοια ώστε $f(0) = a$ και $f(1) = b$.

Όμως, $f^{-1}(U)$ είναι κλειστάνοιχτο υποσύνολο του $[0,1]$. Εφόσον $a \in U$, $0 \in f^{-1}(U)$, οπότε και $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Επίσης, $b \notin U$, $1 \notin f^{-1}(U)$ κι έτσι $f^{-1}(U) \neq [0,1]$. Οπότε, $f^{-1}(U)$ θα είναι ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο του $[0,1]$, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με την συνεκτικότητα του $[0,1]$.

Συμπερασματικά, ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός. $\square$

5.2.7 Παρατήρηση. Η αντίστροφη της Πρότασης 5.2.6 δεν είναι αληθής· δηλαδή, δεν είναι κάθε συνεκτικός χώρος συνεκτικός κατά μονοπάτια. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου χώρου είναι ο ακόλουθος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\} \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}.$$

[Η Άσκηση 5.2 #6 μας δείχνει ότι ο χώρος X είναι συνεκτικός. Το ότι ο X δεν είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια, μπορεί να εξεταστεί από μια πρόχειρη απόδειξη που να δείχνει ότι δεν υπάρχει μονοπάτι που να ενώνει το $\langle 0, 0\rangle$ με το σημείο, για παράδειγμα, $\langle 1/\pi, 0\rangle$. Ζωγραφίστε μια εικόνα και προσπαθείστε να πείσετε τον εαυτό σας γι΄ αυτό!] $\square$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$.

5.2.8 Παράδειγμα. Είναι ξεκάθαρο ότι ο χώρος $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$ είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια, οπότε, από την Πρόταση 5.2.6, θα είναι και συνεκτικός. Από την άλλη, από την Πρόταση 4.2.5, ο χώρος $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, είναι μη συνεκτικός. Άρα, $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$. $\square$

Σε αυτό το σημείο, θα παρουσιάσουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής του Weierstrass, το οποίο αποτελεί μια όμορφη εφαρμογή της Τοπολογίας στην θεωρία συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Το απαραίτητο τοπολογικό εργαλείο σε αυτό το αποτέλεσμα είναι αυτό της συνεκτικότητας.

5.2.9 Θεώρημα. (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής του Weierstrass) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και έστω $f(a) \neq f(b)$. Τότε, για κάθε αριθμό p, μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, θα υπάρχει ένα σημείο $c \in [a, b]$ τέτοιο ώστε$f(c) = p$.

Απόδειξη. Εφόσον το διάστημα $[a, b]$ είναι συνεκτικό και η f είναι συνεχής, η Πρόταση 5.2.1 μας δίνει ότι η εικόνα $f([a, b])$ θα είναι συνεκτική. Από την Πρόταση 4.3.5, παίρνουμε εξάγουμε ότι το σύνολο $f([a, b])$ είναι διάστημα. Τώρα, $f(a)$ και $f(b)$ ανήκουν στο $f([a, b])$. Έτσι, εάν το p βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, $p \in f([a, b])$, δηλαδή, $p = f(c)$, για κάποιο $c \in [a, b]$. □

5.2.10 Συμπέρασμα. Εάν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής απεικόνιση, τέτοια ώστε $f(a) > 0$ και $f(b) < 0$, τότε θα υπάρχει $x \in [a, b]$, τέτοιο ώστε $f(x) = 0$. □

5.2.11 Συμπέρασμα. (Θεώρημα Σταθερού Σημείου) Έστω f μια συνεχής απεικόνιση από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$. Τότε, θα υπάρχει $z \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(z) = z$. (Το σημείο z λέγεται σταθερό σημείο.)

Απόδειξη. Εάν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$, η πρόταση είναι σαφέστατα αληθής. Άρα, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση όταν $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$.

Έστω $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που ορίζεται ως $g(x) = x - f(x)$. Είναι φανερό ότι η g είναι συνεχής, $g(0) = -f(0) < 0$ και $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Συμπερασματικά, από το Συμπέρασμα 5.2.10, θα υπάρχει $z \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $g(z) = 0$· με άλλα λόγια, $z - f(z) = 0$ ή $f(z) = z$. □

5.2.12 Παρατήρηση. Το Συμπέρασμα 5.2.11 είναι μια ειδική περίπτωση ενός σημαντικού θεωρήματος, το οποίο είναι γνωστό ως το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: Εάν θεωρήσουμε μια συνεχή απεικόνιση κύβου n-διάστασης στον εαυτό του, τότε θα υπάρχει ένα σταθερό σημείο. [Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του θεωρήματος αυτού, όμως οι περισσότερες χρησιμοποιούν μεθοδολογία Αλγεβρικής Τοπολογίας. Μία σχετικά βατή απόδειξη δίνεται στις σελίδες 238–239 του βιβλίου "Introduction to Set Theory and Topology", του K. Kuratowski (Pergamon Press, 1961).]

Ασκήσεις 5.2

1. Να αποδειχθεί ότι η συνεχής εικόνα ενός συνεκτικού κατά μονοπάτια χώρου είναι συνεκτική κατά μονοπάτια.

2. Έστω f μια συνεχής απεικόνιση, από ένα διάστημα $[a,b]$ στον εαυτό του, όπου a και $b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο.

3. (i) Να δοθεί ένα παράδειγμα, που να δείχνει ότι το Συμπέρασμα 5.2.11 θα ήταν λάθος, εάν:

   αντικαθιστούσαμε παντού το διάστημα $[0,1]$ με το $(0,1)$.

   (ii) Ένας τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ λέγεται ότι φέρει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, εάν κάθε συνεχής απεικόνιση, από τον χώρο $(X,\mathcal{T})$ στον εαυτό του, έχει ένα σταθερό σημείο. Να δείξετε ότι τα μοναδικά διαστήματα που φέρουν την ιδιότητα του σταθερού σημείου είναι τα κλειστά διαστήματα.

   (iii) Έστω X ένα σύνολο με δύο τουλάχιστον στοιχεία. Να αποδειχθεί ότι ο διακριτικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ και ο μη διακριτικός χώρος $(X,\mathcal{T}')$ δεν ικανοποιούν την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

   (iv) Φέρει, ένας τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την πεπερασμένη-κλειστή τοπολογία, την ιδιότητα του σταθερού σημείου;

   (v) Να αποδειχθεί ότι εάν ο χώρος $(X,\mathcal{T})$ φέρει την ιδιότητα του σταθερού σημείου και $(Y,\mathcal{T}_1)$ είναι ένας χώρος ομοιομορφικός του $(X,\mathcal{T})$, τότε ο χώρος $(Y,\mathcal{T}_1)$ θα φέρει την ιδιότητα του σταθερού σημείου

4. Έστω $\{A_j : j \in J\}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποχώρων ενός τοπολογικού χώρου $(X,\mathcal{T})$. Εάν $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$, να αποδειχθεί ότι $\bigcup_{j\in J} A_j$ είναι συνεκτικός χώρος.

5. Έστω A ένας συνεκτικός υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Να αποδειχθεί ότι $\overline{A}$ είναι επίσης συνεκτικός χώρος. Πράγματι, να δείξετε ότι εάν $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε ο B είναι συνεκτικός.

6. (i) Να δείξετε ότι ο υπόχωρος $Y = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\}$ οφ $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικός.
[Βοήθημα: Χρησιμοποιείστε την Πρόταση 5.2.1.]

   (ii) Να επαληθεύσετε ότι $\overline{Y} = Y \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}$

   (iii) Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5, παρατηρείστε ότι ο χώρος$\overline{Y}$ είναι συνεκτικός.

7. Έστω E το σύνολο όλων των σημείων στο $\mathbb{R}^2$ με ρητές συντεταγμένες. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}^2 \setminus E$ είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια.

8.* Έστω C ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^2$. Να αποδείξετε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^2 \setminus C$ είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια.

9. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και a ένα οποιοδήποτε σημείο στον X. Η συνιστώσα του a στον X, $C_X(a)$, ορίζεται ως η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X, που περιλαμβάνουν το σημείο a. Να αποδειχθεί ότι:

   (i) Το σύνολο $C_X(a)$ είναι συνεκτικό. (Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 4, παραπάνω.)

   (ii) Το σύνολο $C_X(a)$ είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το a.

   (iii) Το $C_X(a)$ είναι κλειστό στον χώρο X. (Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5, παραπάνω.)

10. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται ολικά μη συνεκτικός, εάν κάθε μη κενό συνεκτικό υποσύνολο είναι μονοσύνολο. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

   (i) Ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι ολικά μη συνεκτικός, εάν και μόνον αν για κάθε $a \in X$, $C_X(a) = \{a\}$. (Παραπέμπουμε στον συμβολισμό της Άσκησης 9.)

   (ii) Το σύνολο $\mathbb{Q}$, όλων των ρητών αριθμών, με την συνήθη τοπολογία, είναι ολικώς μη συνεκτικό.

(iii) Εάν η f είναι μια συνεχής απεικόνιση από τον χώρο $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε $f(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Κάθε υπόχωρος ενός ολικώς μη συνεκτικού χώρου είναι ολικώς μη συνεκτικός.

(v) Κάθε αριθμήσιμος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ είναι ολικώς μη συνεκτικός.

(vi) Η ευθεία Sorgenfrey είναι ολικώς μη συνεκτικός χώρος.

11. (i) Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 να ορίσετε, με τον πιο φυσικό τρόπο, την 'συνιστώσα-μονοπάτι' ενός σημείου σε έναν τοπολογικό χώρο.

(ii) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τοπολογικό χώρο, κάθε συνιστώσα-μονοπάτι είναι ένας συνεκτικός κατά μονοπάτια χώρος.

(iii) Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος με την ιδιότητα ότι κάθε σημείο του X έχει μια γειτονιά που είναι συνεκτική κατά μονοπάτια, να αποδειχθεί ότι κάθε συνεκτικός κατά μονοπάτια χώρος είναι ανοιχτό σύνολο. Να εξάγεται το συμπέρασμα ότι κάθε συνιστώσα-μονοπάτι είναι επίσης κλειστό σύνολο.

(iv) Χρησιμοποιώντας την πρόταση (iii), να αποδείξετε ότι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό, εάν και μόνον αν είναι συνεκτικό κατά μονοπάτια.

12.* Έστω A και B υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Εάν A και B είναι ταυτοχρόνως ανοιχτά και κλειστά σύνολα, και $A \cup B$, $A \cap B$ είναι συνεκτικοί χώροι, να δείξετε ότι A και B είναι συνεκτικοί χώροι.

13. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ αποκαλείται μηδενικής διάστασης εάν υπάρχει βάση για την τοπολογία του, που να αποτελείται από κλειστάνοιχτα σύνολα. Να αποδειχθούν οι προτάσεις που ακολουθούν:

(i) Οι χώροι$\mathbb{Q}$ και $\mathbb{P}$ είναι μηδενικής διάστασης.

(ii) Ένας υπόχωρος ενός χώρου μηδενικής διάστασης είναι και αυτός χώρος μηδενικής διάστασης.

(iii) Ένας χώρος Hausdorff, μηδενικής διάστασης, είναι ολικώς μη συνεκτικός. (Δείτε την Άσκηση 10 παραπάνω.)

(iv) Κάθε μη διακριτικός χώρος είναι μηδενικής διάστασης.

(v) Κάθε διακριτικός χώρος είναι μηδενικής διάστασης.

(vi) Οι μη διακριτικοί χώροι με παραπάνω από ένα στοιχεία δεν είναι ολικώς μη συνεκτικοί.

(vii) Ένας χώρος μηδενικής διάστασης που είναι T_0, είναι επίσης Hausdorff.

(viii)* Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$ είναι μηδενικής διάστασης, εάν και μόνον αν είναι ολικώς μη συνεκτικός.

14. Να αποδείξετε ότι κάθε τοπικός ομοιομορφισμός είναι συνεχής απεικόνιση. (Δείτε τις Ασκήσεις 4.3#9.)

5.3 Υστερόγραφο

Σε αυτό το Κεφάλαιο είδαμε ότι μια απεικόνιση [3] μεταξύ τοπολογικών χώρων λέγεται 'συνεχής' εάν η συνεχής εικόνα ενός ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο. Ο ορισμός αυτός είναι αρκετά κομψός και ευκατανόητος. Έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό που συναντήσαμε στην Πραγματική Ανάλυση, τον οποίο μνημονεύσαμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού. Γενικεύσαμε λοιπόν τον ορισμό από την παραγματική ανάλυση, όχι τόσο για χάρη της γενίκευσης όσο για να έχουμε μια πιο σφαιρική άποψη περί συνέχειας.

Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής του Weierstrass φαίνεται, εκ πρώτης όψεως, διαισθητικά σαφές, όμως τώρα βλέπουμε ότι ακολουθεί από το γεγονός ότι ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός και επίσης από το γεγονός ότι η συνεχής εικόνα ενός συνεκτικού χώρου είναι συνεκτικός χώρος.

Παρουσιάσαμε μια ισχυρότερη ιδιότητα από αυτήν την συνεκτικότητας, την οποία ονομάσαμε συνεκτικότητα κατά μονοπάτια. Σε πολλές περιπτώσεις δεν αρκεί να επιμένουμε ότι ένας χώρος είναι συνεκτικός: επιβάλλεται να είναι και συνεκτικός κατά μονοπάτια. Αυτή η ιδιότητα είναι σημαντική στον χώρο της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

Θα επισκευθούμε ξανά το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, στην πορεία. Είναι ένα πολύ ισχυρό θεώρημα. Τα θεωρήματα σταθερών σημείων διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορους τομείς των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της Τοπολογίας, της Συναρτησιακής Ανάλυσης και των Διαφορικών Εξισώσεων. Και φυσικά εξακολουθούν να αποτελούν αντικείμενο έρευνας, μέχρι σήμερα.

Στις Ασκήσεις 5.2 #9 και #10 συναντήσαμε τις έννοιες 'συνιστώσα' και 'ολικώς μη συνεκτικός χώρος'. Και οι δύο έννοιες είναι σημαντικές ως προς την κατανόηση της τοπολογικής έννοιας της συνεκτικότητας.

[3] Προειδοποίηση: Στην βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται οι όροι 'απεικόνιση' και 'συνάρτηση' θεωρώντας δεδομένη την συνέχεια. Σε αυτό το σύγγραμμα δεν το ασπαζόμαστε αυτό.

Βιβλιογραφία

[1] Colin C. Adams. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. Freeman and Co., New York, 1994.

[2] J. Frank Adams. Algebraic topology: a student's guide. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1972.

[3] G.N. Afanasiev. Topological effects in quantum mechanics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1999.

[4] M.A. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. Algebraic topology from a homotopical viewpoint. Springer, New York, 2002.

[5] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. Topologie. Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[6] Algebraic and Geometric Topology. http://www.maths.warwick.ac.uk/agt, 2001–. a refereed electronic journal.

[7] Charilaos N. Aneziris. The mystery of knots: computer programming for knot tabulation. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, N.J., 1999.

[8] A.V. Arhangel'skii, editor. General Topology II. Springer-Verlag, Berlin etc., 1995.

[9] A.V. Arhangel'skii, editor. General Topology III. Springer-Verlag, Berlin etc., 1995.

[10] A.V. Arkhangel'skiĭ. Fundamentals of general topology: problems and exercises. Kluwer, Boston, 1984.

[11] A.V. Arkhangel'skiĭ. Topological function spaces. Kluwer, Boston, 1992.

[12] A.V. Arkhangel'skiĭ and L.S. Pontryagin, editors. General Topology I. Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.

[13] D.L. Armacost. The structure of locally compact abelian groups. M. Dekker, New York, 1981.

[14] M.A. Armstrong. Basic topology. Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] V.I. Arnold and B.A. Khesin. Topological methods in hydrodynamics. Springer, New York, 1999.

[16] Emil Artin. Introduction to algebraic topology. C.E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1969.

[17] C.E. Aull and R. Lowen, editors. Handbook of the history of general topology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 1997.

[18] Wojciech Banaszczyk. Additive subgroups of topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1991.

[19] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On devaney's definition of chaos. Amer. Math. Monthly, 99:332–334, 1992.

[20] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. Chaos: A Mathematical Introduction. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[21] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. Additive subgroups of topological vector spaces. Imperial College Press, London, 2003.

[22] Stephen Barr. Experiments in topology. Dover Publications, New York, 1989.

[23] Gerald Alan Beer. Topologies on closed and convex sets. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1993.

[24] Martin P. Bendsoe. Optimization of structural topology. Springer, Berlin, New York, 1995.

[25] Martin P. Bendsoe. Topology, optimization: theory, methods and applications. Springer, Berlin, New York, 2003.

[26] A. S. Besicovitch. On linear sets of points of fractal dimension. Math. Annalen, 101:161–193, 1929.

[27] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. Selected topics in infinite-dimensional topology. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

[28] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. Jour. Math (Liouville), (9) 7:345–379, 1928.

[29] Donald W. Blackett. Elementary topology; a combinatorial and algebraic approach. Academic Press, New York, 1967.

[30] Robert L. Blair. The hewitt-pondiczery-marczewski theorem on the density character of a product space. Archiv der Mathematik, 23:422–424, 1972.

[31] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray, editors. Chemical topology : introduction and fundamental. Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

[32] Armand Borel. Seminars on transformation groups. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[33] Karol Borsuk. Collected Papers/ Karol Borsuk. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983.

[34] Nicolas Bourbaki. General topology v.1 & v.2. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[35] Nicolas Bourbaki. Topologie générale, Chap. 1-4 and Chap. 5-10. Hermann, Paris, 1971 and 1974.

[36] Nicolas Bourbaki. Topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1987.

[37] Glen E. Bredon. Topology and geometry. Springer, New York, 1997.

[38] R. Brown, P.J. Higgins, and Sidney A. Morris. Countable products and sums of lines and circles: their closed subgroups, quotients and duality properties. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 78:19–32, 1975.

[39] Robert F. Brown. The Lefschetz fixed point theorem. Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[40] Ronald Brown. Elements of modern topology. McGraw Hill, New York, 1968.

[41] Ronald Brown. Topology : a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid. Halstead Press, New York, 1988.

[42] Georg Cantor. Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, by Georg Cantor; tr., and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain. The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1915.

[43] Stephen C. Carlson. Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course. Wiley, New York, 2001.

[44] H. Cartan. Théorie des filtres. C. R. Acad. Paris, 205:595–598, 1937.

[45] H. Cartan. Filtres et ultrafiltres. C. R. Acad. Paris, 205:777–779, 1937.

[46] J. Scott Carter. How surfaces intersect in space : an introduction to topology. World Scientific Publishers, Singapore ; River Edge, N.J., 1995.

[47] Eduard Čech. Topological spaces. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966.

[48] Eduard Čech. Point sets. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1969.

[49] Graciela Chichilnisky. Topology and markets. American Mathematical society, Providence, R.I., 1999.

[50] Gustave Choquet. Topology. Academic Press, New York, 1966.

[51] Gustave Choquet. Lectures on analysis. W.A. Benjamin, New York, 1969.

[52] Daniel E. Cohen. Combinatorial group theory: a topological approach. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989.

[53] W.W. Comfort and S. Negrepontis. The theory of ultrafilters. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[54] W.W. Comfort and S. Negrepontis. Continuous pseudometrics. M. Dekker, New York, 1975.

[55] W.W. Comfort and S. Negrepontis. Chain conditions in topology. Cambridge University Press, Cambridge, England; New York, 1982.

[56] James P. Corbett. Topological principles in cartography. US Department of Commerce, Washington, D.C., 1980.

[57] J.-M. Cordier. Shape theory: categorical methods of approximation. Halstead Press, Chichester, England; New York, 1989.

[58] Jane Cronin. Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[59] R.J. Daverman and R.B. Sher, editors. Handbook of geometric topology. Elsevier, Amsterdam; New York, 2002.

[60] H. de Vries. Compact spaces and compactifications: an algebraic approach. Van Gorcum, Assen, 1962.

[61] J.V. Deshpande. Introduction to topology. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, New York, etc., 1988.

[62] Robert L. Devaney. Chaos, fractals and dynamics: computer experiments in mathematics. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.

[63] Robert L. Devaney. A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment. Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.

[64] Robert L. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition. Westview Press, Boulder, Colorado, 2003.

[65] Tammo tom Dieck. Topologie. de Gruyter, Berlin, 2000.

[66] Egbert Dierker. Topological methods in Walrasian economics. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[67] Jean Alexandre Dieudonné. A history of algebraic and differential topology, 1900-1960. Birkhauser, Boston, 1989.

[68] Dikran N. Dikranjan. Categorical structure of closure operators with applications to topology, algebra and discrete mathematics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995.

[69] Mircea V. Diudea and L. Jantschi. Molecular topology. Nova Science Publishers, Huntington, N.Y., 2001.

[70] C.T.J. Dodson. Category bundles and spacetime topology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1988.

[71] C.T.J. Dodson. A user's guide to algebraic topology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1997.

[72] Albrecht Dold. Lectures on algebraic topology. Springer, Berlin, 1995.

[73] James Dugundji. Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[74] Alan Dunn. Σαρκοσκιι΄ς Τηεορεμ–Παρτ 1, http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-091Spring--2005/A335FB2E-7381--49D4--B60C--7CBD2F349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.

[75] Herbert Edelsbrunner. Geometry and topology for mesh generation. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2001.

[76] Gerald A. Edgar. Measure, topology and fractal geometry. Springer-Verlag, New York, 1990.

[77] R.E. Edwards. Curves and topological questions. Australian National University, Canberra, Australia, 1969.

[78] Robert E. Edwards. Functional analysis: theory and applications. Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1965.

[79] James Eels. Singularities of smooth maps. Gordon and Breach, New York, 1967.

[80] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

[81] Murray Eisenberg. Topology. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[82] Patrik Eklund. Categorical fuzzy topology. Abo Akademi, Abo, 1986.

[83] Glenn Elert. Τηε ῆαος Ηψπερτεξτβοοκ, http://hypertextbook.com/chaos/, 2003.

[84] Ryszard Engelking. General topology. PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[85] Ryszard Engelking. Dimension theory. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York, 1978.

[86] Ερις Ω. Ωεινστειν. http://mathworld.wolfram.com/AxiomofChoice.html, Accessed, January 2011. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[87] William W. Fairchild and Cassius Ionescu Tulceac. Topology. W.B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1971.

[88] K.J. Falconer. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. Wiley, Chichester, New York, 1990.

[89] Erica Flapan. When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality. Cambridge University Press, cambridge; New York, 2000.

[90] Graham Flegg. From geometry to topology. Dover Publications, Mineola, N.Y., 2001.

[91] D.H. Fremlin. Consequences of Martin's Axioms. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1984.

[92] Peter Freyd. Abelian categories: An introduction to the theory of functors. Harper & Rowe, New York, 1964.

[93] Robert Froman. Rubber bands, baseballs and doughnuts; a book about topology. Illustrated by Harvey Weiss. Crowell, New York, 1972.

[94] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[95] David Gale. The game of hex and the brouwer fixed-point theorem. Amer. Math. Monthly, 86:818–827, 1979.

[96] David B. Gauld. Differential topology: an introduction. M. Dekker, New York, 1982.

[97] Γενεραλ Τοπολογψ Φροντ φορ τηε Ματηεματιςς ΑρΞι. http://front.math.ucdavis.edu/math.gn, 1992–. Los Alamos National Laboratory e-Print archive.

[98] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. A compendium of continuous lattices. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[99] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. Continuous lattices and domains. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[100] Leonard Gillman and Meyer Jerison. Rings of continuous functions. Springer-Verlag, New York, 1976.

[101] Robert Gilmore and Marc Lefranc. The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland. Wiley-Interscience, New York, 2002.

[102] John Ginsburg and Bill Sands. Minimal infinite topological spaces. Amer. Math. Monthly, 86:574–576, 1979.

[103] Norman J. Girardot. Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun). University of California Press, Berkeley, California, 1983.

[104] H. Brian Griffiths. Surfaces. Cambridge University Press, London; New York, 1976.

[105] Jonathan L. Gross. Topological graph theory. Wiley, New York, 1987.

[106] A. Grothendieck. Topological vector spaces. Gordon and Breach, New York, 1973.

[107] Paul Halmos. Naive set theory. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.

[108] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[109] Felix Hausdorff. Dimension und außeres maß. Math. Annalen, 79:157–159, 1919.

[110] Felix Hausdorff. Set Theory (translated from the original German). Chelsea, New York, 1962.

[111] Felix Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914). Chelsea, New York, 1965.

[112] Horst Herrlich. Axiom of Choice. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

[113] Horst Herrlich and Hans-E. Porst, editors. Category theory at work. Heldermann-Verlag, Berlin, 1991.

[114] Edwin Hewitt. A remark on density characters. Bull. Amer. Math. Soc., 52: 641–643, 1946.

[115] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[116] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis II: structure and analysis for compact groups, analysis on locally compact abelian groups. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[117] Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann, and Jimmie D. Lawson. Lie groups, convex cones and semigroups. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[118] Peter John Hilton. Homology theory: an introduction to algebraic topology. Cambridge University Press, London, 1967.

[119] Neil Hindman and Dona Strauss. Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications. W. de Gruyter, New York, 1998.

[120] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition. Elsevier, Oxford, UK, 2004.

[121] John Gilbert Hocking and Gail S. Young. Topology. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1961.

[122] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups. European Mathematical Society Publishing House, Tracts in Mathematics 2, Zurich, Switzerland, 2007.

[123] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert. de Gruyter, Studies in Mathematics 25, Berlin, third edition, 2013.

[124] Karl Heinrich Hofmann and Paul S. Mostert. Elements of compact semigroups. C.E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.

[125] Ηοπφ Τοπολογψ Αρςηιε. http://hopf.math.purdue.edu, 1996–. Purdue University Hopf Archive of Topology preprints.

[126] Juan Horváth. Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[127] Paul Howard. ὃνσεχυενςες οφ τηε Αξιομ οφ ῝οιςε Προϑεςτ Ηομεπαγε, http://www.math.purdue.edu/~hrubin/JeanRubin/Papers/conseq.html, 1998 –.

[128] Paul Howard and Jean Rubin. Consequences of the Axiom of Choice. Mathematical Surveys and Monographs 59; American Mathematical Society, Providence, R.I., 1988.

[129] Norman R. Howes. Modern analysis and topology. Springer-Verlag, New York, 1995.

[130] S.T. Hu. Introduction to general topology. Holden-Day, San Francisco, 1966.

[131] S.T. Hu. Differentiable manifolds. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[132] Sze-Tsen Hu. Elements of general topology. Holden-Day, San Francisco, 1964.

[133] Sze-Tsen Hu. Homology theory; a first course in algebraic topology. Holden-Day, San Francisco, 1966.

[134] Witold Hurewicz and Witold Wallman. Dimension theory. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

[135] Taqdir Husain. The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces. Clarendon Press, Oxford, 1965.

[136] Taqdir Husain. Introduction to topological groups. W.B. Saunders, Philadelphia, 1966.

[137] Taqdir Husain. Topology and maps. Plenum Press, New York, 1977.

[138] Miroslav Husek and Jan Van Mill. Recent progress in general topology. North-Holland, Amsterdam; New York, 1992.

[139] J.R. Isbell. Uniform spaces. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[140] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. Amer. Math. Monthly, 99:865, 1992.

[141] I.M. James. General topology and homotopy theory. Springer-Verlag, New York, 1984.

[142] I.M. James. Handbook of algebraic topology. Elsevier, Amsterdam; New York, 1995.

[143] I.M. James. Topologies and uniformities. Springer, London; New York, 1999.

[144] I.M. James. History of topology. Elsevier, Amsterdam; New York, 1999.

[145] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. Abstract algebra and famous impossibilities. Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

[146] V. Kannan. Ordinal invariants in topology. American mathematical society, Providence, R.I., 1981.

[147] Christian Kassel. Quantum groups. Springer-Verlag, New York, 1995.

[148] Louis H. Kauffman and Randy A. Baadhio. Quantum topology. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, 1993.

[149] John L. Kelley. General topology. Springer-Verlag, New York, 1991.

[150] S.M. Khaleelulla. Counterexamples in topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1982.

[151] Wan-hui Kim and Robert Tien-wen Chien. Topological analysis and synthesis of communication networks. Columbia University Press, New York, 1962.

[152] Bruce R. King. Applications of graph theory and topology in inorganic cluster and coordination chemistry. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[153] T. Yung Kong and Azriel Rosenfeld. Topological algorithms for digital image processing. Elsevier, Amsterdam; New York, 1996.

[154] Gottfried Köthe. Topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1983.

[155] Kenneth Kunen. Set theory. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[156] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. Handbook of set-theoretic topology. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[157] Kazimierz Kuratowski. Introduction to set theory and topology. Pergamonn Press, New York, 1961.

[158] A. G. Kurosh. Theory of Groups: Volume 1. AMS Chelsea Publishing, New York, 1956; Reprinted 1960.

[159] H.A. Lauwerier. Fractals: endlessly repeated geometrical figures. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.

[160] John M. Lee. Introduction to topological manifolds. Springer, New York, 2000.

[161] John M. Lee. Introduction to smooth manifolds. Springer, New York, 2002.

[162] H. Leptin. Zur dualit´ atstheorie projectiver limites abelscher gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 19:264–268, 1955.

[163] Seymour Lipschutz. Schaum's outline of general topology. McGraw Hill, 1968.

[164] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo. Fuzzy topology. World Scientific Publishers, River Edge, N.J., 1997.

[165] Charles Livingston. Knot theory. The Mathematical association of America, 1993.

[166] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20:130–141, 1963.

[167] Saunders Maclane. Categories for the working mathematician, second edition. Springer-Verlag, New York, 1998.

[168] Benoit B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. Science, 155:636–638, 1967.

[169] Benoit B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. W.H. Freeman, New York, 1983.

[170] Mark Mandelkern. A short proof of the tietze-urysohn extension theorem. Arch. Math., 60:364–366, 1993.

[171] Edward Marczewski. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques. Fundamenta Math., 34:137–143, 1947.

[172] Per Martin-Löf. 100 years of Zermelo's axiom of choice: What was the problem with it?, in Logicism, Intuitionism, and Formalism: What Has Become of Them?, Sten Lindström, Erik Palmgren, Krister Segerberg, and Viggo Stoltenberg-Hansen editors. Springer, London, 2009.

[173] R.D. Mauldin, editor. The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café. Birkhäuser, Boston, 1981.

[174] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. Science, 186:645–647, 1974.

[175] George McCarty. Topology; an introduction with application to topological groups. McGraw Hill, New York, 1967.

[176] Robert A. McCoy and Ibulu Ntantu. Topological properties of spaces of continuous functions. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1988.

[177] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. Introduction to symplectic topology. Oxford University Press, New York, 1998.

[178] Richard E. Merrifield and Howard E. Simmons. New York.

[179] Emil G. Milewski. The topology problem solver: a complete solution guide to any textbook. Research and Education Association, Piscataway, N.J., 1994.

[180] M. Mimura and Hirosi Toda. Topology of Lie groups. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[181] Edward E. Moise. Introductory problem courses in analysis and topology. Springer-Verlag, New York, 1982.

[182] Mikhail I. Monastyrskaei. Topology of gauge fields and condensed matter. Plenum Press, New York, 1993.

[183] Deane Montgomery and Leo Zippin. Topological transformation groups. Interscience Publishers, New York, 1955.

[184] E.H. Moore and H.L. Smith. A general theory of limits. American Journal of Mathematics, 44:102–121, 1922.

[185] Robert L. Moore. Foundations of point set topology. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[186] Giuseppe Morandi. The role of topology in classical and quantum physics. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1992.

[187] K. Morita and J. Nagata, editors. Topics in general topology. North Holland, Amsterdam, 1989.

[188] Sidney A. Morris. Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1977.

[189] Sidney A. Morris. Are finite topological spaces worthy of study. Austral. Math. Soc. Gazette, 11:31–32, 1984.

[190] Sidney A. Morris. An elementary proof that the Hilbert cube is compact. Amer. Math. Monthly, 91:563–564, 1984.

[191] Jan Mycielski. A system of axioms of set theory for the rationalists. Notices Ameri. Math. Soc., 53 (2):209, 2006.

[192] Gregory L. Naber. Topological methods in Euclidean spaces. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1980.

[193] Gregory L. Naber. Topology, geometry and gauge fields: foundations. Springer, New York, 1997.

[194] Keio Nagami. Dimension theory. Academic Press, New York, 1970.

[195] Jun-iti Nagata. Modern dimension theory. Interscience Publishers, New York, 1965.

[196] Jun-iti Nagata. Modern general topology. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985.

[197] Mikio Nakahara. Geometry, topology and physics. A. Hilger, Bristol, England; New York, 1990.

[198] H. Nakano. Topology and linear topological spaces. Maruzen Co., Tokyo, 1951.

[199] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. Topological vector spaces. M. Dekker, New York, 1985.

[200] Charles Nash. Topology and geometry for physicists. Academic Press, London, New York, 1983.

[201] M.H.A. Newman. Elements of the topology of plane sets of points. Greenwood Press, Westport, Conn., 1985.

[202] A.L. Onishchik. Topology of transitive transformation groups. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.

[203] John C. Oxtoby. Measure and category; a survey of the analogies between topological and measure spaces. Springer-Verlag, New York, 1971.

[204] A.R. Pears. Dimension Theory of general spaces. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1975.

[205] Anthony L. Peressini. Ordered topological vector spaces. Harper and Row, New York, 1967.

[206] C.G.C. Pitts. Introduction to metric spaces. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

[207] Henri Poincarè. Science and method; translated and republished. Dover Press, New York, 2003.

[208] E.S. Pondiczery. Power problems in abstract spaces. Duke Math. J., 11: 835–837, 1944.

[209] Ian R. Porteous. Topological geometry. Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1981.

[210] Bodo von Querenburg. Mengentheoretische Topologie. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[211] George M. Reed. Surveys in general topology. Academic Press, New york, 1980.

[212] G.M. Reed, A.W. Roscoe, and R.F. wachter. Topology and category theory in computer science. Oxford University Press, Oxford, England, 1991.

[213] Renzo L. Ricca. An introduction to the geometry and topology of fluid flows. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 2001.

[214] David S. Richeson. Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2008.

[215] A.P. Robertson and Wendy Robertson. Topological vector spaces. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.

[216] Joseph J. Rotman. An introduction to algebraic topology. Springer-Verlag, New York, 1988.

[217] Herman Rubin and Jean E. Rubin. Equivalents of the Axiom of Choice. North Holland, 1963.

[218] Herman Rubin and Jean E. Rubin. Equivalents of the Axiom of Choice II. North Holland/Elsevier, 1985.

[219] Mary Ellen Rudin. Lectures on set theoretic topology. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[220] Hans Sagan. Space-filling curves. Springer-Verlag, New York, 1994.

[221] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. Ukranian Mat. Z., 16:61–71, 1964.

[222] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. Word problems II, Stud. Logic Found. Math., 995:373–394, 1980.

[223] M. Signore and F. Melchiorri. Topological defects in cosmology. World Scientific Publishers, Singapore, 1998.

[224] George E. Simmons. Introduction to topology and modern analysis. McGraw Hill, New York, 1963.

[225] I.M. Singer. Lecture notes on elementary topology and geometry. Springer-Verlag, New York, 1967.

[226] Christopher G. Small. The statistical theory of shape. Springer, New York, 1996.

[227] Alexei Sossinsky. Knots: mathematics with a twist. Harvard University Press, 2002.

[228] Edwin H. Spanier. Algebraic topology. Springer-Verlag, New York, 1966.

[229] John R. Stallings. Lectures on polyhedral topology. Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India, 1967.

[230] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. Counterexamples in topology. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[231] N.E. Steenrod. Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra. American Mathematical Society, Providence, R.I., 191968.

[232] N.E. Steenrod. The topology of fibre bundles. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.

[233] John Stillwell. Classical topology and combinatorial group topology. Springer-Verlag, New York, 1995.

[234] Τηε ΜαςΤυτορ Ηιστορψ οφ Ματηεματιςς Αρςηιε. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/, 2001–.

[235] Wolfgang Thron. Topological structures. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[236] Τοπολογψ. http://www.elsevier.com/locate/top, 1962–. A hard-copy refereed research journal in topology and geometry.

[237] Τοπολογψ ανδ ιτς Αππλιςατιονς. http://www.elsevier.nl/locate/topol, 1971–. A hard-copy refereed research journal in topology.

[238] Τοπολογψ Ατλας. http://at.yorku.ca/topology, 1995–. Topology related resources.

[239] Τοπολογψ Προςεεδινγς. http://topology.auburn.edu/tp/, 1977–. A hard-copy refereed research journal.

[240] J. van Mill. The infinite-dimensional topology. North Holland, Amsterdam, Oxford, Tokyo, 1988.

[241] J. van Mill. The infinite-dimensional topology of function spaces. Elsevier, Amsterdam, New York, 2001.

[242] Jan van Mill and George M. Reed. Open problems in topology. North-Holland, Amsterdam, 1990.

[243] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. Amer. Math. Monthly, 101:353–355, 1994.

[244] Steven Vickers. Topology via logic. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[245] A.V. Vologodskii. Topology and physics of circular DNA. CRC Press, Boca Raton, 1992.

[246] Russell C. Walker. The Stone-Cech compactification. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[247] C.T.C. Wall. A geometric introduction to topology. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[248] A.D. Wallace. Differential topology; first steps. W.A. Benjamin, New York, 1968.

[249] H. Wallmani. Lattices and topological spaces. Ann. of Math., 39:112–126, 1938.

[250] Evert Wattel. The compactness operator in set theory and topology. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.

[251] Jeffrey R. Weeks. The shape of space. Marcel Dekker, New York, 2002.

[252] Stuart G. Whittington, De Witt Sumners, and Timothy Lodge, editors. Topology and geometry in polymer science. Springer, New York, 1998.

[253] R.L. Wilder. Topology of manifolds. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.

[254] Robin Wilson. Four colors suffice: how the map problem was solved. Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[255] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly, 82:985–992, 1975.

Ευρετήριο